# Esercizio per casa.

Filosofia della scienza
Gianluigi Bellin

October 29, 2013

**1. Si formalizzino** i seguenti enunciati nel calcolo dei predicati.

**1**.1 *Condizione necessaria e sufficiente perché un corpo celeste brilli di luce costante è che sia vicino alla terra.*
*Usare la chiave seguente:* $C(x)$ = "x è un corpo celeste che brilla di luce costante", $V(x)$ = "x è un corpo celeste vicino alla terra".

$$\forall x.[C(x) \to V(x)] \land [V(x) \to C(x)].$$

Una traduzione più fedele userebbe la chiave $C_c(x)$ = "x è un corpo celeste; $B(x)$ = " x brilla di luce costante", $V(x)$ = "x è vicino alla terra". Allora potremmo *relativizzare* l'equivalenza, cioè specificare che parliamo di corpi celesti:

$$\forall x.C_c(x) \to \big[[B(x) \to V(x)] \land [V(x) \to B(x)]\big].$$

**1**.2 *Condizione sufficiente perché in una cella elettrolitica si produca idrogeno presso il polo negativo e ossigeno presso il polo positivo è che nella cella elettrolitica vi sia una soluzione di acido solforico e che vi passi corrente continua.*
*Usare la chiave seguente:* $K_H$ = "si produce idrogeno ($H_2$) presso il polo negativo della cella elettrolitica"; $K_O$ = "si produce ossigeno ($O_2$) presso il polo positivo della cella elettrolitica"; $S$ = "nella cella elettrolitica si trova una soluzione di acido solforico $(H_2SO_4)''$; $C$ = "nella cella elettrolitica passa una corrente elettrica continua".

$$(S \land C) \to (K_H \land K_O).$$

**1**.3 *Conseguenza necessaria del passaggio di corrente elettrica continua in una cella elettrolitica contenente una soluzione di acido solforico è che si forma idrogeno presso il catodo ed ossigeno presso l'anodo.* Si usi la stessa chiave dell'esercizio precedente.

$$(S \land C) \to (K_H \land K_O).$$

**1**.4 *C'è un individuo tale che o lui non beve o tutti bevono.*
*Usare la chiave seguente:* $B(x)$ = "x beve".

$$\exists x.[\neg B(x) \lor (\forall y.B(y))].$$

**1**.5 *Tutti amano qualcuno Usare la chiave seguente:* $A(x, y)$ = "x ama y".

$$\forall x.\exists y.A(x, y).$$

**2.** Si consideri il seguente sillogismo:

1. *Tutti i corpi celesti che brillano di luce costante sono vicini alla terra.*

2. *Tutti i pianeti sono corpi celesti che brillano di luce costante.*

---

3. *Dunque tutti i pianeti sono vicini alla terra.*

**È un ragionamento valido?** (**Si**)

**Si formalizzi** in linguaggio logico moderno questo sillogismo.
*Suggerimento:* Si usi la chiave $C(x)$ = "x è un corpo celeste che brilla di luce costate"; $V(x)$ "x è un corpo celeste vicino alla terra"; $P(x)$ = "x è un pianeta".

$$\begin{array}{ll} 1. & \forall x.C(x) \to V(x). \\ 2. & \forall y.P(y) \to C(y). \\ \hline 3. & \forall z.P(z) \to V(z). \end{array}$$

**3.** Secondo Aristotele tutti i pianeti brillano di luce costante *perché* sono vicini alla terra.

(i) **Si formuli** un *sillogismo del fatto ragionato* che esprime nel linguaggio scientifico di Aristotele questa relazione causale.

1. *Tutti i corpi celesti che sono vicini alla terra brillano di luce costante.*

2. *Tutti i pianeti sono corpi celesti che sono vicini alla terra.*

---

3. *Dunque tutti i pianeti brillano di luce costante.*

(ii) Si formalizzi nel linguaggio logico moderno il sillogismo formulato in 3(i).

$$\begin{array}{ll} 1. & \forall x.V(x) \to C(x). \\ 2. & \forall y.P(y) \to V(y). \\ \hline 3. & \forall z.P(z) \to C(z). \end{array}$$

**4.** Si formalizzino i seguenti enunciati, usando un linguaggio

$$\mathcal{L} = (A^2, =, M^1, c, g, r) :$$

1. *Nessuno dei Montecchi, eccetto Romeo, è amato dal Sig Capuleti.*

2. *Il Sig Capuleti ama tutti quelli che sono amati da Giulietta.*

3. *Giulietta ama Romeo.*

4. *Romeo è un Montecchi.*

**4**.1 $\forall x.[(M(x) \land \neg x = r) \to \neg A(c, x)]$.

**4**.2 $\forall y.[A(g, y) \to A(c, y)]$.

**4**.3 $A(g, r)$.

**4**.4 $M(r)$.

Gli enunciati 1-4 descrivono una situazione, nella quale possiamo interpretare gli enunciati in modo da renderli tutti veri. **Si specifichi una interpretazione** indicando

- Un dominio di individui come universo di discorso.

  $D = \{1, 2, 3, 4\}$.

- i singoli individui che corrispondono ai *nomi* $c$, $g$, $r$;

  $c_{\mathcal{M}} = 1$; $g_{\mathcal{M}} = 2$; $r_{\mathcal{M}} = 3$.

- l'insieme dei Montecchi;

  $M_{\mathcal{M}} = \{3, 4\}$.

- le coppie di individui che si amano.

  $A_{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$.

Matematicamente si è definita una interpretazione

$$\mathcal{M} = (D, A_{\mathcal{M}}, =_{\mathcal{M}}, M_{\mathcal{M}}, c_{\mathcal{M}}, g_{\mathcal{M}}, r_{\mathcal{M}})$$

dove " $=''_{\mathcal{M}}$ è l'identità su $D$. Si verifichi che questa interpretazione rende vere le formule corrispondenti ad 1-4.

Verifichiamo che **4**(1-4) sono vere in $\mathcal{M}$.

**4**.3: $\mathcal{M} \models A(g, r)$ perché $(g_{\mathcal{M}}, r_{\mathcal{M}}) = (2, 3)$ e $(2, 3) \in A_{\mathcal{M}}$;

**4**.4: $\mathcal{M} \models M(r)$ perché $r_{\mathcal{M}} = 3$ e $3 \in M_{\mathcal{M}}$.

Ora dobbiamo verificare le espressioni **4**.1 e **4**.2, che contengono un quantificatore universale. Ma non posso verificare

$$\mathcal{M} \models (M(x) \land \neg x = r) \to \neg A(c, x)$$

perché la variabile $x$ non ha interpretazione. Devo cioè *assegnare un valore ad "x"* e poi interpretare l'espressione per quella assegnazione. Verifichiamo

$$\mathcal{M} \models (M(x) \land \neg x = r) \to \neg A(c, x)[x := a]$$

dove $a = 1, 2, 3, 4$. In sintesi, se $a = 1$ e $a = 2$ allora $a$ non è un Montecchi, quindi l'antecedente dell'implicazione è falso e l'implicazione è vera. Se $a = 3$ allora $a$ è un Montecchi, ma si tratta proprio di Romeo e quindi l'antecedente dell'implicazione è ancora falso. Infine se $a = 4$ allora $a$ è un Montecchi diverso da Romeo, e nello scenario che immaginiamo il Sig Capuleti non lo ama proprio. In ogni caso l'implicazione è vera, ma solo nel caso $a = 4$ vediamo che il modello soddisfa sia l'antecedente che il conseguente dell'implicazione. Ecco una verifica formale:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \models (M(x) \wedge \neg x = r) \rightarrow \neg A(c,x)[x := 1] \quad & \Leftrightarrow \\
(1 \in M_{\mathcal{M}} \wedge \neg 1 = r_{\mathcal{M}}) \rightarrow (c_{\mathcal{M}}, 1) \notin A_{\mathcal{M}} \quad & \Leftrightarrow \\
(\text{falso} \wedge 1 \neq 3) \rightarrow (1,1) \notin A_{\mathcal{M}} \quad & = \text{vero.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \models (M(x) \wedge \neg x = r) \rightarrow \neg A(c,x)[x := 2] \quad & \Leftrightarrow \\
(2 \in M_{\mathcal{M}} \wedge \neg 2 = r_{\mathcal{M}}) \rightarrow (c_{\mathcal{M}}, 2) \notin A_{\mathcal{M}} \quad & \Leftrightarrow \\
(\text{falso} \wedge 2 \neq 3) \rightarrow (1,2) \notin A_{\mathcal{M}} \quad & = \text{vero.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \models (M(x) \wedge \neg x = r) \rightarrow \neg A(c,x)[x := 3] \quad & \Leftrightarrow \\
(3 \in M_{\mathcal{M}} \wedge \neg 3 = r_{\mathcal{M}}) \rightarrow (c_{\mathcal{M}}, 3) \notin A_{\mathcal{M}} \quad & \Leftrightarrow \\
(\text{vero} \wedge 3 \neq 3) \rightarrow (1,3) \notin A_{\mathcal{M}} \quad & \Leftrightarrow \\
(\text{vero} \wedge \text{falso}) \rightarrow \text{falso} \quad & = \text{vero}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \models (M(x) \wedge \neg x = r) \rightarrow \neg A(c,x)[x := 4] \quad & \Leftrightarrow \\
(4 \in M_{\mathcal{M}} \wedge \neg 4 = r_{\mathcal{M}}) \rightarrow (c_{\mathcal{M}}, 4) \notin A_{\mathcal{M}} \quad & \Leftrightarrow \\
(\text{vero} \wedge 4 \neq 3) \rightarrow (1,4) \notin A_{\mathcal{M}} \quad & \Leftrightarrow \\
(\text{vero} \wedge \text{vero}) \rightarrow \text{vero} \quad & = \text{vero.}
\end{aligned}
$$

Dunque l'interpretazione soddisfa la formula $(M(x) \wedge \neg x = r) \rightarrow \neg A(c,x)$ *per ogni assegnazione* alla variabile $x$ e dunque la formula **4**.1 è vera in $\mathcal{M}$

Similmente verifichiamo

$$\mathcal{M} \models [A(g,y) \to A(c,y)][y := a]$$

per $a = 1,2,3,4$. Nella nostra interpretazione "Giulietta" è l'individuo 2 ($g_{\mathcal{M}} = 2$) e il "Sig Capuleti" è l'individuo 1 ($c_{\mathcal{M}} = 1$). Nel caso $a = 1$ e $a = 4$ la nostra interpretazione del predicato $A^2$ stabilisce che Giulietta non ama $a$ [infatti $(2,1) \notin A_{\mathcal{M}}$ e $(2,4) \notin A_{\mathcal{M}}$] dunque l'antecedente dell'implicazione è falso. Se $a = 2$, abbiamo che Giulietta ama se stessa ed anche il Sig Capuleti ama Giulietta [infatti $(2,2) \in A_{\mathcal{M}}$ e $(1,2) \in A_{\mathcal{M}}$] dunque l'implicazione è vera. Infine se $a = 3$ abbiamo che Giulietta ama Romeo ed anche il Sig Capuleti lo trova simpatico [infatti $(2,3) \in A_{\mathcal{M}}$ e $(1,3) \in A_{\mathcal{M}}$]. Formalmente:

$$\begin{array}{rl}
\mathcal{M} \models A(g,y) \to A(c,y)[y := 1] & \Leftrightarrow \\
(g_{\mathcal{M}},1) \in A_{\mathcal{M}} \to (c_{\mathcal{M}},1) \in A_{\mathcal{M}} & \Leftrightarrow \\
(2,1) \in A_{\mathcal{M}} \to (1,1) \in A_{\mathcal{M}} & \Leftrightarrow \\
\text{falso} \to \text{falso} & = \text{vero.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\mathcal{M} \models A(g,y) \to A(c,y)[y := 2] & \Leftrightarrow \\
(g_{\mathcal{M}},2) \in M_{\mathcal{M}} \to (c_{\mathcal{M}},2) \in A_{\mathcal{M}} & \Leftrightarrow \\
(2,2) \in M_{\mathcal{M}} \to (1,2) \in A_{\mathcal{M}} & \Leftrightarrow \\
\text{vero} \to \text{vero} & = \text{vero.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\mathcal{M} \models A(g,y) \to A(c,y)[y := 3] & \Leftrightarrow \\
(g_{\mathcal{M}},3) \in M_{\mathcal{M}} \to (c_{\mathcal{M}},3) \in A_{\mathcal{M}} & \Leftrightarrow \\
(2,3) \in M_{\mathcal{M}} \to (1,3) \in A_{\mathcal{M}} & \Leftrightarrow \\
\text{vero} \to \text{vero} & = \text{vero.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\mathcal{M} \models A(g,y) \to A(c,y)[y := 4] & \Leftrightarrow \\
(g_{\mathcal{M}},4) \in M_{\mathcal{M}} \to (c_{\mathcal{M}},4) \in A_{\mathcal{M}} & \Leftrightarrow \\
(2,4) \in M_{\mathcal{M}} \to (1,4) \in A_{\mathcal{M}} & \Leftrightarrow \\
\text{falso} \to \text{falso} & = \text{vero.}
\end{array}$$

Dunque l'interpretazione soddisfa la formula $A(g,y) \to A(c,y)$ *per ogni assegnazione* alla variabile $y$ e dunque la formula **4**.2 è vera in $\mathcal{M}$.

Si noti che le formula **4**.1-4 sono anche verificate in un modello in cui la gente si ama di più, per esempio, ciascuno ama se stesso ($A_{\mathcal{M}}$ è riflessiva), Romeo ama Giulietta e Giulietta ama suo padre, il Sig Capuleti ($(2,1) \in A_{\mathcal{M}}$. In questo caso la relazione $A^2$ è interpretata come segue:

$$A_{\mathcal{M}} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4)\}.$$