1 Calcolo dei predicati del I ordine. Semantica

Ricordiamo la sintassi del calcolo dei predicati.

1.1 Sintassi.

Sintassi. Un linguaggio del calcolo dei predicati $\mathcal{L} = (\mathbf{Pred}, \mathbf{Fun}, \mathbf{Const})$ consiste di

(1) un insieme di lettere predicative $\mathbf{Pred} = \{P_1^{n_1}, \ldots, P_m^{n_m}\}$, dove $P_i^{n_i}$ è un simbolo di predicato n_i-*ario* (una espressione "non-saturata", con n_i "buchi");

(2) un insieme di simboli di funzione $\mathbf{Fun} = \{f_1^{n_1}, \ldots, f_k^{n_k}\}$, dove $f_i^{n_i}$ è un simbolo di funzione n_i-*aria.*

(3) un insieme di simboli di costante $\mathbf{Const} = \{c_1, \ldots, c_h\}$ Una costante può essere considerata come una funzione con zero argomenti.

(4) Il linguaggio comprende un insieme infinito di variabili **Var**: v_0, v_1, ... v_i, ... per denotare le quali si usano i *simboli metalinguistici* x, y, ..., anche con indici x_i.

Termini. I *termini* del linguaggio sono definiti dalla grammatica

$$\boxed{t \;:=\; x \mid c \mid f^n(t_1, \ldots, t_n)}$$

che leggiamo induttivamente:

- (i) un simbolo di variabile x è un termine (*variabile libera*);
- (ii) un simbolo di costante c è un termine (*chiuso*);
- (iii) se t_1, ... t_n sono termini e f^n è un simbolo di funzione n-*aria*, allora $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine; se t_1, ... t_n sono *termini chiusi*, allora $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ è un *termine chiuso*; se x *occorre libera* in qualche termine se t_i, allora x *occorre libera* in $f^n(t_1, \ldots, t_n)$;
- (iv) un'espressione è un termine solo se è stata ottenuta con un numero finito di applicazioni delle clausole (i) - (iii).

Formule. Le *formule* del linguaggio sono definite dalla grammatica

$$\boxed{A, B \;:=\; P^n(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg A \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid A \to B \mid \forall x.A \mid \exists x.A}$$

che leggiamo induttivamente, definendo anche la nozione di *variabile libera* e di *formula chiusa*:

- (i) se t_1, ... t_n sono termini e P^n è un simbolo di predicato n-*ario*, allora $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ è una *formula atomica*; se t_1, ... t_n sono termini *chiusi*, allora $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ è una *formula atomica chiusa*; se x occorre libera in qualche termine t_i allora x *occorre libera* nella formula atomica $P^n(t_1, \ldots, t_n)$.
- (ii) Se A e B sono formule, allora $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ $(A \to B)$ sono formule; se x occorre libera in A o in B allora x *occorre libera* nella formula composta e se A e B sono formule chiuse, anche la formula risultante è *chiusa.*

- (iii) Se A è una formula, allora $(\exists x.A)$ e $(\forall x.A)$ sono formule. Tutte le variabili diverse da x che occorrono libere in A occorrono libere anche in $\forall x.A$ ed in $\exists x.A$ ed ogni occorrenza di x in A è *legata* dal quantificatore $\forall x$ oppure $\exists x$. Se A contiene al più x come variabile libera, allora $(\exists x.A)$ e $(\forall x.A)$ sono *formule chiuse.*

- (iv) un'espressione è una formula solo se è stata ottenuta con un numero finito di applicazioni delle clausole (i) - (iii).

Sostituzione. Definiamo cosa vuol dire sostituire un termine t per x in un termine u - in simboli $u[t/x]$ - o in una formula A - in simboli $A[t/x]$:

- $x[t/x] = t$;
- se y è una variabile diversa da x, abbiamo $y[t/x] = y$;
- $c[t/x] = c$;
- $f^n(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = f^n(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$;
- $P^n(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = P^n(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$;
- $(\neg A)[t/x] = \neg A[t/x]$, $(A \wedge B)[t/x] = A[t/x] \wedge B[t/x]$, e similmente per gli altri connettivi proposizionali;
- se y non compare libera in t, $(\exists y.A)[t/x] = \exists y.(A[t/x])$;
- se y compare libera in t e z è una variabile che non compare né in t né in A, allora $(\exists y.A)[t/x] = \exists z.(A[z/y][t/x])$ (*cioè, prima cambio il nome della variablie legata in modo che una variabile libera di t non sia "catturata" dal quantificatore, e poi sostituisco*).

Varianti. Consideriamo le formule $\forall x.A$ (oppure $\exists x.A$) e sia z una variabile che non compare in A. Allora $\forall z.A[z/x]$ (oppure $\exists z.A[z/x]$) - ottenuta sostituendo una variabile "nuova" per x in A e legando con lo stesso quantificatore la variabile z in $A[z/x]$ è una *variante* di $\forall x.A$ oppure di $\exists x.A$. Definiremo la semantica in modo che varianti della stessa formula abbiano lo stesso significato.

Semantica. Una *interpretazione* $\mathcal{M}$ del linguaggio $\mathcal{L}$ consiste di un dominio non vuoto D e di una funzione $(\ )_{\mathcal{M}}$ che assegna

- ad ogni simbolo di predicato n-ario P^n in **Pred** una relazione n-aria $P^n_{\mathcal{M}} : D^n \to \{\texttt{vero, falso}\}$;
- ad ogni simbolo di funzione n-aria f^n in **Fun** una funzione n-aria $f^n_{\mathcal{M}} : D^n \to D$;
- ad ogni simbolo di costante c in **Const** un elemento $c_{\mathcal{M}} \in D$.

Una *assegnazione* è una funzione $\sigma : \textbf{Var} \to D$. Data una interpretazione $\mathcal{M}$ ed una assegnazione σ, l'interpretazione $t_{\mathcal{M}}[\sigma]$ di un *termine* t in $\mathcal{M}$ con l'assegnazione σ è definita per induzione sulla definizione di termine:

- (i) se t è una costante c, allora $c_{\mathcal{M}}[\sigma] = c_{\mathcal{M}} \in D$;

- (ii) se t è una variabile x, allora $x_{\mathcal{M}}[\sigma] = \sigma(x) \in D$;
- (iii) se $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, allora $t_{\mathcal{M}}[\sigma] = f_{\mathcal{M}}(t_{1\mathcal{M}}[\sigma], \ldots, t_{n\mathcal{M}}[\sigma]) \in D$.

Data una assegnazione σ, l'assegnazione σ_i^d è definita così:

$$\sigma_i^d(v_i) = d; \qquad\qquad \sigma_i^d(v_j) = \sigma(v_j), \qquad \text{se } j \neq i.$$

Dunque σ_i^d è quella funzione che coincide con σ su tutte le variabili, ma assegna alla variabile v_i il termine d.

Definizione. (Tarski) Definiamo cosa significa che una assegnazione σ *soddisfa* φ in $\mathcal{M}$, formalmente $\mathcal{M} \models \varphi[\sigma]$, induttivamente così:

- (i) se $A = P^n(t_1, \ldots, t_n)$ è una *formula atomica*, allora

$$\mathcal{M} \models A[\sigma] \quad \text{se e solo se} \quad \langle t_{1\mathcal{M}}[\sigma], \ldots, t_{n\mathcal{M}}[\sigma] \rangle \in P^n_{\mathcal{M}};$$

- (ii) $\mathcal{M} \models (\neg A)[\sigma]$ se e solo se **non** $\mathcal{M} \models A[\sigma]$;
- $\mathcal{M} \models (A \wedge B)[\sigma]$ se e solo se $\mathcal{M} \models A[\sigma]$ **e** $\mathcal{M} \models B[\sigma]$;
- $\mathcal{M} \models (A \vee B)[\sigma]$ se e solo se $\mathcal{M} \models A[\sigma]$ **o** $\mathcal{M} \models B[\sigma]$;
- $\mathcal{M} \models (A \to B)[\sigma]$ se e solo se $\mathcal{M} \models A[\sigma]$ **implica** $\mathcal{M} \models B[\sigma]$;
- (iii) $\mathcal{M} \models (\exists v_i.A)[\sigma]$ se e solo se **esiste** un $d \in D$ tale che $\mathcal{M} \models A[s_i^d]$;
- $\varphi = (\forall v_i.A)$: $\quad \mathcal{M} \models (\forall v_i.A)[\sigma]$ se e solo se **per tutti** i $d \in D$, $\mathcal{M} \models A[s_i^d]$.

Una *formula chiusa* A è *vera nell' interpretazione* $\mathcal{M}$, in simboli $\mathcal{M} \models A$, se $\mathcal{M} \models A[\sigma]$ per ogni assegnazione s.

Una *formula chiusa* A è *valida* se per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ vale $\mathcal{M} \models A$.

Se Γ è un insieme di formula chiuse e A è una formula chiusa, A è una *conseguenza valida* di Γ se per ogni interpretazione $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M} \models C \text{ per ogni } C \in \Gamma \quad \text{implica} \quad \mathcal{M} \models A.$$

Nota: termini indicali. Ma a cosa corrisponde una assegnazione nel linguaggio naturale? Consideriamo i termini *questo, quello, ora, domani, ieri,* ecc. Questi termini non hanno un valore fissato una volta per tutte, ma denotano un oggetto o un momento del tempo che dipende dalle circostanze in cui sono pronunciati e dalla intenzione della persona che li pronuncia: per esempio, dico *"questa musica mi piace"* in una situazione in cui io sto ascoltando un brano musicale insieme ad alcune persone; oppure, supponendo che stiamo ascoltando una musica che non mi piace, dico al mio vicino: *"un'ora fa stavo ascoltando uno dei Quartetti Haydn di Mozart, e questa è la musica che mi piace"*. Il mio vicino che conosce i miei gusti, non ha difficoltà a capire che faccio riferimento al quartetto di Mozart.

Se formalizziamo una situazione conversazionale in cui c'è un universo del discorso, un insieme di persone che hanno un nome proprio e di oggetti, un insieme di proprietà e di relazioni, il linguaggio può essere formalizzato come $\mathcal{L}$

$= (P_i^{n_i}, \ldots, c_j, \ldots)$ e possiamo fissare una volta per tutte l'interpretazione dei predicati P^{n_i} e delle costanti c_j, ma non possiamo fissare una volta per tutte il significato di *questo, quello*, ecc.

Esempio. Consideriamo gli enunciati

1. Romeo è un Montecchi;
2. Giulietta ama Romeo;
3. Il padre di Giulietta non ama i Montecchi;
4. Il padre di Giulietta non ama chi ama qualcuno che lui non ama.

Il linguaggio $\mathcal{L} = (M^1, A^2; p^1; g, r)$ comprende

- un simbolo di predicato unario $M(x)$ (sta per *x è un Montecchi*);
- un simbolo di predicato binario $A(x, y)$ (sta per *x ama y*);
- un simbolo di funzione unario $p(x)$ (sta per *il padre di x*)
- due simboli di costante g, r (stanno per *Giulietta, Romeo*)

Gli enunciati vengono formalizzati come segue:

1. $M(r)$ (*Romeo è un Montecchi*);
2. $A(g, r)$ (*Giulietta ama Romeo*;
3. $\forall x.M(x) \rightarrow \neg A(p(g), x)$ (*Il padre di Giulietta non ama i Montecchi*;
4. $\forall y.\,((\exists z.A(y, z) \wedge \neg A(p(g), z)) \rightarrow \neg A(p(g), y))$
(*Il padre di Giulietta non ama chi ama qualcuno che lui non ama.*)

L'*interpretazione* $\mathcal{M} = (D; M^1_{\mathcal{M}}, A^2_{\mathcal{M}}; p^1_{\mathcal{M}}; g_{\mathcal{M}}, r_{\mathcal{M}})$ consiste di

- un insieme D di individui;
- un sottoinsieme $M_{\mathcal{M}}$ di D, i Montecchi;
- una relazione $A_{\mathcal{M}}$ tra elementi di D, la relazione *amare*, che possiamo pensare come l'insieme delle coppie $\langle d_1, d_2 \rangle$ tali che d_1 ama d_2;
- una funzione $p_{\mathcal{M}}$ definita su D che associa ad ogni individuo suo padre;
- due elementi di G, $g_{\mathcal{M}}$ e $r_{\mathcal{M}}$ (Giulietta e Romeo).

Vogliamo vedere a quali condizioni l'interpretazione $\mathcal{M}$ è un modello degli enunciati 1-4.

1. $\mathcal{M} \models M(r)$ se e solo se $r_{\mathcal{M}} \in M_{\mathcal{M}}$;
2. $\mathcal{M} \models A(g, r)$ se e solo se $\langle g_{\mathcal{M}}, r_{\mathcal{M}} \rangle \in A_{\mathcal{M}}$;
3. $\mathcal{M} \models \forall x.M(x) \rightarrow \neg A(p(g), x)$ se e solo se per ogni assegnazione σ e per ogni elemento $d \in D$ vale

   $\mathcal{M} \models M(x) \rightarrow \neg A(p(g), x)[\sigma_x^d]$

cioè $\mathcal{M} \models M(x)[\sigma_x^d]$ implica $\mathcal{M} \models \neg A(p(g), x)[\sigma_x^d]$

cioè, dato che $\sigma_x^d(x) = d$, se $d \in M_{\mathcal{M}}$ allora $\langle p_{\mathcal{M}}(g_{\mathcal{M}}), d\rangle \notin A_{\mathcal{M}}$;

cioè, ponendo $\mathbf{p} = p_{\mathcal{M}}(g_{\mathcal{M}})$ ($\mathbf{p}$ *è il padre di Giulietta in* D), se vale $d \in M_{\mathcal{M}}$ allora la coppia $\langle \mathbf{p}, d\rangle$ non sta in $A_{\mathcal{M}}$;

cioè *se* d *è un Montecchi, allora la coppia* $\langle \mathbf{p}, d\rangle$ *non sta nella relazione* amare.

4 $\mathcal{M} \models \forall y.\, ((\exists z.A(y, z) \wedge \neg A(p(g), z)) \rightarrow \neg A(p(g), y))$ se e solo se per ogni σ ed ogni $d_1 \in D$, si ha $\mathcal{M} \models ((\exists z.A(y, z) \wedge \neg A(p(g), z)) \rightarrow \neg A(p(g), y))\,[\sigma_y^{d_1}]$;

cioè se $\mathcal{M} \models (\exists z.A(y, z) \wedge \neg A(p(g), z))[\sigma_y^{d_1}]$ allora $\mathcal{M} \models \neg A(p(g), y)[\sigma_y^{d_1}]$;

cioè se per qualche $d_2 \in D$ vale $\mathcal{M} \models A(y, z) \wedge \neg A(p(g), z))[\sigma_{y,\ z}^{d_1, d_2}]$ allora non vale $\mathcal{M} \models A(p(g), y)[\sigma_y^{d_1}]$;

cioè, ponendo $\mathbf{p} = p_{\mathcal{M}}(g_{\mathcal{M}}$ (*il padre di Giulietta in* D), se per qualche $d_2 \in D$ vale $\mathcal{M} \models A(y, z)[\sigma_{y,z}^{d_1, d_2}]$ e non vale $\mathcal{M} \models A(p(g), z)[\sigma_{y,\ z}^{d_1, d_2}]$ allora la coppia $\langle p, \sigma_y^{d_1}(y)\rangle$ non appartiene ad $A_{\mathcal{M}}$;

cioè, dato che $\sigma_{y,\ z}^{d_1, d_2}(y) = d_1 = \sigma_y^{d_1}(y)$ e $\sigma_{y,z}^{d_1, d_2}(z) = d_2$, se per qualche $d_2 \in D$ vale $\langle d_1, d_2\rangle \in A_{\mathcal{M}}$ e non vale $\langle \mathbf{p}, d_2\rangle \in A_{\mathcal{M}}$ allora la coppia $\langle \mathbf{p}, d_1\rangle$ non appartiene ad $A_{\mathcal{M}}$;
(*se qualche* d_2 *è amato da* d_1 *e non è amato dal padre di Giulietta, allora il padre di Giulietta non ama* d_1.)

Ciò che è sorprendente in questo esercizio un poco ... fastidioso, è che si può ottenere un modello anche interpretando gli enunciati in modo molto diverso. Poniamo l'*interpretazione* $\mathcal{N} = (\mathbf{N}; M_{\mathcal{N}}^1, A_{\mathcal{N}}^2; p_{\mathcal{N}}^1; g_{\mathcal{N}}, r_{\mathcal{N}})$ dove

- l'insieme $\mathbf{N}$ è l'insieme dei numeri naturali $\{1, 2, \ldots\}$;
- il sottoinsieme $M_{\mathcal{N}}$ di $\mathbf{N}$ sono i numeri pari minori di 20, (*i Montecchi*);
- la relazione $A_{\mathcal{N}}$ è la relazione $\leq$ tra numeri naturali (*la relazione* amare);
- $g_{\mathcal{N}} = 1$ e $r_{\mathcal{N}} = 2$ (Giulietta e Romeo).
- una funzione $p_{\mathcal{N}}$ definita su $\mathbf{N}$ che associ ad 1 il numero 19 (padre di n);

Allora abbiamo

1. 2 è un numero pari minore di 20; (*Romeo è un Montecchi*);
2. 1 è minore di 2 (*Giulietta ama Romeo*);
3. tutti i numeri pari minori di 20 non sono maggiori di 19
(*Il padre di Giulietta non ama i Montecchi*);
4. tutti i numeri minori di qualche numero minore di 19 sono minori di 19;
(*Il padre di Giulietta non ama chi ama qualcuno che lui non ama.*)

In questo modello Romeo non ama Giulietta, ma questo fatto non è detto dagli enunciati 1-4. Certamente in questo modello il padre di Giulietta non ama Giulietta.