Logica proposizionale Compito 2

Gianluigi Bellin

October 25, 2011

1 Sequenti

Un *sequente* S è una espressione formale astratta

$$S: \qquad A_1, \ldots, A_m \Rightarrow C_1, \ldots, C_n$$

L'insieme di formule $A_1, \ldots, A_m$ si chiama *antecedente*, l'insieme $C_1, \ldots, C_n$ il *succedente*.
Interpretiamo il sequente S nella logica classica così:

$$S: \qquad A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \Rightarrow C_1 \vee \ldots \vee C_n$$

• Il sequente S è *falsificabile* se per qualche valutazione $\mathcal{V}$ alle formule atomiche, $\mathcal{V}(A_1) = \ldots \mathcal{V}(A_m) = V$ e $\mathcal{V}(C_1) = \ldots \mathcal{V}(C_n) = F$; cioè la valutazione $\mathcal{V}$ rende tutte le formule nell'antecedente *vere* e tutte le formula nel succedente *false.*
• Il sequente S è *valido* se per ogni valutazione $\mathcal{V}$ alle formule atomiche, per qualche formula A_i nell'antecedente, $\mathcal{V}(A_i) = F$ oppure per qualche formula C_j nel succedente, $\mathcal{V}(C_m) = V$.

La procedura *semantic tableaux* è trattata nelle dispense disponibili sul sito del corso. Qui riproduciamo due esempi fatti in classe.
Esempio 1. Mostriamo che $A \vee B \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ è un sequente valido (il che comporta che $A \vee B \models \neg(\neg A \wedge \neg B)$).
Sia A = *mangio una pizza*, B = *mangio un sandwich*, questo sequente dice che *dal fatto che mangio una pizza o un sandwich segue logicamente che non è vero che non mangio né una pizza né un sandwich.*

$$
1.\;\dfrac{2.\;\dfrac{3.\;\dfrac{4.\;\dfrac{5.\;\dfrac{\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}, B \qquad \mathbf{B} \Rightarrow A, \mathbf{B}}{\mathbf{A} \lor \mathbf{B} \Rightarrow A, B}\lor \mathrm{L}}{A \lor B, \neg \mathbf{A} \Rightarrow B}\neg \mathrm{L}}{A \lor B, \neg A, \neg \mathbf{B} \Rightarrow}\neg \mathrm{L}}{A \lor B, \neg \mathbf{A} \land \neg \mathbf{B} \Rightarrow}\land \mathrm{L}}{A \lor B \Rightarrow \neg(\neg \mathbf{A} \land \neg \mathbf{B})}\neg \mathrm{R}
$$

Leggiamo l'albero dal basso in alto.

1. Cerchiamo una falsificazione del sequente $A \lor B \Rightarrow \neg(\neg A \land \neg B)$; cerchiamo una valutazione $\mathcal{V}$ che renda $A \lor B$ vera e $\neg(\neg A \land \neg B)$ falsa. Analizziamo la formula nel succedente: è una negazione (*regola* ¬ R) ; per farla falsa, basta fare vera $\neg A \land \neg B$.

2. Cerchiamo una falsificazione del sequente $A \lor B, \neg A \land \neg B \Rightarrow$; cerchiamo una valutazione $\mathcal{V}$ che renda sia $A \lor B$ che $\neg A \land \neg B$ vere. Analizziamo la formula $\neg A \land \neg B$: è una congiunzione nell'antecedente (*regola* ∧ *L*); per farla vera, occorre fare vere sia $\neg A$ che $\neg B$.

3. Cerchiamo una falsificazione del sequente $A \lor B, \neg A, \neg B \Rightarrow$; cerchiamo una valutazione $\mathcal{V}$ che renda vere sia $A \lor B$ che $\neg A$ che $\neg B$. Analizziamo la formula $\neg B$: è una negazione nell'antecedente (*regola* ¬ *L*); per farla vera, basta fare falsa B.

4. Cerchiamo una falsificazione del sequente $A \lor B, \neg A \Rightarrow B$; cerchiamo una valutazione $\mathcal{V}$ che renda vere sia $A \lor B$ che $\neg A$, ma falsa B. Analizziamo la formula $\neg A$: è una negazione nell'antecedente (*regola* ¬ *L*); per farla vera, basta fare falsa A.

5. Cerchiamo una falsificazione del sequente $A \lor B, \Rightarrow A, B$; cerchiamo una valutazione $\mathcal{V}$ che renda vere sia $A \lor B$ e false A, e B. Analizziamo la formula $A \lor B$: è una disgiunzione nell'antecedente (*regola* ∨ *L*); per farla vera, abbiamo due scelte, fare vera A o fare vera B.

In ogni caso la procedura fallisce: da un lato vorremmo fare A sia vera che falsa, dall'altro vorremmo fare B sia vera che falsa e queste sono scelte impossibili. Riassumiamo questa situazione dicendo che *tutte le foglie dell'albero sono chiuse*, cioè in ogni "sequente-foglia" troviamo qualche formula che compare sia nell'antecedente che nel succedente.

Se ora guardiamo all'albero ottenuto, lo possiamo pensare come una *deduzione* a partire da *assiomi* $A \Rightarrow A, B$ e $B \Rightarrow A, B$ secondo *regole di inferenza*, nell'ordine dall'alto in basso. L'inferenza 5 è una regola ∨ L, che introduce la formula $\mathbf{A} \lor \mathbf{B}$. L'inferenza 4 è una ¬ L, che introduce $\neg\mathbf{A}$. L'inferenza 3 è una ¬ L che introduce $\neg\mathbf{B}$. L'inferenza 2 è una ∧ L che introduce $\neg\mathbf{A} \land \neg\mathbf{B}$. Infine la 1 è una ¬ R che introduce $\neg(\neg\mathbf{A} \land \neg\mathbf{B})$. Si vede qui che il **calcolo dei sequenti** è un sistema di deduzione che ad ogni passo presenta le formule dedotte insieme al contesto deduttivo.

Inoltre possiamo dimostrare che *tutto l'albero consiste di sequenti validi*! Infatti le foglie sono *sequenti validi*: qualsiasi valutazione $\mathcal{V}$ rende A vera o A falsa; se $\mathcal{V}(A) = V$, allora $\mathcal{V}$ rende vera una formula nel succedente di $A \Rightarrow A, B$; se $\mathcal{V}(A) = F$ allora una formula nell'antecedente di $A \Rightarrow A, B$ è falsa. Questo vale per qualsiasi valutazione $\mathcal{V}$. Lo stesso ragionamento mostra che $B \Rightarrow A, B$ è valida.

Non è difficile mostrare direttamente che tutti i sequenti dell'albero sono validi. Ma può essere interessante vedere come la validità di ogni sequente conclusione si può ricavare a partire dal fatto che i sequenti-premessa sono validi.

Consideriamo il sequente $A \lor B \Rightarrow A, B$, che è la conclusione dell'inferenza 5: $\lor$ L, le cui premesse sono sequenti validi. Questo sequente è valido. Supponiamo di no, allora per qualche valutazione $\mathcal{V}$ abbiamo $\mathcal{V}(A \lor B) = V$, e quindi o vale $\mathcal{V}(A) = V$ o vale $\mathcal{V}(B) = V$. Nel primo caso applichiamo $\mathcal{V}$ al sequente assioma a sinistra $A \Rightarrow A, B$ ed otteniamo che la formula A nel succedente è vera; ma la stessa formula A si trova anche nel succedente del sequente conclusione che dunque è reso vero da $\mathcal{V}$. Nel secondo caso applichiamo $\mathcal{V}$ al sequente assoma a destra $B \Rightarrow A, B$ ed otteniamo che la formula B nel succedente è vera; e B compare anche nel succedente del sequente conclusione. Concludiamo che qualsiasi valutazione che renda vera la formula nell'antecedente di $A \lor B \Rightarrow A, B$ rende vera anche una formula nel succedente e questo dimostra che il sequente conclusione non è falsificabile, cioè è valido.

Lo stesso ragionamento si può ripetere per tutte le inferenze considerate. La ragione di questo è che le regole di inferenza sono state scelte in modo tale che *il sequente-conclusione di ogni regola è valido se e solo se i sequenti premessa sono validi* o in modo equivalente *il sequente conclusione è falsificabile se e solo se almeno uno dei sequenti-premessa è falsificabile.* (Si vedano le dispense, Proposizione 2.)

Esempio 2. Mostriamo che $p \lor q \Rightarrow p \land q$ è un sequente falsificabile (il che comporta che $p \lor q \not\models p \land q$). Un ragionamento fallace corrispondente è che *se mangio pizza o un sandwich allora mangio sia la pizza che il sandwich.*

$$1.\ \dfrac{2.\ \dfrac{\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{p} \qquad \overset{\mathcal{V}_1}{p \Rightarrow q}}{p \Rightarrow \mathbf{p} \land \mathbf{q}}\land \mathrm{R} \qquad 3.\ \dfrac{\overset{\mathcal{V}_2}{q \Rightarrow p} \qquad \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{q}}{q \Rightarrow \mathbf{p} \land \mathbf{q}}\land \mathrm{R}}{\mathbf{p} \lor \mathbf{q} \Rightarrow p \land q}\lor \mathrm{L}$$

1. Vogliamo costruire valutazioni che falsifichino il sequente conclusione $p \lor q \Rightarrow p \land q$ cioè che rendano $p \lor q$ vera e $p \land q$ falsa. Analizziamo $p \lor q$

nell'antecedente: è una disgiunzione (*regola* $\vee$ L): perché $p \vee q$ sia vera basta che p sia vera oppure che q sia vera (*due casi distinti*).

Caso 1: Vogliamo costruire una valutazione che renda $p \Rightarrow p \wedge q$ falsa, cioè p vera e $p \wedge q$ falsa. Analizziamo $p \wedge q$ (*regola* $\wedge$): perché questa formula sia falsa basta che sia falsa p o che sia falsa q. Il primo caso è impossibile ed abbiamo l'assioma $p \Rightarrow p$.

Il secondo caso è quello del sequente $p \Rightarrow q$: ma è ben possibile falsificare questo sequente. Assumiamo che p e q siano formula atomiche, e poniamo $\mathcal{V}_1$ una valutazione tale che $\mathcal{V}_1(p) = V$ e $\mathcal{V}_1(q) = F$.

Caso 2: Vogliamo costruire una valutazione che renda $q \Rightarrow p \wedge q$ falsa, cioè q vera e $p \wedge q$ falsa. Analizziamo $p \wedge q$ (*regola* $\wedge$): perché questa formula sia falsa basta che sia falsa p o che sia falsa q. Il secondo caso è impossibile ed abbiamo l'assioma $q \Rightarrow p$.

Il primo caso è quello del sequente $p \Rightarrow p$. Come prima, se p e q sono formula atomiche, allora sia $\mathcal{V}_2$ una valutazione tale che $\mathcal{V}_2(p) = F$ e $\mathcal{V}_2(q) = V$; questa valutazione falsifica $p \Rightarrow q$.

Abbiamo ottenuto due valutazioni $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$, corrispondenti a due "foglie" del nostro albero che sono *sequenti aperti*, cioè sequenti consistenti di atomi tali che tutti gli atomi nell'antecedente sono diversi da tutti gli atomi nel succedente. Questo fatto suggerisce immediatamente come costruire la valutazione.

Non è difficile verificare che una valutazione che falsifica una "foglia" falsifica anche tutti i sequenti che si trovano nel *ramo* che connette la foglia alla conclusione. Come sopra, questo fatto vale perché le regole sono definite in modo tale che *il sequente conclusione è falsificabile se e solo se almeno uno dei sequenti-premessa è falsificabile.*

1.1 Esercizi.

Esercizio 1. Dimostrare applicando la procedura semantic tableaux che in ciascuna linea le formule sono semanticamente equivalenti:

(c)	$\neg(A \vee B)$;	$(\neg A \wedge \neg B)$.	(*De Morgan*)
(d)	$\neg(A \wedge B)$;	$(\neg A \vee \neg B)$.	(*De Morgan*)
(e)	$(A \vee B)$;	$(\neg A \rightarrow B)$;	
(g)	$(A \rightarrow B)$;	$\neg(A \wedge \neg B)$;	

(g') $A \to B$; $(\neg B \to \neg A)$.

(h) $(A \to \neg B)$; $(B \to \neg A)$. (*contrapposizione*)

(m) $((A \vee B) \to C)$; $((A \to C) \wedge (B \to C))$.

(n) $(A \to (B \wedge C))$; $((A \to B) \wedge (A \to C))$.

(o) $(A \to (B \to C))$; $((A \wedge B) \to C)$.

Esercizio 2. Verificare se i seguenti sequenti sono falsificabili:

(a) $(A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow (C \vee (B \wedge A))$.

(b) $(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow (C \vee (B \wedge A))$.

(d) $(A \to (B \vee C)) \Rightarrow ((A \to B) \vee C)$.

(f) $((A \to B) \to A) \Rightarrow A$.