Logica dei Predicati: Semantica e Dimostrazioni

Gianluigi Bellin

November 8, 2012

1. Sintassi del calcolo dei predicati.

Sintassi. Un linguaggio del calcolo dei predicati $\mathcal{L} = (\mathbf{Pred}, \mathbf{Const})$ consiste di

(1) un insieme di lettere predicative **Pred** $= \{P_1^{n_1}, \ldots, P_m^{n_m}\}$, dove $P_i^{n_i}$ è un simbolo di predicato n_i-*ario* (una espressione "non-saturata", con n_i "buchi");

(2) un insieme di simboli di costante **Const** $= \{c_1, \ldots, c_h\}$

(3) un insieme infinito di variabili **Var**: $\{v_0, v_1, \ldots v_i, \ldots\}$ denotate con x, y, x_i.

Termini. I *termini* del linguaggio sono definiti dalla grammatica

$$\boxed{t \ := \ x \mid c}$$

Dunque un termine è una costante c (*termine chiuso*) o una variabile x (*variabile libera*).

Formule. Le *formule* del linguaggio sono definite dalla grammatica

$$\boxed{\begin{array}{rcl} A, B & := & P^n(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \\ & & \mid A \vee B \mid A \rightarrow B \mid \forall x.A \mid \exists x.A \end{array}}$$

Varianti. Se z è una variabile che non compare in $A(x)$ e $A(z)$ risulta da $A(x)$ sostituendo dovunque x con z, allora le formule $\forall x.A(x)$ e $\forall z.A(z)$ [oppure $\exists x.A(x)$ e $\exists z.A(z)$] sono *varianti* una dell'altra ed hanno lo stesso significato.

L'operazione di sostituzione di un termine t per x si denota con $A[t/x]$; nell'effettuare una sostituzione se t è una variabile y bisogna fare attenzione che non vi siano quantificatori $\forall y$ o $\exists y$ in A che possano "catturare" la variabile y quando è sostituita per x.

Se una sottoformula B di A inizia con un tale quantificatore Qy si sostituisce B con una variante, che inizia con il quantificatore Qz dove z non compare in A.

2. Semantica.

Una *interpretazione* $\mathcal{M}$ del linguaggio $\mathcal{L}$ consiste di un dominio non vuoto D e di una assegnazione $(\ )_{\mathcal{M}}$

• assegniamo ad ogni simbolo di predicato n-ario P^n in **Pred** una relazione n-aria $P^n_{\mathcal{M}}$
[dati $d_1, \ldots, d_n \in D$, $P^n_{\mathcal{M}}(d_1, \ldots, d_n) =$ **vero** o **falso**;]

• ad ogni simbolo di costante c in **Const** un elemento $c_{\mathcal{M}} \in D$.

Come interpretiamo le *formule atomiche*? Se $P(c_1, \ldots, c_n)$ è una formula chiusa, possiamo dire che

• $P(c_1, \ldots, c_n)$ è vera in $\mathcal{M}$, in simboli, $\mathcal{M} \models P(c_1, \ldots, c_n)$ se e solo se $P_{\mathcal{M}}(c_{1\mathcal{M}}, \ldots, C_{n\mathcal{M}}) =$ **vero** [cioè quando gli elementi che interpretano $c_1, \ldots, c_n$ appartengono alla relazione che interpreta P].

Ma se $P(x)$ contiene x libera, una interpretazione non basta per interpretare $P(x)$ perché non sappiamo a quale elemento di D possa riferirsi la variabile x.

Se $\sigma : \mathbf{Var} \rightarrow D$ è una assegnazione di elementi di D alle variabili, allora diciamo che *una interpretazione* $\mathcal{M}$ *insieme ad una assegnazione* σ *soddisfa* $P(x_1, \ldots, x_n)$ quando $P_{\mathcal{M}}(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = \mathbf{vero}$. in questo caso scriviamo $\mathcal{M}, \sigma \models P$.

Data una interpretazione $\mathcal{M}$ ed una assegnazione σ definiamo *soddisfacibilità* cosí:

1. $\mathcal{M}, \sigma \models P(c_1, \ldots, c_n, x_1, \ldots, x_n)$ se e solo se $P_{\mathcal{M}}(c_{1\mathcal{M}}, \ldots, c_{n\mathcal{M}}, \sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_m)) = \mathbf{vero}$;

2. $\mathcal{M}, \sigma \models (\neg A)$ se e solo se **non** $\mathcal{M}, \sigma \models A$;

3. $\mathcal{M}, \sigma \models (A \wedge B)$ se e solo se $\mathcal{M}.\sigma \models A$ **e** $\mathcal{M}, \sigma \models B$;

4. $\mathcal{M}, \sigma \models (A \vee B)$ se e solo se $\mathcal{M} \models, \sigma A$ **oppure** $\mathcal{M}, \sigma \models B$ (e similmente per l'implicazione);

5. $\mathcal{M}, \sigma \models (\exists x.A(x))$ se e solo se **esiste** un $d \in D$ tale che per l'assegnazione σ' che assegna $\sigma'(x) = d$ e coincide con σ sulle altre variabili vale $\mathcal{M}, \sigma' \models A(x)$;

6. $\mathcal{M} \models, \sigma(\forall x.A(x))$ se e solo se **per ogni** $d \in D$, per l'assegnazione σ' che assegna $\sigma'(x) = d$ e coincide con σ sulle altre variabili vale $\mathcal{M}, \sigma' \models A(x)$.

Una formula A si dice **soddisfacibile** [**falsificabile**] se esiste una interpretazione $\mathcal{M}$ ed una assegnazione σ tale che $\mathcal{M}, \sigma \models A$ [$\mathcal{M}, \sigma \not\models A$].

A è **valida** [**contraddittoria**] se per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ ed ogni assegnazione σ vale $\mathcal{M}, \sigma \models A$ [$\mathcal{M}, \sigma \not\models A$].

3. Esempio. Formalizziamo le seguenti proposizioni.

Ci serve un linguaggio $\mathcal{L} = (M^1, A^2, c, g, r)$ un predicato $M(x) =$ *x è un Montecchi*, un predicato $A(x,y) =$ *x ama y*, tre nomi, $c =$ *Capuleti padre*, $g =$ *Giulietta*, $r =$ *Romeo*.

1. *Nessuno dei Montecchi è amato da Capuleti.*

$$\forall x. M(x) \to \neg A(c,x)$$

2. *Capuleti ama tutti coloro che sono amati da Giulietta.*

$$\forall y. (A(g,y) \to A(c,y))$$

3. *Giulietta ama Romeo.*

$$A(g,r)$$

4. *Romeo è un Montecchi.*

$$M(r).$$

Dimostriamo che da (1) - (4) segue una contraddizione:

$$\dfrac{\dfrac{M(r) \qquad \dfrac{\forall x. M(x) \to \neg A(c,x)}{M(r) \to \neg A(c,r)}}{\neg A(c,r)} \qquad \dfrac{A(g,r) \qquad \dfrac{\forall y. (A(g,y) \to A(c,y))}{(A(g,r) \to A(c,r))}}{A(c,r)}}{\text{contraddizione!}}$$

Consideriamo le seguenti proposizioni (1+), (2)-(4)

1+. *Qualcuno dei Montecchi non è amato da Capuleti.*

$$\exists x.M(x) \wedge \neg A(c,x)$$

2. *Capuleti ama tutti coloro che sono amati da Giulietta.*

$$\forall y.(A(g,y) \to A(c,y))$$

3. *Giulietta ama Romeo.*

$$A(g,r)$$

4. *Romeo è un Montecchi.*

$$M(r).$$

Costruiamo una interpretazione che le rende vere:

$\mathcal{M} = (D, M_{\mathcal{M}}, A_{\mathcal{M}},\ c_{\mathcal{M}}, g_{\mathcal{M}}, r_{\mathcal{M}})$

dove $D = \{\mathtt{c1}, \mathtt{c2}, \mathtt{m1}, \mathtt{m2}\}$,

$M_{\mathcal{M}} = \{\mathtt{m1}, \mathtt{m2}\}$, $A_{\mathcal{M}} = \{\langle \mathtt{c2}, \mathtt{m1}\rangle, \langle \mathtt{c1}, \mathtt{m1}\rangle\}$,

$c_{\mathcal{M}} = \mathtt{c1}, g_{\mathcal{M}} = \mathtt{c2}, r_{\mathcal{M}} = \mathtt{m1}$.

1+ vera perché $M_{\mathcal{M}}(m2) \wedge \neg A_{\mathcal{M}}(\mathtt{c1}, \mathtt{m2})$ è **vera**;

2. è vera perché $A_{\mathcal{M}}(\mathtt{c2}, \mathtt{m1}) \to A_{\mathcal{M}}(\mathtt{c1}, \mathtt{m1}) = \mathbf{vero}$ perchè $A(\mathtt{c1}, \mathtt{m1}) = \mathbf{vero}$ [il caso di Romeo!]; in tutti gli altri casi $\mathtt{d} \in D, \mathtt{d} \neq \mathtt{m1}$ abbiamo $A_{\mathcal{M}}(\mathtt{c2}, \mathtt{d}) \to A_{\mathcal{M}}(\mathtt{c1}, \mathtt{d}) = \mathbf{vero}$ perché $A_{\mathcal{M}}(\mathtt{c2}, \mathtt{d}) = \mathbf{falso}$.;

3. $A_{\mathcal{M}}(\mathtt{c2}, \mathtt{r1}) = \mathbf{vero}$ e **4.** $M_{\mathcal{M}}(\mathtt{m1}) = \mathbf{vero}$.

Aiutarsi con un grafico!