Logica Computazionale 2009 - Compito 3

Gianluigi Bellin

November 12, 2009

Assegnato il 12 novembre 2009 – da ritornare entro il 19 novembre

Esercizio 1. (a) Considera il sequente

$$(A^{\perp} \otimes B^{\perp}) \wp C^{\perp}, (C \otimes B) \wp A \tag{1}$$

Costruisci la *struttura di prova* $\mathcal{R}$ ottenuta come segue:

- construsci gli alberi delle sottoformule delle due formule in (1);
- chiudi le foglie con gli assiomi $\overline{A^{\perp}, A}$, $\overline{B^{\perp}, B}$, $\overline{C^{\perp}, C}$ nell'unico modo possibile.

Verifica se $\mathcal{R}$ è una struttura di prova in $\mathbf{MLL}^{-}$, applicando il criterio di Danos-Regnier:

> *per ogni posizione s degli interrutori il D-R-grafo $s\mathcal{R}$ è aciclico e connesso.*

Suggerimento: disegna i quattro D-R-grafi.

1 punto

(b) Se $\mathcal{R}$ è una rete di prova per $\mathbf{MLL}^{-}$, costruisci due distinte derivazioni d_1 e d_2 nel calcolo dei sequenti per $\mathbf{MLL}^{-}$ tali che $(d_1)^{-} = \mathcal{R} = (d_2)^{-}$.

1 punto

(c) Considera il sequente

$$\Rightarrow (A^{\perp} \wp B^{\perp}) \otimes C^{\perp}, (C \otimes B) \wp A \tag{2}$$

Costruisci la *struttura di prova* $\mathcal{R}'$ ottenuta come in (a). Verifica se $\mathcal{R}'$ è una struttura di prova in $\mathbf{MLL}^{-}$ o in $\mathbf{MLL}^{-}$ + Mix, applicando i criteri di Danos-Regnier:

Per MLL$^-$: *per ogni posizione s degli interrutori il D-R-grafo $s\mathcal{R}$ è aciclico e connesso.*

Per MLL$^-$ + Mix: *per ogni posizione s degli interrutori il D-R-grafo $s\mathcal{R}$ è aciclico.*

Suggerimento: disegna i quattro D-R-grafi e verifica le definizioni.

1 punto

(d) Considera il sequente

$$\Rightarrow (A^\perp \wp B^\perp) \otimes C^\perp, (C \wp B) \wp A \tag{3}$$

Costruisci la *struttura di prova* $\mathcal{R}''$ ottenuta come in (b). Verifica se $\mathcal{R}''$ è una struttura di prova in **MLL**$^-$ o in **MLL**$^-$ + Mix, applicando i criteri di Danos-Regnier come in (b).

1 punto

(e) Se $\mathcal{R}''$ è una rete di prova per **MLL**$^-$ o per **MLL**$^-$ + Mix, costruisci due distinte derivazioni d_1 e d_2 nel calcolo dei sequenti tali che $(d_1)^- = \mathcal{R} = (d_2)^-$.

1 punto

Esercizio 2. Considera la seguente derivazione d_0 nel calcolo dei sequenti per **MLL**$^-$ + Mix + Weakening (*Logica Affine*).

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{\Rightarrow p^\perp, \mathbf{p} \qquad \Rightarrow p, \mathbf{p}^\perp}{\Rightarrow p^\perp, p, \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}^\perp}\,\otimes
      }{\Rightarrow p^\perp, p, p \otimes p^\perp, \mathbf{A}}\,\mathrm{W}
    }{\Rightarrow p^\perp, p, (\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}^\perp) \wp \mathbf{A}}\,\wp
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{\Rightarrow p^\perp, p}{\Rightarrow p^\perp \wp p}\,\wp \qquad \Rightarrow A^\perp, A
    }{\Rightarrow (\mathbf{p}^\perp \wp \mathbf{p}) \otimes \mathbf{A}^\perp, A}\,\otimes
  }{\Rightarrow p^\perp, p, A}\,\text{cut 1}
  \qquad
  \dfrac{\Rightarrow q^\perp, q}{\Rightarrow q^\perp \wp q}\,\wp
}{\Rightarrow p^\perp, p, \mathbf{A} \otimes (\mathbf{q}^\perp \wp \mathbf{q})}\,\otimes
\qquad
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\Rightarrow \mathbf{q}, q^\perp \qquad \Rightarrow \mathbf{q}^\perp, q}{\Rightarrow \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^\perp, q^\perp, q}\,\otimes
  }{\Rightarrow \mathbf{A}^\perp, q \otimes q^\perp, q^\perp, q}\,\mathrm{W}
}{\Rightarrow \mathbf{A}^\perp \wp (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^\perp), q^\perp, q}\,\wp
$$

$$
\dfrac{\Rightarrow p^\perp, p, \mathbf{A} \otimes (\mathbf{q}^\perp \wp \mathbf{q}) \qquad \Rightarrow \mathbf{A}^\perp \wp (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^\perp), q^\perp, q}{\Rightarrow p^\perp, p, q^\perp, q}\,\text{cut 2}
$$

(a) Definisci una *struttura di prova* $\mathcal{R}_0$ per *Logica Affine* tale che $(d_0)^- = \mathcal{R}_0$. *Suggerimento:* Se una formula A è introdotta per Weakening, la sottoformula A nella struttura di prova è lasciata aperta. In una struttura di prova introduciamo nodi *cut* che hanno le due formule tagliate come premesse e conclusione non etichettata (alternatiamente si puo‘ etichettare con un simbolo non-logico *cut*); i nodi cut si comportano esattamente come i nodi $\times$.

1 punto

Definizione 1. Data una struttura di prova $\mathcal{R}_0$ per la logica affine, l'algoritmo di *eliminazione dell'irrilevanza* (garbage collection) è definito come segue:

1. se una foglia in una rete di prova è aperta, allora è *irrilevante*;
2. se una premessa di un nodo $\otimes$ o *cut* è *irrilevante*, allora anche la conclusione è *irrilevante*;
3. se entrambe le premesse di un nodo $\wp$ sono *irrilevanti* allora anche la conclusione è *irrilevante*;
4. se la conclusione di un nodo qualsiasi ($\otimes$ o $\wp$ o *cut*) è *irrilevante* allora anche le premesse sono *irrilevanti*.

Definizione 2. Una struttura $\mathcal{R}_0$ è una *rete di prova* per la *logica affine* se soddisfa la seguente condizione:

> *Sia $\mathcal{R}_0^*$ ciò che resta di $\mathcal{R}_0$ dopo l'eliminazione dell'irrilevanza. Per ogni posizione degli interrutori s in $\mathcal{R}_0^*$ il D-R-grafo per $s(\mathcal{R}_0^*)$ è* aciclico.

(vedi G.Bellin *Two paradigms of logical computation in Affine Logic?*, `http://profs.sci.univr.it/ bellin/papers.html`)

Nella familiare procedura di *eliminazione del cut*, se in un *cut* la formula tagliata non è atomica, allora quel *cut* è sostituito da *due cut* in cui sono tagliate formule di complessità logica minore. Questa procedura si applica anche alle *strutture di prova* per la logica affine.
(b) Ci sono due *cut* in $\mathcal{R}_0$, diciamo *cut 1* e *cut 2*. Applica la procedura di eliminazione del taglio nel modo seguente.

- Elimina *cut 1* in $\mathcal{R}_0$; sia $\mathcal{R}_1$ il risultato;
- elimina *cut 2* in $\mathcal{R}_1$; sia $\mathcal{R}_{1,2}$ il risultato.
- Elimina *cut 2* in $\mathcal{R}_0$; sia $\mathcal{R}_2$ il risultato;
- elimina *cut 1* in $\mathcal{R}_1$; sia $\mathcal{R}_{2,1}$ il risultato.

Verifica: le *strutture di prova* $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_{1,2}$ e $\mathcal{R}_{2,1}$ sono *reti di prova* per la logica affine secondo la definizione 2.

1 punto

(c) Scrivi le reti di prova $\mathcal{R}_1^*$, $\mathcal{R}_2^*$, $\mathcal{R}_{1,2}^*$ e $\mathcal{R}_{2,1}$ ottenute eliminando l'irrilevanza da $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_{1,2}$ e $\mathcal{R}_{2,1}$, rispettivamente.

1 punto

Esercizio 3. (a) Trova una derivazione d nel calcolo dei sequenti intuizionistico **LJ** del sequente

$$D \to A, A \to (B \to C), A \to B \Rightarrow D \to C$$

Costruisci per induzione sulla lunghezza di d una deduzione naturale di $D \to C$ da $D \to A, A \to (B \to C), A \to B$.

1 punto

(b) Trova una derivazione d nella deduzione naturale intuizionistica **NJ** di $A \to D$ da $A \to B$, $B \to C$ e $C \to D$. Costruisci una derivazione in **LJ** di

$$A \to B, B \to C, C \to D \Rightarrow A \to D$$

per induzione sulla lunghezza della derivazione d, *cominciando dalle assunzioni del ramo di Prawitz di alteza minore.*

1 punto