Logica computazionale
(Laurea Specialistica)
Assegnamento 4

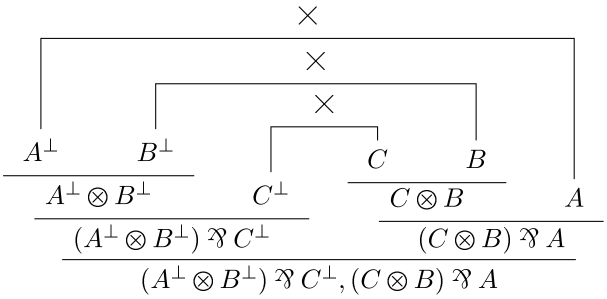
Giovanni Lovato

`VR077231`

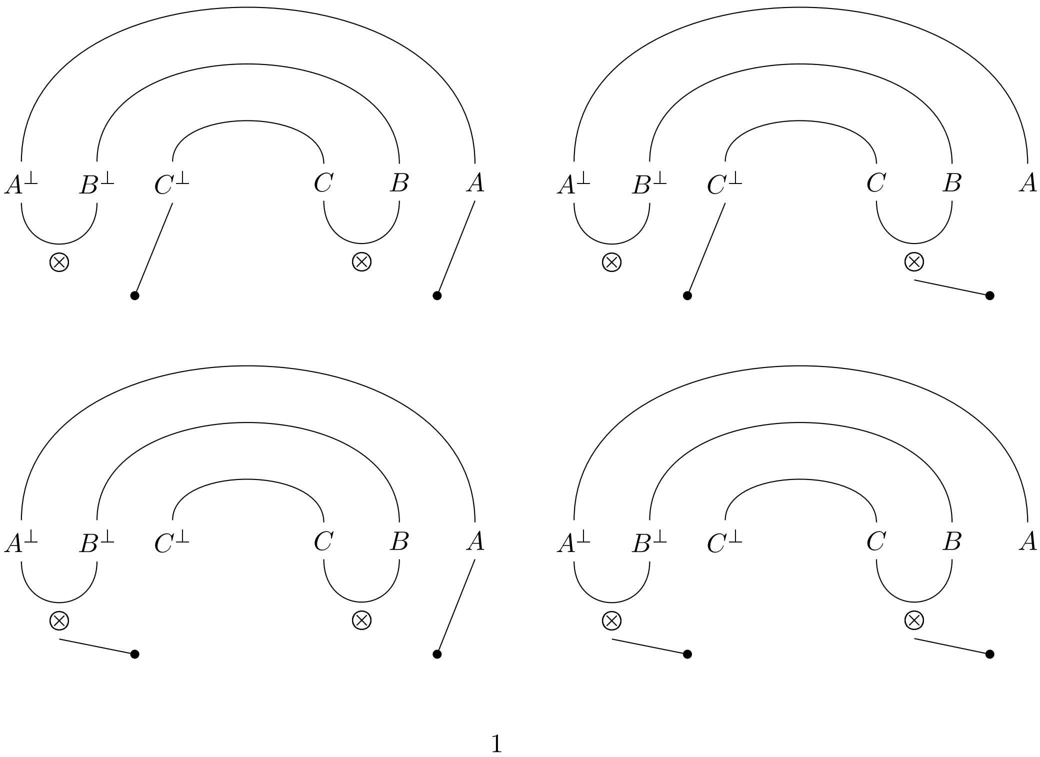
19 novembre 2009

Esercizio 1

(a) Costruisco la struttura di prova $\mathcal{R}$ per il sequente $(A^{\perp} \otimes B^{\perp}) \parr C^{\perp}, (C \otimes B) \parr A$



Verifico se $\mathcal{R}$ è una struttura di prova in $\mathbf{MLL}^{-}$ disegnando i quattro D-R grafi:



Tutti e quattro i grafi sono *aciclici* e *connessi*, quindi $\mathcal{R}$ è una struttura di prova in $\mathbf{MLL}^-$.

(b) Costruisco due derivazioni d_1 e d_2 nel calcolo dei sequenti per $\mathbf{MLL}^-$ tali che $(d_1)^- = \mathcal{R} = (d_2)^-$:

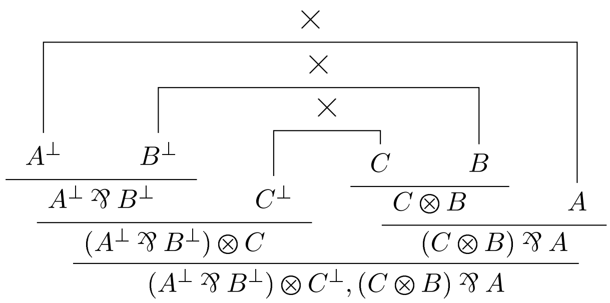
- derivazione d_1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Rightarrow A, A^\perp \qquad \dfrac{\dfrac{\Rightarrow C^\perp, C \qquad \Rightarrow B, B^\perp}{\Rightarrow C^\perp, C \otimes B, B^\perp}\otimes}{\Rightarrow B^\perp, C^\perp, C \otimes B}\text{Ex}}{\Rightarrow A^\perp \otimes B^\perp, C^\perp, C \otimes B, A}\otimes}{\Rightarrow (A^\perp \otimes B^\perp) \parr C^\perp, C \otimes B, A}\parr}{\Rightarrow (A^\perp \otimes B^\perp) \parr C^\perp, (C \otimes B) \parr A}\parr$$

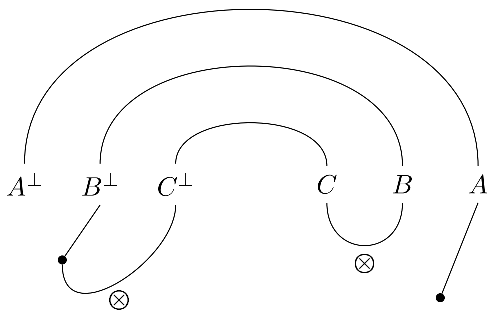
- derivazione d_2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Rightarrow C^\perp, C \qquad \dfrac{\dfrac{\Rightarrow A, A^\perp \qquad \Rightarrow B^\perp, B}{\Rightarrow A, A^\perp \otimes B^\perp, B}\otimes}{\Rightarrow B, A^\perp \otimes B^\perp, A}\text{Ex}}{\Rightarrow C^\perp, C \otimes B, A^\perp \otimes B^\perp, A}\otimes}{\Rightarrow A^\perp \otimes B^\perp, C^\perp, C \otimes B, A}\text{Ex}}{\Rightarrow (A^\perp \otimes B^\perp) \parr C^\perp, C \otimes B, A}\parr}{\Rightarrow (A^\perp \otimes B^\perp) \parr C^\perp, (C \otimes B) \parr A}\parr$$

(c) Costruisco la struttura di prova $\mathcal{R}'$ per il sequente $(A^\perp \parr B^\perp) \otimes C^\perp, (C \otimes B) \parr A$

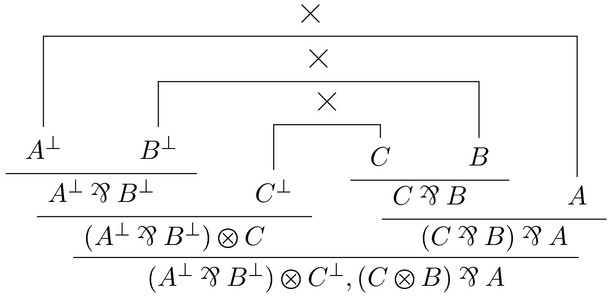


Verifico se $\mathcal{R}'$ è una struttura di prova in $\mathbf{MLL}^-$ e in $\mathbf{MLL}^-$ + Mix. Disegno i D-R grafi:

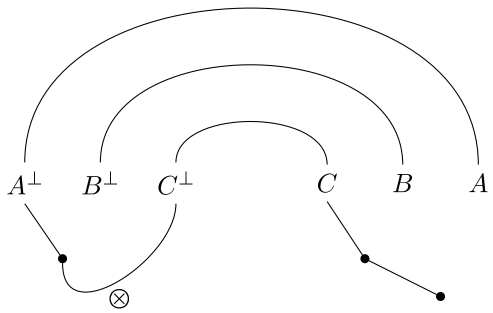


Il grafo *non* è aciclico, pertanto $\mathcal{R}'$ non è una struttura di prova né in $\mathbf{MLL}^-$ né in $\mathbf{MLL}^-$ + Mix.

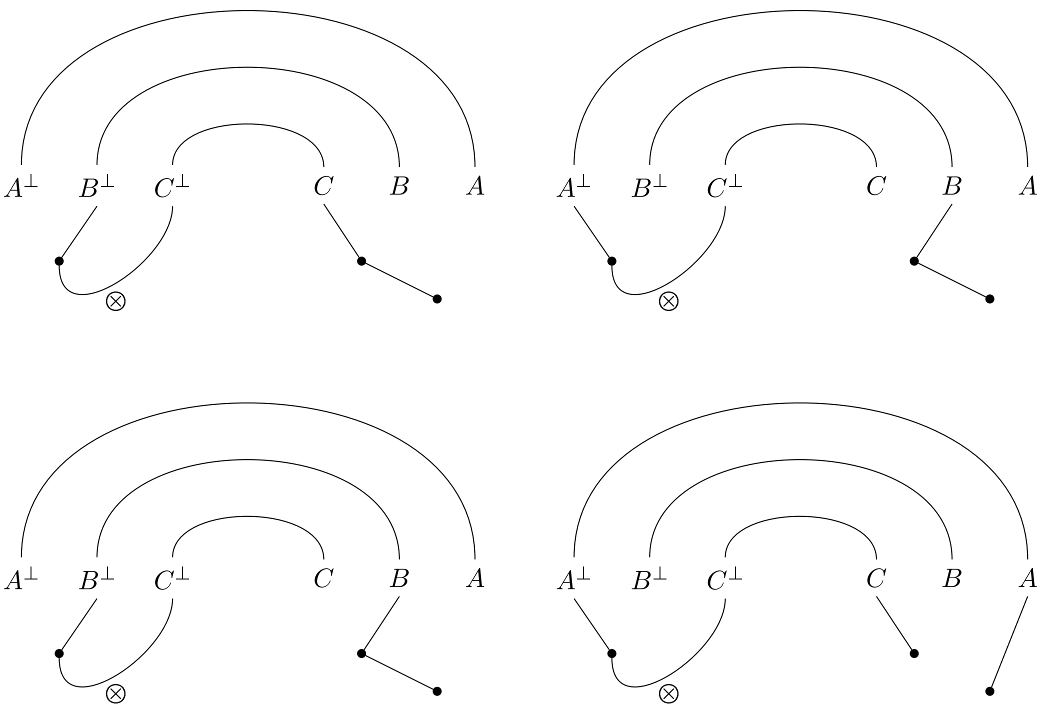
(d) Costruisco la struttura di prova $\mathcal{R}''$ per il sequente $(A^\perp \parr B^\perp) \otimes C^\perp, (C \parr B) \parr A$

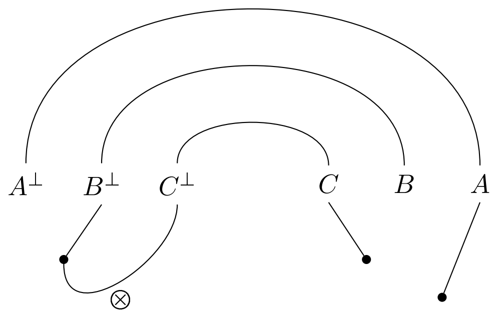


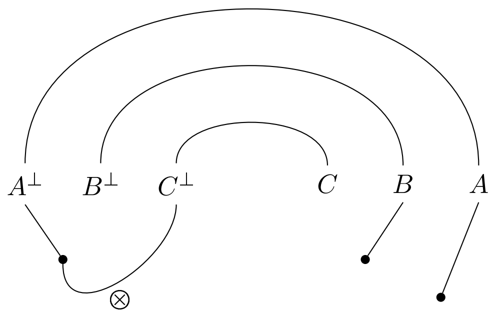
Verifico se $\mathcal{R}''$ è una struttura di prova in $\mathbf{MLL}^-$ e in $\mathbf{MLL}^-$ + Mix. Disegno i D-R grafi:

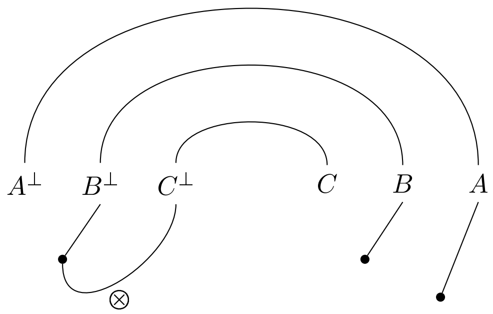


In grafo è aciclico ma *non* è connesso. $\mathcal{R}''$ non è una struttura di prova in $\mathbf{MLL}^-$. Verifico se è una struttura di prova in $\mathbf{MLL}^-$ + Mix:









Tutti i grafi sono aciclici. Segue che $\mathcal{R}''$ è una struttura di prova per $\mathbf{MLL}^-$ + Mix.

(e) Costruisco due derivazioni d_3 e d_4 nel calcolo dei sequenti per $\mathbf{MLL}^-$ tali che $(d_3)^- = \mathcal{R}'' = (d_4)^-$:

- derivazione d_3

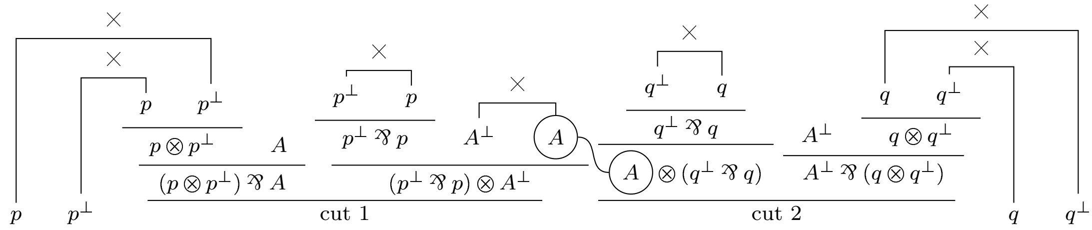
$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Rightarrow A, A^\perp$}
\AxiomC{$\Rightarrow B, B^\perp$}
\RightLabel{Mix}
\BinaryInfC{$\Rightarrow A, A^\perp, B, B^\perp$}
\RightLabel{Ex}
\UnaryInfC{$\Rightarrow B, A, A^\perp, B^\perp$}
\RightLabel{$\parr$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow B, A, A^\perp \parr B^\perp$}
\AxiomC{$\Rightarrow C^\perp, C$}
\RightLabel{$\otimes$}
\BinaryInfC{$\Rightarrow B, A, (A^\perp \parr B^\perp) \otimes C, C$}
\RightLabel{Ex}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (A^\perp \parr B^\perp) \otimes C, C, B, A$}
\RightLabel{$\parr$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (A^\perp \parr B^\perp) \otimes C^\perp, C \parr B, A$}
\RightLabel{$\parr$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (A^\perp \parr B^\perp) \otimes C^\perp, (C \parr B) \parr A$}
\end{prooftree}
$$

- derivazione d_4

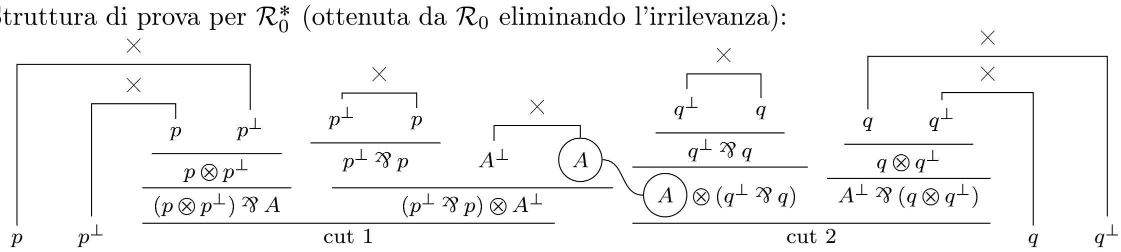
$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Rightarrow B, B^\perp$}
\AxiomC{$\Rightarrow A, A^\perp$}
\RightLabel{Mix}
\BinaryInfC{$\Rightarrow B, B^\perp, A, A^\perp$}
\RightLabel{Ex}
\UnaryInfC{$\Rightarrow B, A, A^\perp, B^\perp$}
\RightLabel{$\parr$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow B, A, A^\perp \parr B^\perp$}
\AxiomC{$\Rightarrow C^\perp, C$}
\RightLabel{$\otimes$}
\BinaryInfC{$\Rightarrow B, A, (A^\perp \parr B^\perp) \otimes C, C$}
\RightLabel{Ex}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (A^\perp \parr B^\perp) \otimes C, C, B, A$}
\RightLabel{$\parr$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (A^\perp \parr B^\perp) \otimes C^\perp, C \parr B, A$}
\RightLabel{$\parr$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (A^\perp \parr B^\perp) \otimes C^\perp, (C \parr B) \parr A$}
\end{prooftree}
$$

Esercizio 2

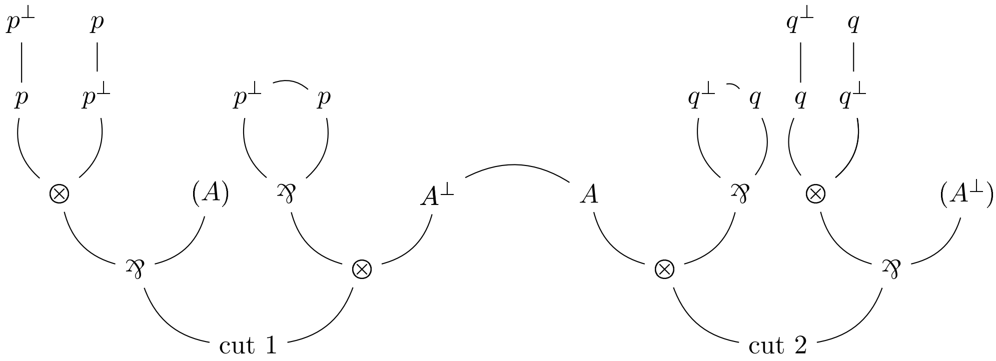
(a) Struttura di prova $\mathcal{R}_0$ per *Logica Affine*:



Struttura di prova per $\mathcal{R}_0^*$ (ottenuta da $\mathcal{R}_0$ eliminando l'irrilevanza):



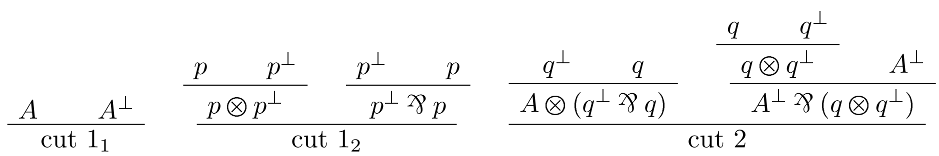
Rete di prova per $\mathcal{R}_0^*$:



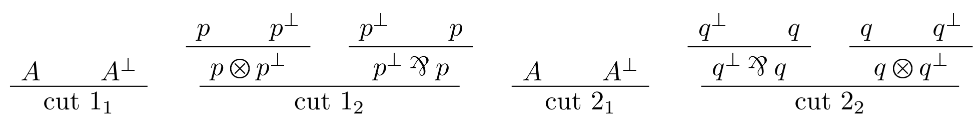
Per ogni posizione degli interruttori il D-R grafo risulta aciclico quindi $\mathcal{R}_0^*$ è una rete di prova per la logica affine.

(b) Eliminazione del taglio:

- $\mathcal{R}_1$ (elimino *cut 1* in $\mathcal{R}_0$)



- $\mathcal{R}_{1,2}$ (elimino *cut 2* in $\mathcal{R}_1$)



- $\mathcal{R}_2$ (elimino *cut 2* in $\mathcal{R}_0$)

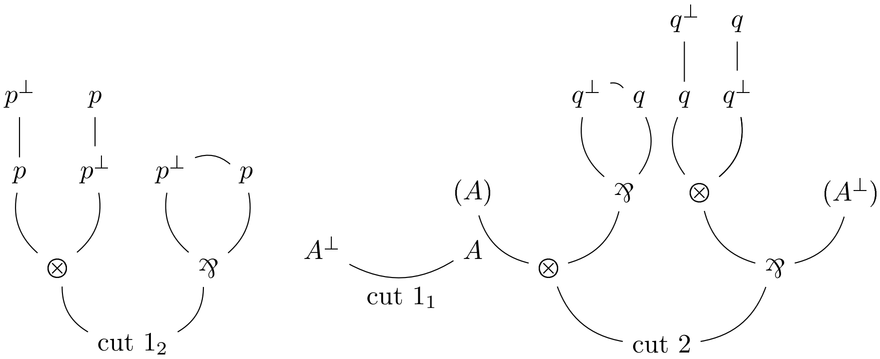
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \qquad p^\perp}{p \otimes p^\perp} \qquad A}{(p \otimes p^\perp) \parr A} \qquad \dfrac{\dfrac{p^\perp \qquad p}{p^\perp \parr p} \qquad A^\perp \qquad A}{(p^\perp \parr p) \otimes A}}{\text{cut } 1} \qquad \dfrac{A \qquad A^\perp}{\text{cut } 2_1} \qquad \dfrac{\dfrac{q^\perp \qquad q}{q^\perp \parr q} \qquad \dfrac{q \qquad q^\perp}{q \otimes q^\perp}}{\text{cut } 2_2}$$

- $\mathcal{R}_{2,1}$ (elimino *cut 1* in $\mathcal{R}_2$)

$$\dfrac{A \qquad A^\perp}{\text{cut } 1_1} \qquad \dfrac{\dfrac{p \qquad p^\perp}{p \otimes p^\perp} \qquad \dfrac{p^\perp \qquad p}{p^\perp \parr p}}{\text{cut } 1_2} \qquad \dfrac{A \qquad A^\perp}{\text{cut } 2_1} \qquad \dfrac{\dfrac{q^\perp \qquad q}{q^\perp \parr q} \qquad \dfrac{q \qquad q^\perp}{q \otimes q^\perp}}{\text{cut } 2_2}$$

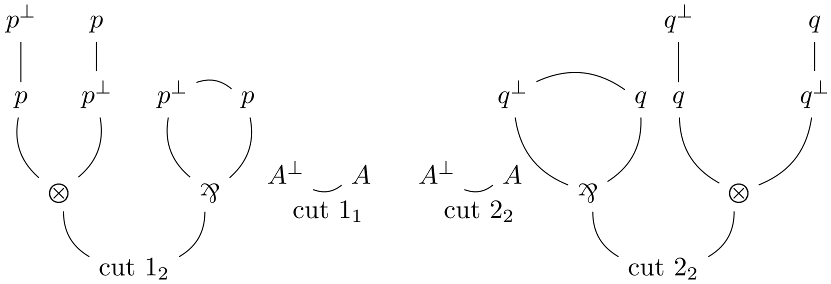
(c) Reti di prova $\mathcal{R}_1^*$, $\mathcal{R}_2^*$, $\mathcal{R}_{1,2}^*$, $\mathcal{R}_{2,1}^*$ sono reti di prova per la logica affine:

- rete di prova per $\mathcal{R}_1^*$



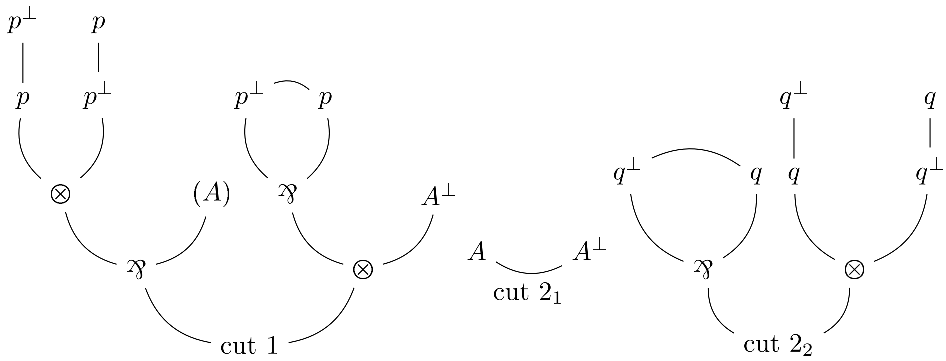
  $\mathcal{R}_1^*$ è aciclico, quindi $\mathcal{R}_1$ è una rete di prova per la logica affine.

- rete di prova per $\mathcal{R}_{1,2}^*$



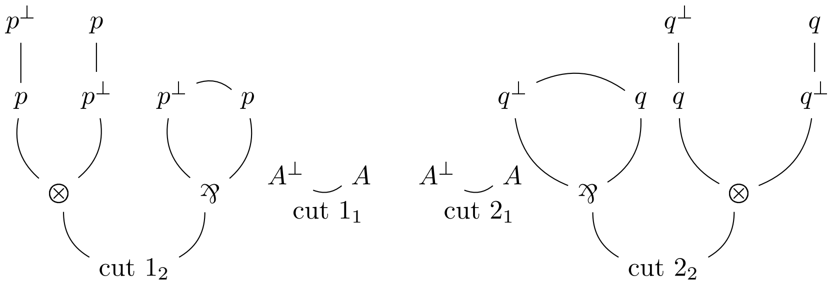
  $\mathcal{R}_{1,2}^*$ è aciclico, quindi $\mathcal{R}_{1,2}$ è una rete di prova per la logica affine.

- rete di prova per $\mathcal{R}_2^*$



$\mathcal{R}_2^*$ è aciclico e $\mathcal{R}_2$ è una rete di prova per la logica affine.

- rete di prova per $\mathcal{R}_{2,1}^*$



$\mathcal{R}_{2,1}^*$ è aciclico, quindi $\mathcal{R}_{2,1}$ è una rete di prova in logica affine.

Esercizio 3

Dato il sequente $D \to A, A \to (B \to C), A \to B \Rightarrow D \to C$,

(a) trovo una derivazione d_1 in **LJ**:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$B \Rightarrow B$}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$\to$-L}
\BinaryInfC{$A, A \to B \Rightarrow B$}
\AxiomC{$C \Rightarrow C$}
\RightLabel{$\to$-L}
\BinaryInfC{$A, B \to C, A \to B \Rightarrow C$}
\RightLabel{contrazione}
\UnaryInfC{$A, A, B \to C, A \to B \Rightarrow C$}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$\to$-L}
\BinaryInfC{$A, A \to (B \to C), A \to B \Rightarrow C$}
\AxiomC{$D \Rightarrow D$}
\RightLabel{$\to$-L}
\BinaryInfC{$D \to A, A \to (B \to C), A \to B, D \Rightarrow C$}
\RightLabel{$\to$-R}
\UnaryInfC{$D \to A, A \to (B \to C), A \to B \Rightarrow D \to C$}
\end{prooftree}
$$

costruisco una deduzione naturale di $D \to C$ da $D \to A, A \to (B \to C), A \to B$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \to (B \to C)$}
\AxiomC{$D \to A$}
\AxiomC{$[D]$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{$B \to C$}
\AxiomC{$A \to B$}
\AxiomC{$D \to A$}
\AxiomC{$[D]$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{B}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{C}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$D \to C$}
\end{prooftree}
$$

(b) trovo una derivazione d_2 nella deduzione naturale intuizionistica **NJ** di $A \to D$ da $A \to B, B \to C, C \to D$:

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to B \qquad [A]}{B}\ \to\text{-E} \qquad B \to C}{C}\ \to\text{-E} \qquad C \to D}{D}\ \to\text{-E}}{A \to D}\ \to\text{-I}
$$

costruisco una derivazione in **LJ** di

$$A \to V, B \to C, C \to D \Rightarrow A \to D$$

per induzione sulla lunghezza della derivazione d_2, cominciando dalle assuzioni del ramo di Prawitz di altezza minore:

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow B}{A \to B, A \Rightarrow B}\ \to\text{-L} \qquad C \Rightarrow C}{A \to B, B \to C, A \Rightarrow C}\ \to\text{-L} \qquad D \Rightarrow D}{A \to B, B \to C, C \to D, A \Rightarrow D}\ \to\text{-L}}{A \to B, B \to C, C \to D \Rightarrow A \to D}\ \to\text{-R}
$$