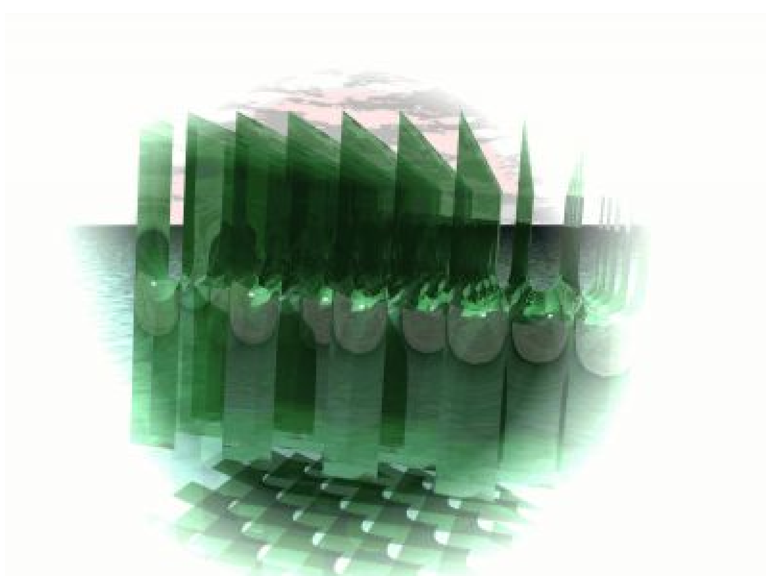
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Università della Basilicata
C.da Macchia Romana- 85100 POTENZA.

Sisto Baldo

Raccolta degli Scritti d'Esame assegnati nei Corsi di Laurea di Informatica, Matematica, Chimica

(Anni Accademici 1999-2000, 2000-2001 e 2001-2002)



Prove di Analisi Matematica I del
CORSO DI DIPLOMA UNIVERSITARIO IN INFORMATICA
(Anno Accademico 2000-2001)
e di
Analisi Matematica I e II del
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
(Anno Accademico 2001-2002)

19 dicembre 2000

I Prova di Esonero di Analisi Matematica I per Informatica: parte teorica.

1. Se una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è continua in un punto x_0, allora

- f è derivabile in x_0;
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;
- x_0 non è un punto di accumulazione del dominio di f;
- $f'(x_0) = 0$;

2. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x}$$

- Vale 1;
- Vale 0;
- Vale $+\infty$;
- Non esiste;

3. Il Teorema di Lagrange afferma che, data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ che sia anche derivabile in (a, b),

- esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$;
- $f'(x) = (f(b) - f(a))/(b - a)$ per ogni $x \in (a, b)$;
- in almeno un punto c si ha $f'(c) = 0$;
- la funzione è strettamente crescente;
- Nessuna delle risposte precedenti;

4. Quanti asintoti obliqui può avere, al massimo, una funzione?

- Due;
- Uno;
- Tre;

- Infiniti;

5. Se A è un insieme di numeri reali tale che $\sup A = -\infty$, allora

- $A = \emptyset$;
- A è illimitato inferiormente;
- A è illimitato superiormente;
- $A = \{0\}$;

6. Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è ovunque derivabile, allora

- f ammette massimo e minimo in $[a, b]$, grazie al teorema di Weierstrass;
- esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$;
- esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$;

Corso di Diploma in Informatica

PROVA D'ESONERO DI ANALISI MATEMATICA I, 19/12/2000

(A.A. 2000-2001)

1.1 Si studi, a scelta, una delle due seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+7}}{e^{x+7}},$$

$$g(x) = x \log^3 |x| + 10$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

Si risolvano due a scelta dei seguenti tre esercizi.

1.2.1 Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin^2(8x)}{(1-\cos x)\log(\mathrm{tg} x + 1)}$$

1.2.2 Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{\sqrt{x^2+1}}$$

1.2.3 Trovare $\sup A$ e $\inf A$, dove

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |4\,\mathrm{arcsenx}| \le \pi\}\,.$$

Dire poi se $x = -0.25$ è minorante di A.

30 gennaio 2001

II Prova di Esonero di Analisi Matematica I per Informatica: parte teorica.

1. Sia f una funzione derivabile con derivata continua. E' vero che $\int_0^x f'(t)\,dt = f(x)$?

- SI, sempre;
- NO, mai;
- È vero se e solo se $f(0) = 0$;
- È vero se f è costante;

2. Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

Quanto vale $F'(\frac{\pi}{2})$?

- Vale $\frac{2}{\pi} - 1$;
- La funzione non è derivabile;
- Vale $\frac{2}{\pi}$;
- Non è possibile calcolare il valore esatto;

3. Sia f una funzione derivabile 30 volte, e supponiamo che si abbia $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = \ldots = f^{(30)}(0) = 0$. Grazie al Teorema di Taylor, possiamo dedurre che il limite $\lim\limits_{x\to 0}(x^{25}/f(x))$

- Vale 0;
- È infinito;
- Non esiste;
- Non possiamo dedurre niente di tutto questo;

4. Si consideri il problema differenziale

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

Esso ammette

- Infinite soluzioni;
- Una ed una sola soluzione;
- Nessuna soluzione;
- Al massimo due soluzioni;

5. E' vero che le funzioni $F(x) = -\arccos(x) + C$ sono primitive di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$?

- SI;
- NO;
- Solo per valori positivi di C;
- Solo se C è un quadrato perfetto;

6. L'equazione differenziale $x'(t) = e^t\,[x(t)]^3$ è

- A variabili separabili;
- Lineare del primo ordine;
- Del secondo ordine;

Corso di Diploma in Informatica

PROVA D'ESONERO DI ANALISI MATEMATICA I, 30/1/2001

(A.A. 2000-2001)

1.1 Risolvere, a scelta, tre tra i seguenti esercizi.

- Calcolare tutte le primitive della funzione $f(x) = \log(1 + \sqrt{3x})$.
- Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{1}{x(4 + \log^2 x)}\, dx.$$

- Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x' = (1 + (2 + x)^2)\, e^{2t}.$$

- Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + 3x' = t \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

6 febbraio 2001

Prova d'Esame di Analisi Matematica I per Informatica: parte teorica.

1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile in x_0. Tra le seguenti affermazioni, qual è l'unica corretta?

- f ammette minimo relativo in x_0.
- se f è crescente in un intorno di x_0, allora $f'(x_0) \geq 0$;
- se f è crescente in un intorno di x_0, allora $f'(x_0) < 0$;
- se $f'(x_0) > 0$, allora f è crescente in un intorno di x_0;

2. Tra le seguenti funzioni, quale non ammette limite per $x \to +\infty$?

- $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$;
- $f(x) = x \sin(x)$;
- $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$;
- $f(x) = [x]$ (parte intera di x);

3. Sia f una funzione derivabile due volte e concava. Allora

- il grafico di f giace sopra la retta tangente per un qualunque punto x_0;
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;
- f è illimitata superiormente;
- $f''(x) \leq 0$ per ogni x;

4. Una funzione è integrabile secondo Riemann se e soltanto se

- ammette integrale superiore e integrale inferiore;
- è negativa;
- è limitata, e l'integrale superiore è uguale all'integrale inferiore;
- è limitata;
- è positiva;

5. Se f è una funzione derivabile con derivata continua, allora $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f'(t)\,dt\right)$ vale

- $f'(x) - f'(0)$;
- $f(x)$;
- $f'(x)$;
- $f(x) - f(0)$;

6. Quale tra le seguenti funzioni *non* può essere soluzione di un'equazione lineare del secondo ordine, omogenea e a coefficienti costanti?

- $x(t) = te^t$;
- $x(t) = e^t + 1$;
- $x(t) = e^t(\sin t + \cos t)$;
- $x(t) = \log(t)$;

Corso di Diploma in Informatica
PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA I, 6/2/2001
(A.A. 2000-2001)

È richiesta la soluzione dell'esercizio 1, e di *tre a scelta* dei rimanenti. Chi deve recuperare il *primo esonero* deve invece svolgere l'esercizio 1, ed uno a scelta tra gli esercizi 2 e 3. Infine, a chi deve recuperare il *secondo esonero* si chiede di svolgere gli esercizi 4 e 5.

1.1 Si studi la funzione

$$f(x) = \arctan\big(\frac{7}{1+\log x}\big)$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

1.2 Risolvere la disequazione $16\arctan^2 x - \pi^2 \geq 0$, e dire se 0 è un maggiorante dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbf{R} :\ 16\arctan^2 x - \pi^2 \geq 0\}.$$

1.3 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{5x} - \frac{1}{\arcsin(5x)}\right).$$

1.4 Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{x}{\cos^2(4x)}\, dx.$$

1.5 Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + y\cos x - \sin x\cos x = 0 \\ y(2\pi) = 1 \end{cases}$$

20 febbraio 2001

Prova d'Esame di Analisi Matematica I per Informatica: parte teorica.

1. Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è una qualunque funzione, e $f(a) \cdot f(b) < 0$, possiamo dedurre che

- Esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$;
- Se f è anche continua, esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$;
- C'è al massimo un punto dove la funzione si annulla;
- f è derivabile due volte;

2. Si consideri la funzione $f(x) = |x|$. Tra le seguenti affermazioni, qual è l'unica falsa?

- f è derivabile per ogni $x \neq 0$;
- $f'(x) = \frac{x}{|x|}$ per $x \neq 0$;
- f non è derivabile per $x = 0$;
- f è ovunque continua;
- La funzione $g(x) = [f(x)]^2$ non è derivabile per $x = 0$;

3. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua e limitata. Allora

- f ammette massimo e minimo grazie al teorema di Weierstrass;
- $\sup f < +\infty$;
- $\inf f = -\infty$;
- Esiste il limite $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;

4. Denotiamo con $[x]$ la parte intera di x. Allora l'integrale $\int_0^{10} [x]\, dx$ vale

- $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$;
- non esiste;
- non si può calcolare;

- $\left[\left[\frac{x^2}{2}\right]\right]_0^{10} = 50$;

5. Un'equazione differenziale lineare del primo ordine $y' + a(x)y = b(x)$ (con a, b funzioni continue assegnate) ammette

- Una ed una sola soluzione;
- Infinite soluzioni;
- Non ammette alcuna soluzione;
- Ammette soluzione solo se si riescono a calcolare certi integrali;

6. Data la funzione di due variabili $f(x, y) = |x| + y^2$, la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0)$ vale

- $|y_0|$;
- $2y_0$;
- Non esiste;
- y_0^2;

Corso di Diploma in Informatica

PROVA D'ESONERO DI ANALISI MATEMATICA I, 20/2/2001

(A.A. 2000-2001)

È richiesta la soluzione dell'esercizio 1, e di *tre a scelta* dei rimanenti. Chi deve recuperare il *primo esonero* deve invece svolgere l'esercizio 1, ed uno a scelta tra gli esercizi 2 e 3. Infine, a chi deve recuperare il *secondo esonero* si chiede di svolgere gli esercizi 4 e 5.

1.1 Studiare la seguente funzione, e tracciarne un grafico:

$$f(x) = x^2 \log |x|.$$

1.2 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{\log(1 + x^{\frac{4}{3}})}.$$

1.3 Si trovi il dominio della funzione $f(x) = x \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2}$. Se ne studi poi la derivabilità agli estremi del dominio stesso.

1.4 Si calcoli il seguente integrale indefinito:

$$\int x^3 \sqrt{2 - x^2}\, dx.$$

1.5 Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' - y' - 2y = 6e^x + e^{-x}$.

19 giugno 2001

Esame di Analisi Matematica I per Informatica: parte teorica.

1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua, x_0 un punto di minimo assoluto per f. È vero che la derivata $f'(x_0)$ esiste sempre?

- SI;
- No, f potrebbe non essere derivabile in x_0;
- No, ma esiste sempre la derivata seconda, e $f''(x_0) \geq 0$.
- No, non esiste mai;

2. Siano f, g due funzioni derivabili che si annullano in x_0. Il teorema di l'Hôpital dice che se esiste il limite $\lim_{x \to x_0} (f(x)/g(x))$, allora esiste anche $\lim_{x \to x_0} (f'(x)/g'(x))$, e questi limiti sono uguali.

- Si, ma solo se le due funzioni sono convesse;
- Si, è proprio così;
- Solo se f è positiva;
- No, dice che se esiste il SECONDO limite, allora esso è uguale al PRIMO.

3. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \sin x}{x^x}$$

- Vale 0;
- Non esiste;
- Vale $+\infty$;
- Vale 1;

4. Se f è continua e $\int_0^2 f(x)\, dx = 45$, posso affermare che

- Esiste un punto $\overline{x} \in [0, 2]$ tale che $f(\overline{x}) > 22$;
- f è sempre maggiore di 22;
- f è sempre minore di 22;

- Nessuna delle risposte precedenti;

5. Sia $f(t,x)$ una funzione continua, derivabile parzialmente e con derivate parziali continue. E' possibile che le funzioni $x_1(t) = t$ e $x_2(t) = t^2$ siano *entrambe* soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = f(t, x(t))$?

- No, la differenza di due soluzioni è una costante;
- No, sarebbe violato il teorema di esistenza e unicità locate col dato iniziale $x(0) = 0$;
- Si, per il teorema di esistenza e unicità locale;
- Si, se l'equazione è lineare;

6. Una primitiva della funzione continua ma *non derivabile* $f(x) = |x|$

- Non è derivabile;
- È derivabile;
- Non esiste;
- È decrescente;

Corso di Diploma in Informatica

PROVA D'ESAME DI ANALISI I – ESERCIZI, 19/6/2001

(A.A. 2000-2001)

ISTRUZIONI: È richiesta la soluzione dell'esercizio 1.1, e di tre a scelta dei rimanenti. Chi deve recuperare il primo esonero deve invece svolgere l'esercizio 1.1, ed uno a scelta tra gli esercizi 1.2 e 1.3. Infine, a chi deve recuperare il secondo esonero si chiede di svolgere gli esercizi 1.4 e 1.5.

1.1 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.Si trovi anche la tangente al grafico nel punto $x = 0$. (*Omettere lo studio della derivata seconda.*)

1.2 Determinare D_1, l'insieme di definizione della funzione

$$f_1(x) = \log(\arcsin(\sqrt{x} - x))\sqrt[3]{\mathrm{arctg} x}$$

Trovare anche D_2, l'insieme di definizione della funzione

$$f_2(x) = \sqrt{\frac{2}{5^{\frac{x}{x+1}} - 5}}$$

Dire se è vera la relazione

$$D_1 \cup D_2 = D_3$$

essendo D_3 l'insieme di definizione della funzione $f_3(x) = f_1(x)f_2(x)$.

1.3 Calcolare uno a scelta dei seguenti limiti (se esiste):

$$\lim_{x\to-\infty} \cos\left(3\mathrm{arctg}\frac{x^4 - 2}{x^3 + 1}\right)\frac{\sqrt{6 + x^2}}{1 - 3x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{6\sin x}{x^2}\right)^x$$

1.4 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \log(1 + x^2)\mathrm{d}x.$$

1.5 Trovare tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale del secondo ordine, oppure del problema di Cauchy del primo ordine:

$$y''(x) - 4y'(x) = 3\mathrm{e}^x + x^2,$$

$$\begin{cases} x'(t) + 4t^3 x(t) = 3t^3 \\ x(0) = k^2 \end{cases}$$

10 luglio 2001

Esame di Analisi Matematica I per Informatica: parte teorica.

1. Se $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, allora possiamo certamente dire che

- f è sempre positiva;
- f è positiva in un intorno di 0 (tranne eventualmente in 0);
- f è continua in 0;
- f è discontinua in 0;

2. Sia f una funzione maggiore o uguale a 0, e supponiamo che $f(x_0) = 0$. Allora

- x_0 è un punto di minimo assoluto;
- x_0 è un punto di minimo relativo, ma non assoluto;
- x_0 è un punto di minimo relativo solo se $f'(x_0) = 0$;
- x_0 è un punto di flesso;

3. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua, e supponiamo che esista $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$. Si ha certamente

- $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$;
- $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$;
- $f(a) \cdot f(b) \leq 0$;
- Nessuna delle risposte precedenti;

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua, e supponiamo che $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Allora

- f si annulla dappertutto;
- f non si annulla mai;
- $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$;
- f potrebbe essere positiva su una parte di $[a, b]$, e negativa altrove;

5. Sia $x(t)$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$x'(t) = \log(1 + x^2(t) + t^3) + 5,$$

tale che $x(0) = 0$. Allora

- $x'(0) > 0$;
- $x'(0) \leq 0$;
- $x(t)$ non è derivabile in 0;
- $x'(0) = 0$;

6. Siano f, g due funzioni derivabili e con derivata continua. La formula di integrazione per parti dice che

- $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$;
- $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(x)g'(x) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$;
- $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f'(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$;
- $\int_a^b f'(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g(x)\,dx$;

Corso di Diploma in Informatica

PROVA D'ESAME DI ANALISI I – ESERCIZI, 10/7/2001

(A.A. 2000-2001)

ISTRUZIONI: È richiesta la soluzione dell'esercizio 1.1, e di tre a scelta dei rimanenti. Chi deve recuperare il primo esonero deve invece svolgere l'esercizio 1.1, ed uno a scelta tra gli esercizi 1.2 e 1.3. Infine, a chi deve recuperare il secondo esonero si chiede di svolgere gli esercizi 1.4 e 1.5.

1.1 Studiare la funzione

$$f(x) = \cos x \log(\cos x).$$

Si ometta lo studio di f'', ma si interpreti graficamente il limite

$$\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} f'(x).$$

1.2 Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tali che } \frac{\log_2 x - 1}{\log_{1/2} x - 1} \geq 0 \right\}.$$

Individuare inf$A$, sup$A$. Dire quindi se essi appartengono all'insieme dato.

1.3 Calcolare uno a scelta dei seguenti limiti (se esiste):

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 + x^4}{\sqrt[3]{1 - \cos x} |\cos(1/x)|}$$

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + x^3)^{\frac{1}{\log \sin(x) - \log x}}.$$

1.4 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\log(x) + \sqrt[6]{x}}{x} \mathrm{d}x$$

1.5 Risolvere l'equazione differenziale

$$y''(t) - y'(t) - 2y = 0.$$

Trovare poi tutte le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 2y = \sin t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Esame di Analisi Matematica I per Informatica (11/9/2001): parte teorica.

ATTENZIONE: In ciascuna domanda, una sola delle risposte è corretta.

1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua su $\mathbf{R}$ e derivabile per $x \neq 0$. Supponiamo poi che $f'(x) < 0$ per $x < 0$, $f'(x) > 0$ per $x > 0$. Allora possiamo dedurne che:

- in 0 c'è un asintoto verticale;
- 0 è sempre punto di minimo assoluto;
- 0 è un punto di minimo assoluto soltanto se f è derivabile in 0, e $f'(0) = 0$;
- nessuna delle risposte precedenti è corretta.

2. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

- vale 0;
- vale e^2;
- vale $+\infty$;
- vale e^x.

3. Quale tra le seguenti affermazioni è corretta?

- Se f è derivabile, allora è costante;
- Se f è costante, allora non ammette massimo né minimo;
- Se f è costante, allora è derivabile;
- Se f è derivabile, può non essere continua;

4. L'integrale

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{\log(1+x)}}{x}\, dx$$

- è positivo;
- è negativo;
- non è possibile stabilirne il segno perché non si riesce a scrivere una primitiva;
- non esiste;

5. Le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x'' + x = 0$$

- sono tutte periodiche di periodo 2π;
- divergono tutte all'infinito;
- sono tutte positive;
- sono tutte negative;

6. Se f è una funzione derivabile con $f(0) = f'(0) = 0$, allora il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x)}{f(x)}$$

- vale 0;
- vale più o meno infinito;
- vale 1;
- vale e;

Corso di laurea in Informatica; **PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA I – ESERCIZI, 11/9/2001**
(A.A. 2000-2001)

ISTRUZIONI: È richiesta la soluzione dell'esercizio 1.1, e di tre a scelta dei rimanenti.

1.1 Si studi una delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \operatorname{arctang} x$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

1.2 Calcolare il seguente limite (se esiste):

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen}(\mathrm{e}^{-x}).$$

Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x} \operatorname{sen}(\mathrm{e}^{-x}).$$

1.3 Determinare il dominio e la periodicità della seguente funzione:

$$f(x) = \ln^2(2 - \sqrt{\operatorname{sen} x}).$$

1.4 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{1}{x} \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int \frac{1}{x^2} \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x.$$

1.5 Determinare l'integrale generale di una delle seguenti equazioni differenziali:

$$y' + y = e^x + 1$$

$$x'' + x = e^t.$$

8 gennaio 2002

Prova di Esonero di Analisi Matematica I per Informatica: parte teorica.

1. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile in a, e supponiamo che a sia un punto di massimo relativo per f. Allora possiamo dire che

- $f'(a) = 0$;
- $f'(a) \leq 0$;
- f non è continua in a;
- $f(a) > 0$;

2. Se f è derivabile, allora il limite

$$\lim_{x \to 0} f(\sin x / x)$$

- Vale 1;
- Vale $f(1)$;
- Vale $f'(1)$;
- Vale $f(0)$;

3. In quale dei seguenti intervalli la funzione $f(x) = \log(x^2)$ verifica le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri?

- $[1/2, 3/2]$;
- $[-1/2, 2]$;
- $[2, 3]$;
- $[-3, -2]$;
- Nessuno dei precedenti;

4. La funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ è

- Ovunque continua;
- Ovunque derivabile;

- Periodica;
- Dispari;

5. Se $[x]$ denota la parte intera di x (cioè il più grande intero minore o uguale a x), allora l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : \ [x]^2 < 2\}$

- è l'intervallo $[-1, 2)$;
- è illimitato inferiormente;
- è illimitato superiormente;
- non ammette né massimo né minimo;

6. Tenendo presente la formula di Taylor con resto di Lagrange, possiamo dire che una funzione derivabile 57 volte tale che $f^{(57)}(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$

- è un polinomio di grado minore o uguale a 56;
- è un polinomio di grado 57;
- non ammette derivata prima;
- non ha né massimi né minimi relativi;

Corso di Laurea in Informatica

PROVA D'ESONERO DI ANALISI MATEMATICA I, 8/1/2002

(A.A. 2001-2002)

1.1 Si studi, a scelta, una delle due seguenti funzioni

$$f(x) = x\log^2 x + 2x\log x + 2,$$

$$g(x) = \sin^2(\arctan(6x))$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

Si risolvano due a scelta dei seguenti tre esercizi.

1.2.1 Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\big(1+\log(1+6x)\big)^{\frac{1}{e^x-1}}.$$

1.2.2 Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x + 6\log\sin x}{(x-\pi/2)^2}.$$

1.2.3 Trovare $\sup A$ e $\inf A$, dove

$$A = \left\{x \in \mathbf{R} :\ e^{2x} + 3e^x < 1\right\}.$$

Si dica se l'insieme A è una semiretta.

29 gennaio 2002

Prova di Esame di Analisi Matematica I per Informatica: parte teorica.

1. Se f ha come asintoto obliquo per $x \to +\infty$ la retta $y = 3x + 2$, possiamo dire che

- f è decrescente per x abbastanza grande;
- f è crescente per x abbastanza grande;
- f è continua per x abbastanza grande;
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$;
- $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 3x)$ non esiste;

2. Il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\log_{10}(\frac{1}{x})}$$

- Non esiste;
- Vale $-\log 10$;
- Vale 0;
- Vale $\log_{10}(2)$;
- Vale $+\infty$;

3. Si consideri la funzione $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Il suo polinomio di Taylor di ordine 5 centrato nell'origine è uguale a

- $f(x)$;
- x^5;
- 0;
- Non esiste: la funzione non è derivabile 5 volte;

4. La funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ è

- invertibile su $[0, +\infty[$;
- decrescente su $[0, +\infty[$;

- invertibile su $\mathbf{R}$;
- discontinua;

5. Se $[x]$ denota la parte intera di x (cioè il più grande intero minore o uguale a x), allora la funzione $f(x) = [x]$

- è discontinua per $x \in \mathbf{Z}$;
- è sempre discontinua;
- è sempre derivabile;
- non è mai derivabile;

6. Se il prodotto di $f(x)$ e $g(x)$ è derivabile per $x = 0$, allora

- f e g sono derivabili per $x = 0$;
- $f(x)$ e $g(x)$ sono continue per $x = 0$;
- esiste finito il limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)g(h)-f(0)g(0)}{h}$;

Corso di Laurea in Informatica

PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA I, 29/1/2002

(A.A. 2001-2002)

1.1 Si studi, a scelta, una delle tre seguenti funzioni

$$f(x) = |x|^{\frac{1}{x}}$$

$$g(x) = 3 \arctan x - \frac{3x+1}{x^2+1}$$

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x - 4}$$

e se ne tracci un grafico qualitativo (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

Si risolvano due a scelta dei seguenti tre esercizi.

1.2.1 Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\log(1+\sqrt{x}))(\tan \sqrt[4]{x})^2}{(e^{\tan x} - 1)(1 + \cos x)}.$$

1.2.2 Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{x\sqrt{1-\cos x}}{\log(1+6x^2)}$$

1.2.3 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\tan(4x)}{1+\tan(4x)}.$$

Dopo aver calcolato il limite per $x \to (\frac{\pi}{8})^-$ di $f(x)$, trovare il sup e l'inf di f in $[0, \pi/8[$.

19 febbraio 2002

Prova di Esame di Analisi Matematica I per Informatica: parte teorica.

1. Il limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+\sin x}{x^2+\cos x}$

- Vale 0;
- Vale $+\infty$;
- Non esiste;

2. Se f è derivabile due volte, il limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$

- Vale $f''(x_0)$;
- Vale $2f'(x_0)$;
- Vale $f(x_0)$;
- Vale 0;
- Vale ∞;

3. Si consideri la funzione $f(x) = (x-1)^3$. Il suo polinomio di Taylor di ordine 1000 centrato nell'origine è uguale a

- $P_{1000}(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;
- $P_{1000}(x) = x^{1000}$;
- $P_{1000}(x) = x^{999}$;
- $P_{1000}(x) = 0$;

4. Sia f una funzione definita sull'insieme $A = (0,1) \cup (2,3)$ e derivabile. Se $f'(x) = 0$ per ogni x in A, allora

- f è costante sull'intervallo $(0,1)$;
- f è costante in A;
- f il massimo assoluto di f su A viene raggiunto nell'intervallo $(2,3)$;
- f è crescente in A;

5. Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è derivabile e *strettamente convessa*, con derivata continua in $[a, b]$, e sappiamo che $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$, allora

- f ammette uno ed un solo punto di minimo assoluto in (a, b);
- f è crescente;
- f è decrescente;
- f è derivabile due volte, e $f''(x) \geq 0$ in $[a, b]$;

6. Sia $A = \{\tan x : \ x \in \mathbf{R}, \ x \neq \pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}\}$. Allora

- A è limitato;
- $A = (-\pi/2, \pi/2)$;
- $A = \mathbf{R}$;
- $A = \emptyset$;

Corso di Laurea in Informatica

PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA I, 19/2/2002

(A.A. 2001-2002)

1.1 Si studi, a scelta, una delle seguenti funzioni

$$f(x) = e^{x^3 + \frac{-1}{7}x}$$

$$g(x) = \log(1 + (-1)^2 \sin x)$$

e se ne tracci un grafico qualitativo (per la prima funzione, non è richiesto lo studio della derivata seconda).

Si risolvano due a scelta dei seguenti tre esercizi.

1.2.1 Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + e^{-x} - 1}{\sin^3(5x)}$$

1.2.2 Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \log^2 x}{\log x \sqrt{2 + \log^2 x}}$$

1.2.3 Si trovino dominio, periodicità, massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x) = \tan(\sin x).$$

Si determinino poi, giustificando la risposta, l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione

$$g(x) = \tan(\sin x) + \arctan x.$$

6 giugno 2002

Prova di Esame di Analisi Matematica II per Informatica: parte teorica.

1. Una funzione monotona definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$

- ha sempre integrale nullo;
- è sempre integrabile secondo Riemann;
- può essere derivabile ma non integrabile;
- è convessa e integrabile;

1. Se Ψ è una qualunque funzione a scala, possiamo dire che

- Ψ ha un numero finito di scalini;
- Ψ è positiva;
- Ψ è illimitata;
- Ψ è continua;

1. Sia $f(x, y) = g(x)$, dove g è una funzione di una variabile discontinua in *tutti* i punti. Allora

- Esiste la derivata $\frac{\partial^{30} f(x,y)}{\partial y^{30}}$ ed è uguale a 0;
- Esiste la derivata $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$
- Esiste la derivata $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ (derivata *prima* rispetto a x e *poi* rispetto a y);
- Non può esistere alcuna derivata parziale di f;

1. Se $f(x, y)$ è una funzione continua con derivate continue, la curva di livello $C = \{(x, y) : \ f(x, y) = 2\}$

- è localmente il grafico di una funzione derivabile attorno a ciascun suo punto;
- può anche non essere regolare, se grad $f(x, y)$ si annulla in qualche punto di C;
- è fatta di punti di massimo relativo per f;

1. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

risulta definita sull'insieme

- $(-\pi/2, \pi/2)$;
- $\mathbf{R}$;
- $[0, +\infty)$;
- $\{x \in \mathbf{R} : \ x \neq \pi/2 + k\pi\}$;

1. Le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = e^{\sin x}/(1 + x^2)$

- sono crescenti;
- sono negative;
- hanno infiniti massimi e minimi;
- sono discontinue in molti punti;

Corso di Laurea in Informatica

PROVA D'ESONERO DI ANALISI MATEMATICA II, 6/6/2002

(A.A. 2001-2002)

Si risolvano **tre a scelta** dei seguenti quattro esercizi.

1.1 Si trovino i punti di massimo e di minimo relativo per la seguente funzione di due variabili:

$$f(x, y) = x^3 + 2y^3 - 10x - 2y^2.$$

1.2 Si determini la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$y'' - 12y' + 20y = e^{2x} + x.$$

1.3 Si studi la seguente funzione sulla semiretta $[\frac{1}{4}, +\infty)$ (oppure, facoltativamente, sulla semiretta $(0, +\infty)$)

$$F(x) = \int_{\frac{1}{4}}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt.$$

1.4 Si calcoli il seguente integrale indefinito

$$\int [\tan^3 x + \tan(6x)]\, dx.$$

2 luglio 2002

Prova di Esame di Analisi Matematica I per Informatica: parte teorica.

1. Se f è derivabile in x_0 allora

- esiste la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$;
- f è continua in un intorno di x_0;
- f è crescente;
- f ha un punto angoloso in x_0;

2. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$$

vale

- 0;
- 1;
- $+\infty$;
- non esiste;

3. Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è ovunque derivabile e $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora

- esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$;
- esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che $f'(c) = 0$;
- f è illimitata superiormente;
- non è possibile che f sia crescente;

4. La funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$

- ha un asintoto verticale per $x = 0$;
- non ha asintoti di nessun genere;
- è continua in $x = 0$;

5. Tra le seguenti affermazioni, individuare l'unica falsa:

- se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0;
- se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $f(x_0) = 0$, allora f è continua in x_0;
- se $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, allora f ammette un asintoto obliquo per $x \to +\infty$;

6. Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile definita su un intervallo aperto non vuoto. Allora

- è possibile che si abbia $\inf\{f(x) : \ x \in (a, b)\} = -\infty$;
- è possibile che si abbia $\sup\{f(x) : \ x \in (a, b)\} = -\infty$;
- f ammette massimo e minimo;
- si ha certamente $\sup\{f(x) : \ x \in (a, b)\} = +\infty$;

Corso di Laurea in Informatica

PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA I, 2/7/2002

(A.A. 2001-2002)

Istruzioni: Svolgere l'esercizio **1** e due a scelta tra gli esercizi **2.1, 2.2, 2.3.** **Le soluzioni degli esercizi vanno riportate nelle pagine successive, una per facciata**

TRACCIA DI TIPO 1.

1 Si studi, a scelta, una delle due seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$g(x) = \mathrm{e}^{|\mathrm{sen} x|}.$$

e se ne tracci un grafico qualitativo (lo studio del segno della derivata seconda della funzione g è facoltativo).

2.1 Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt[3]{e^{x^2}-1})}{\sqrt{1-\cos x}} \ .$$

2.2 Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} x(\mathrm{sen}\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})(1+5x)^{\frac{1}{x}}$$

2.3 Sia F la funzione così definita:

$$F(x) = \big||x|-1\big| \ ;$$

determinare gli eventuali punti in cui F non è derivabile.

2 luglio 2002

Prova di Esame di Analisi Matematica II per Informatica: parte teorica.

1. La funzione $f(x) = [x]^2$ (dove $[x]$ denota la parte intera di x)

- è a scala su qualunque intervallo limitato di $\mathbf{R}$;
- è monotona decrescente;
- non assume mai valori interi;
- non può essere integrabile sull'intervallo $[0, 10]$;

2. L'equazione differenziale $x'' - x = 0$

- possiede soluzioni illimitate;
- ha solo soluzioni periodiche;
- non ammette alcuna soluzione;
- ha solo soluzioni che non si annullano mai;

3. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile con

$$f(0,0) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Allora

- il piano tangente al grafico di f nell'origine è il piano $z = 0$;
- la funzione ha un punto di massimo o minimo relativo nell'origine;
- f può essere discontinua nell'origine;
- possono non esistere alcune derivate direzionali nell'origine;

4. Se $\int_a^b f(x)\,dx = 3$, con f funzione continua data, possiamo dire che

- f è positiva su $[a, b]$;
- ci sono punti di $[a, b]$ in cui f è positiva;
- f è sempre negativa;

- f non è certamente derivabile;

5. Si consideri la funzione $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in 0 per f è

- $P_2(x) = 0$;
- $P_2(x) = x$;
- $P_2(x) = x - x^2/2$;
- nessuno dei precedenti;

6. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile due volte con derivate continue. Se $f(x, y) \geq 0$ su $\mathbf{R}^2$ e $f(0, 0) = 0$, allora

- l'origine è un punto di minimo assoluto per f;
- il determinante hessiano di f è strettamente positivo nell'origine;
- f non ammette piano tangente nell'origine;
- si ha $f_{xx}(0, 0) > 0$;

Corso di Laurea in Informatica

PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA II, 2/7/2002

(A.A. 2001-2002)

Istruzioni: Si risolvano tre a scelta dei seguenti esercizi. Le soluzioni vanno scritte nelle pagine successive, una per facciata.

1.1 Trovare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = xy$ sul rettangolo di vertici $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$.

1.2 Determinare tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale lineare

$$x'' + 2x' - 15x = \sin 3t.$$

Tra tutte le soluzioni dell'equazione omogenea, determinare poi quelle per cui esiste finito il limite

$$\lim_{t \to +\infty} x(t).$$

1.3 Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{3}{x}\right)\, dx.$$

1.4 Si mostri che la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

non ammette piano tangente nell'origine. Come è fatto il grafico della funzione data?

9 luglio 2002

Prova di Esame di Analisi Matematica II per Informatica: parte teorica.

1. Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili differenziabile in (x_0, y_0). Tra le seguenti affermazioni, individuare quella falsa

- f ha derivate parziali continue in (x_0, y_0);
- f è continua in (x_0, y_0);
- f è derivabile parzialmente in (x_0, y_0);
- il grafico di f ha piano tangente in (x_0, y_0);

2. L'equazione differenziale $x\sqrt{y} - y' = 0$

- ammette la funzione $y(x) = 0$ come soluzione;
- ha solo soluzioni che non si annullano mai;
- ha solo la soluzione $y(x) = 0$;
- non ha soluzioni;

3. Sia f una funzione continua. La disuguaglianza $3 \leq \int_5^8 f(x)\ dx \leq 9$ è vera

- se $\inf f = 1$, $\sup f = 3$;
- solo se $\min f = 1$, $\max f = 3$;
- se f è integrabile;
- se f è a scala;

4. Sia data un'equazione differenziale del secondo ordine lineare ed omogenea, e siano $y_1(x)$, $y_2(x)$ due sue soluzioni.

- Se y_1 e y_2 non sono multiple l'una dell'altra, tutte le soluzioni sono del tipo
$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$
con C_1, C_2 costanti;
- Tutte le soluzioni sono del tipo $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, con C_1, C_2 costanti;

- Tutte le soluzioni sono del tipo $y(x) = C_1 y_1(x) \cdot C_2 y_2(x)$, con C_1, C_2 costanti;
- Tutte le soluzioni sono periodiche;
- Tutte le soluzioni sono illimitate;

5. Se $f(x, y)$ è derivabile due volte con derivate continue, e (x_0, y_0) è un punto di massimo assoluto allora

- il determinante della matrice hessiana in (x_0, y_0) è ≥ 0;
- il determinante della matrice hessiana in (x_0, y_0) è > 0;
- $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} > 0$;
- $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} > 0$;

6. Se f è una funzione continua e strettamente crescente, la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$

- è convessa;
- è crescente;
- non è continua;
- può non essere derivabile;

Corso di Laurea in Informatica

PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA II, 9/7/2002

(A.A. 2001-2002)

Istruzioni: Si risolvano tre a scelta dei seguenti esercizi. Le soluzioni vanno scritte nelle pagine successive, una per facciata.

1.1 Trovare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2y^4$ sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Quanto valgono il massimo e il minimo della funzione

$$g(x, y) = f(x, y) + 3x^2 + 3y^2$$

sulla stessa circonferenza?

1.2 Determinare tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale lineare

$$y'' - y' = e^x + 7x.$$

1.3 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 7}\, dx.$$

1.4 Studiare la crescenza e la convessità della seguente funzione, trovandone gli eventuali punti di flesso:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^3 + \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

23 luglio 2002

Prova di Esame di Analisi Matematica I per Informatica: parte teorica.

1. Tra le seguenti funzioni, individuare quella che ammette limite per $x \to +\infty$.

- $f(x) = \sin x + \cos x$;
- $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$;
- $f(x) = \frac{1}{x + \sin x}$;

2. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile due volte con derivata seconda continua. Se $f''(x_0) > 0$ possiamo dire che

- f è convessa in un intorno di x_0;
- x_0 è un punto di minimo relativo per f;
- f è crescente in un intorno di x_0;
- f è un polinomio di secondo grado;

3. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Allora

- f è limitata;
- f ammette massimo e minimo;
- f è crescente;
- f è decrescente;

4. La funzione $f(x) = x|x|$

- è ovunque derivabile;
- è discontinua in 0;
- ha un minimo assoluto in 0;

- ha un massimo relativo in 0;

5. Sia $a > 0$, $a \neq 1$. La funzione esponenziale $x \mapsto a^x$

- è tale che $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}$;
- è sempre crescente;
- è tale che $a^{xy} = a^x + a^y$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}$;

6. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione tale che ogni punto di $[a, b]$ è di massimo assoluto per f. Possiamo dire che

- f è costante;
- f è crescente;
- f non è derivabile;
- una tale f non esiste;

Corsi di Laurea in Informatica

PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA I, 23/07/2002

(A.A. 2001-2002)

Istruzioni: Svolgere l'esercizio **1.1** e due a scelta tra gli esercizi **1.2.1, 1.2.2, 1.2.3.**

1.1 Si studi, a scelta, una delle due seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3+1};$$

$$g(x) = \operatorname{arcsen} \lg x.$$

e se ne tracci un grafico qualitativo (lo studio del segno della derivata seconda della funzione g è facoltativo).

1.2.1 Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}}{\log(x+1)-\log 6x}.$$

1.2.2 Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\mathrm{e}^x)}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$$

1.2.3 Studiare la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{3/x} & x<0 \\ \sin x & x\geq 0 \end{cases}$$

23 luglio 2002

Prova di Esame di Analisi Matematica II per Informatica: parte teorica.

1. Si considerino le soluzioni dell'eqauzione differenziale $y' = y(y-1)(y+1)$. Possiamo dire che

- non ci sono soluzioni costanti;
- non ci sono soluzioni crescenti;
- non ci sono soluzioni decrescenti;
- le funzioni $y(x) = 0$, $y(x) = 1$ e $y(x) = -1$ sono tutte e sole le soluzioni costanti;

2. Sia $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione monotona crescente. Allora

- se f è anche limitata, essa è integrabile secondo Riemann;
- f è sempre integrabile in senso improprio, con integrale finito;
- f è continua;
- f è derivabile;

3. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione di due variabili continua, $x_0 \in \mathbf{R}$. La funzione $g(y) = f(x_0, y)$

- è continua;
- non è detto che sia continua;
- è certamente derivabile;

4. Sia f una funzione continua non identicamente nulla, e si consideri l'equazione differenziale lineare $x'' - x = f(t)$. Quale tra le seguenti funzioni non può certamente essere soluzione dell'equazione, per qualunque scelta di f?

- $x(t) = e^t$;
- $x(t) = \sin(t)$;
- $x(t) = \arctan t + 9 \sin t + 3$;

5. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione di due variabili derivabile due volte che abbia massimo assoluto in $(0,0)$. Allora

- $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$;
- $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0$;
- $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} > 0$;

6. Tra le seguenti superfici nello spazio, qual è l'unica che può essere scritta come grafico $z = f(x, y)$ di una funzione di due variabili?

- un piano che non contiene nessuna retta verticale;
- un cilindro il cui asse coincida con l'asse delle x;
- una sfera;
- un ellissoide a tre assi;

Corso di Laurea in Informatica

PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA II, 23/7/2002

(A.A. 2001-2002)

Istruzioni: Si risolvano tre a scelta dei seguenti esercizi. Le soluzioni vanno scritte nelle pagine successive, una per facciata.

1.1 Studiare i punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x,y) = 7x^2 + 7y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

nel suo dominio.

1.2 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y(x) = (1-7x)\mathrm{e}^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

1.3 Calcolare l'integrale definito

$$\int_3^6 \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 5}{x^2 - x + 6}\mathrm{d}x.$$

1.4 Calcolare, se esiste il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_1^{5x} \left|\mathrm{sen}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{t}}}\right| \mathrm{arctg}\, t \ \mathrm{d}\, t$$

3 settembre 2002

Prova di Esame di Analisi Matematica I per Informatica: parte teorica.

1. Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione qualunque, quale tra le seguenti funzioni è sempre dispari?

- $g(x) = f(x) - f(-x)$;
- $g(x) = f(x) + f(-x)$;
- $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$;
- $g(x) = [f(x)]^2$;

2. Quale, tra le seguenti uguaglianze, è l'unica vera per ogni x reale?

- $\log e^x = x$;
- $e^{\log x} = x$;
- $e^{x \cdot y} = e^x + e^y$;
- $\log(x + y) = \log x + \log y$;

3. Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è una funzione crescente, non necessariamente continua, possiamo certamente dire che

- f ammette massimo assoluto in b;
- f ammette massimo assoluto in a;
- f potrebbe non ammettere massimo assoluto;
- f è derivabile con derivata positiva;

4. Il limite $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x}{x}$

- vale $2/\pi$.;
- vale 1;
- vale 0;
- non esiste;

5. Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua e derivabile, con $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Grazie al teorema di Lagrange possiamo dire che

- esiste $c \in [0,1]$ con $f'(c) > 1/2$;
- esiste $c \in [0,1]$ con $f'(c) < -1/2$;
- esiste $c \in [0,1]$ con $f'(c) > 1$;

6. Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione ovunque derivabile. Allora

- f è limitata;
- f è crescente;
- f è periodica;
- f è convessa;

Corso di Laurea in Informatica

PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA I, 3/09/2002

(A.A. 2001-2002)

Istruzioni: Svolgere l'esercizio **1.1** e due a scelta tra gli esercizi **1.2.1, 1.2.2, 1.2.3.**

1.1 Si studi, a scelta, una delle due seguenti funzioni

$$f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}};$$

$$g(x) = \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

1.2.1 Dopo aver calcolato $\lim_{x\to 0^+} x^x$, si calcoli, se esiste,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\mathrm{sen}^2 x)}{\log x}(1-\cos x)^{2(1-\cos x)}$$

1.2.2 Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|^6\big(\arctan x^{-6}\big)\big(\log(1+x^2)\big)}{(\sin x)\big(e^{\frac{x}{2}}-1\big)}$$

1.2.3 Studiare la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}} - 1 & x < -1 \\ x^2 + 2x & -1 \le x < 0 \\ \mathrm{e}^{2x} & 0 \le x < 1 \\ \mathrm{e}^{1+x} & x \ge 1 \end{cases}$$

3 settembre 2002

Prova di Esame di Analisi Matematica II per Informatica: parte teorica.

1. Si considerino le soluzioni dell'eqauzione differenziale $y' = y(y-1)(y+1)$. Possiamo dire che

- non ci sono soluzioni costanti;
- non ci sono soluzioni crescenti;
- non ci sono soluzioni decrescenti;
- le funzioni $y(x) = 0$, $y(x) = 1$ e $y(x) = -1$ sono tutte e sole le soluzioni costanti;

2. Sia $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione monotona crescente. Allora

- se f è anche limitata, essa è integrabile secondo Riemann;
- f è sempre integrabile in senso improprio, con integrale finito;
- f è continua;
- f è derivabile;

3. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione di due variabili continua, $x_0 \in \mathbf{R}$. La funzione $g(y) = f(x_0, y)$

- è continua;
- non è detto che sia continua;
- è certamente derivabile;

4. Sia f una funzione continua non identicamente nulla, e si consideri l'equazione differenziale lineare $x'' - x = f(t)$. Quale tra le seguenti funzioni non può certamente essere soluzione dell'equazione, per qualunque scelta di f?

- $x(t) = e^t$;
- $x(t) = \sin(t)$;
- $x(t) = \arctan t + 9 \sin t + 3$;

5. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione di due variabili derivabile due volte che abbia massimo assoluto in $(0,0)$. Allora

- $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$;
- $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0$;
- $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} > 0$;

6. Tra le seguenti superfici nello spazio, qual è l'unica che può essere scritta come grafico $z = f(x,y)$ di una funzione di due variabili?

- un piano che non contiene nessuna retta verticale;
- un cilindro il cui asse coincida con l'asse delle x;
- una sfera;
- un ellissoide a tre assi;

Corso di Laurea in Informatica

PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA II, 3/9/2002

(A.A. 2001-2002)

Istruzioni: Si risolvano tre a scelta dei seguenti esercizi. Le soluzioni vanno scritte nelle pagine successive, una per facciata.

1.1 Disegnare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \log(3 + xy).$$

Studiare quindi i punti di massimo e minimo assoluti della funzione data nel cerchio di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{2}$.

1.2 Determinare, per $x \in (-1, +\infty)$, la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{x}{x+1} y(x) = x^2 + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1.3 Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) \, dx.$$

1.4 Calcolare le primitive di

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{(4 - \operatorname{sen}^2 x)^3}}.$$

24 settembre 2002

Prova di Esame di Analisi Matematica I per Informatica: parte teorica.

1. Se f è una funzione derivabile in x_0, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è

- $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$;
- $y = f(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)$;
- $y = 0$;
- $y = f'(x_0)f(x)$;

2. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x}$$

- vale $+\infty$;
- vale 0;
- vale 1;
- non esiste;

3. Si consideri la funzione $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ 0 \leq x < 1, \\ 0 & se\ x = 1. \end{cases}$$

Allora

- il minimo di f è 0, mentre il massimo non esiste;
- il massimo di f è 1, mentre il minimo non esiste;
- f non ammette né massimo né minimo;
- il massimo e il minimo di f valgono entrambi 1/2;

4. Quanti flessi può avere, al massimo, una funzione della forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$?

- nessun flesso;

- un flesso;
- due flessi;
- infiniti flessi;

5. Quale delle seguenti identità NON sussiste per ogni $x \in \mathbf{R}$?

- $\sin(x+y) = \sin(x) + \sin(y)$;
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$;
- $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$;
- $\cos^2(x) = (1+\cos(2x))/2$;

6. Se $f(x) = x+1$ e $g(y) = y^2$, allora

- $g(f(x)) = x^2 + 2x + 1$;
- $g(f(x)) = f(g(x))$;
- $g(f(x)) = x^2 + 1$;
- $g(f(x)) = x$;

Corsi di Laurea in Informatica

PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA I, 24/09/2002

(A.A. 2001-2002)

Istruzioni: Svolgere l'esercizio **1.1** e due a scelta tra gli esercizi **1.2.1, 1.2.2, 1.2.3.**

1.1 Si studi, a scelta, una delle due seguenti funzioni

$$f(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^x;$$

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(x^2 - 1)}.$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

1.2.1 Dopo aver calcolato

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - \cos x - \mathrm{sen} x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \mathrm{sen}^2 x}{x^4}$$

si calcoli, se esiste,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \mathrm{sen}^2 x}{\mathrm{e}^x - \cos x - \mathrm{sen} x}.$$

1.2.2 Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\mathrm{e}^{x^2} - 1\right)(\lg(1 + x))}{(\cos x - 1)\sqrt{\mathrm{tg} x}\,\mathrm{arcsen}\sqrt{x}}.$$

1.2.3 Calcolare $t(x)$ la funzione che descrive la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \lg(1 + \sqrt{\cos x})$ nel punto $x_0 = 0$. Dire quanto vale

$$\lim_{x \to 0} f(x) - t(x).$$

24 settembre 2002

Prova di Esame di Analisi Matematica II per Informatica: parte teorica.

1. Se f è una funzione di due variabili derivabile parzialmente con derivate continue, allora

- il grafico di f ammette piano tangente in ogni suo punto;
- f potrebbe essere discontinua;
- f potrebbe non possedere un grafico;
- f ammette derivate parziali fino al quarto ordine incluso;

. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} x^2\,dx$

- vale $+\infty$;
- vale 0;
- vale 1;
- non esiste;

. Si consideri la funzione $F(x) = \int_x^0 |t|\,dt$. Allora

- $F'(x) = -|x|$ per ogni x reale;
- F non è derivabile in nessun punto;
- F non è derivabile in 0;
- F è derivabile ovunque, ma non si sa quanto valga la derivata;

. Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili con derivate prime e seconde continue, e supponiamo che in $(0, 0)$ le derivate parziali prime siano nulle, mentre le derivate seconde siano tutte strettamente positive. Allora

- $(0, 0)$ è un punto di massimo relativo per f;
- $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo per f;
- $(0, 0)$ non è né di massimo né di minimo relativo per f;
- le informazioni date non sono sufficienti per dire se $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo;

. Le soluzioni di un'equazione differenziale del secondo ordine,lineare ed omogenea a coefficienti costanti

- sono infinite;
- sono due;
- sono tre;
- potrebbero anche non esistere;

. Le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = e^{-x^2}(1 + y^2)$

- sono tutte crescenti;
- sono tutte decrescenti;
- sono tutte costanti;

Corso di Laurea in Informatica

PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA II, 24/9/2002

(A.A. 2001-2002)

Istruzioni: Si risolvano tre a scelta dei seguenti esercizi.

1 Studiare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

2 Descrivere l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 5y' + 6y = -x^2 + 1.$$

3 Calcolare (almeno) due dei seguenti integrali

$$\int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{e}^{2x}\cos(4x)\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{sen}(4x)\mathrm{d}x$$

$$\int x\mathrm{e}^{2x}\cos(4x)\mathrm{d}x$$

4 Siano A il dominio di $f_1(x,y) = \lg(1-x^2) - \lg(y^2-4)$ e B il dominio di $f_2(x,y) = \lg\left(\frac{1-x^2}{y^2-4}\right)$. Disegnarli e stabilire se $A \subset B$ oppure $B \subset A$ oppure $A = B$.

Prove di Analisi Matematica I del
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
(Anni Accademici 1999-2000 e 2000-2001)

Corso di Laurea in Matematica

PRIMA PROVA DI ESONERO DI ANALISI I, 12/1/2000

(A.A. 1999-2000)

1. Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore dell'insieme

$$A = \{-3 + \frac{1}{n} : \ n \in \mathbf{N}^*\} \cup \mathbf{N}.$$

Si giustifichi la risposta, e si dica anche se l'insieme A ammette massimo e/o minimo.

2. Si dimostri, per induzione su n, la seguente identità (valida per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per $x \neq 2k\pi$):

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \cos(jx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}.$$

(Può essere utile ricordare le formule di addizione per il seno: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$*.)*

3. Si trovi l'insieme di definizione della funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \sqrt{\log(x - |x^2 - 3|)}.$$

4. Calcolare il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \log((n + \sqrt{n}) \sin(\frac{1}{n})).$$

Corso di Laurea in Matematica

SECONDA PROVA DI ESONERO DI ANALISI I, 28/3/2000

(A.A. 1999-2000)

1. Si consideri la successione $\{a_n\}$, definita per ricorrenza nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -a_n(1 + \frac{1}{n^4}) \end{cases}$$

Dimostrare che $\{a_n\}$ non ammette limite finito.

2. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + \sin x}{\sqrt{12x^6 + x^2 + 1} + \arctan x}.$$

3. Studiare la seguente funzione, e disegnarne un grafico qualitativo

$$f(x) = x + 1 - 8\sqrt{x^2 - x - 1}.$$

4. Si consideri la seguente funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^3} & \textit{se } x = \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbf{N}^\star \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Si dica in quali punti la funzione è continua, e in quali è derivabile.

Corso di Laurea in Matematica

TERZA PROVA DI ESONERO DI ANALISI I, 31/5/2000

(A.A. 1999-2000)

1.1. Si determini il polinomio di Taylor di ordine 3 (centrato in 0) della funzione

$$f(x) = \sqrt{1+2x}.$$

1.2. Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin(\sin(5x)),$$

discutendone in particolare la continuità e la derivabilità. Tracciarne poi il grafico.

1.3. Discutere, al variare del parametro reale x, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^x}.$$

1.4. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\frac{1}{3}} x^2 \arctan x \, dx.$$

Corso di Laurea in Matematica

PROVA SCRITTA DI ANALISI I, 23/5/2000

(A.A. 1999-2000)

1.1. Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})}{1-\cos(\frac{2}{x})}$$

1.2. Si studi la funzione

$$f(x) = \sin(x) + \sin(3x)$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

1.3. Studiare, al variare del parametro reale x, la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6^{-n^x}.$$

(Sugg.: *Nel caso (meno semplice) in cui* $0 < x < 1$, *si confronti con la serie di termine generale* $\frac{1}{n^2}$.)

1.4. Si calcoli l'integrale definito

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [x(\cos x)^{\frac{16}{5}} + x \arctan x]\, dx.$$

(Sugg.: *Quanto vale l'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine?*)

Corso di Laurea in Matematica

PROVA SCRITTA DI ANALISI I, 13/6/2000

(A.A. 1999-2000)

1.1. Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^8 - \sin^2 x^4 + \log(1+2x^{16})}{x^{16}}$$

In alternativa, gli studenti che portano il programma del Prof. Boggiatto possono calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{4\sin(\frac{x^3}{6})}.$$

1.2. Si studi la funzione

$$f(x) = x^2 \log(x^2)$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

1.3. Studiare, al variare del parametro reale α, la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \cos(\frac{\alpha}{n})\big)^{\frac{2}{7}}.$$

1.4. Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{3^x + 3^{-x}}\, dx.$$

Corso di Laurea in Matematica

PROVA SCRITTA DI ANALISI I, 11/7/2000

(A.A. 1999-2000)

1.1. Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - \frac{\sin(2x)}{x}}{\log(1+x^2)}$$

1.2. Si studi la funzione

$$f(x) = x^2(e^{|x|} + 2x^2)$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

1.3. Dire per quali valori del parametro reale positivo A la serie seguente converge, e per quali converge assolutamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{A^{\log(16n)}}.$$

1.4. Si trovino le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x^2}.$$

Si calcoli anche l'integrale improprio

$$\int_0^2 \frac{\arctan x}{x^2}\, dx.$$

Corso di Laurea in **Matematica**
PROVA SCRITTA Settembre 2000
(A.A. 1999-2000)

1. Svolgere uno a scelta tra i seguenti esercizi:

1.a Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} (\mathrm{arctg} x)^{\sqrt[4]{1+3x}-1}.$$

1.b Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to +\infty} x \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}} - 1 \right).$$

NOTA: L'esercizio 1.a e' valutato 2 punti in più rispetto all'esercizio 1.b.

2. Si studi la funzione

$$f(x) = |x|(\lg |x| - 1)^2$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

3. Si trovi F la primitiva della funzione

$$f(x) = x\frac{\mathrm{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

tale che $F(1) = 2$.

4. Considerata la successione

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$$

dimostrare
(i) $(a_n)_{n\in N}$ è decrescente,
(ii) $a_{n-2} + a_n = \frac{1}{n-1}, \quad n \geq 2$,
(iii) $lim_{n\to +\infty} a_n = 0$,
(iv) FACOLTATIVO: Cosa si può dire del comportamento della serie $\sum_n a_n$?

Corso di Laurea in Matematica

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA I, 10/10/2000

(A.A. 1999-2000)

1. Si studi la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{2(x^3 + x)}{2x + 1}}$$

e se ne tracci un grafico qualitativo *(Non si richiede lo studio della derivata seconda)*.

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi:

2.1. Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(\ln x + 1)}{x - 1}.$$

NOTA: *Si risolva preferibilmente l'esercizio usando i soli limiti notevoli.*

2.2 Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2}\, dx.$$

Si calcoli poi la primitiva della funzione integranda *(facoltativo)*.

2.3 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin(|x^2 - 4|).$$

(i) Si determini l'insieme di definizione (dominio) D della funzione f.

(ii) Dire se $x = 0$ è un maggiorante, e se è un minorante di D.

(iii) Si calcolino $\inf D$, $\sup D$, e si dica se sono rispettivamente il massimo e il minimo dell'insieme.

2.4 Si studi, al variare del parametro reale x, la convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\log(n+1)} x^n.$$

Corso di Laurea in Matematica
PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA I, 5/12/2000
(A.A. 1999-2000)

1. Si studi la funzione

$$f(x) = \arctan(\log(x) + 1)$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

Risolvere tre a scelta dei seguenti esercizi:
2.1. Determinare i parametri reali a e b in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & se\ x \leq 0 \\ e^x & se\ x > 0 \end{cases}$$

sia derivabile su tutto $\mathbf{R}$.
2.2. Sia data la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}\, dt.$$

Si calcoli $F(2)$. Si dica anche se F è una funzione monotona, giustificando la risposta.
2.3. Si calcolino, preferibilmente nell'ordine, i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3+e^{x^2})}{x^2},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3+e^{x^2})}{\sqrt{6+x^2+x^4}}.$$

2.4 Si studi la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \log\big(1 + \arctan(\sin(\sin(\sin(\frac{1}{n^2}))))\big).$$

Corso di Laurea in Matematica

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA I, 6/2/2001

(A.A. 1999-2000)

1. Si studi la funzione

$$f(x) = \arctan\Big(\frac{1}{1+\log x}\Big)$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

2. Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx.$$

3. Si dica per quali valori delle costanti reali a, b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x \leq \pi \\ \frac{a}{x} + b & x > \pi \end{cases}$$

è derivabile su tutto $\mathbf{R}$.

4. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}\Big).$$

Corso di Laurea in Matematica

PROVA D'ESONERO DI ANALISI MATEMATICA I, 5/2/2001

(A.A. 2000-2001)

1.1 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan(6\log x)}{(e^{2x-2})^2 - 1}.$$

1.2 Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si dica se f è continua, se è derivabile, e se possiede derivata seconda nel punto $x = 0$.

1.3 Sia dato l'insieme di numeri reali

$$A = \{\frac{1}{p} : \ p \in \mathbf{N}, \ p \text{ primo}\} \cup \{x \in \mathbf{R} : \ x^2 = 9\}.$$

Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A, dicendo anche se sono massimo e minimo dell'insieme. Si trovino poi tutti i punti di accumulazione di A.

1.4 Si studi la funzione $f(x) = x - \log|1 + x|$, e se ne tracci il grafico.

Corso di Laurea in Matematica

PROVA D'ESONERO DI ANALISI MATEMATICA I, 20/2/2001

(A.A. 2000-2001)

È richiesta la soluzione dell'esercizio 1, e di *tre a scelta* dei rimanenti.

1.1 Studiare la seguente funzione, e tracciarne un grafico:

$$f(x) = x^2 \log|x|.$$

1.2 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{\log(1 + x^{\frac{4}{3}})}.$$

1.3 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2 - 3x} \right).$$

1.4 Si trovi il dominio della funzione $f(x) = x \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2}$. Se ne studi poi la derivabilità agli estremi del dominio stesso.

1.5 Si dica se una funzione definita su $\mathbf{R}$, che ammetta in un punto x_0 derivata strettamente positiva, è necessariamente crescente in un intorno di x_0. Si studi poi la derivabilità, nel punto $x = 0$, della funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbf{Q} \\ x + x^2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Corso di Laurea in Matematica

PROVA D'ESAME DI ANALISI I – ESERCIZI, 19/6/2001

(A.A. 2000-2001)

ISTRUZIONI: È richiesta la soluzione dell'esercizio 1.1, e di tre a scelta dei rimanenti. A chi invece **ha superato** lo scritto dell'esonero del primo semestre, si chiede di svolgere tre a scelta tra gli esercizi 1.4, 1.5, 1.6 e 1.7.

1.1 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.Si trovi anche la tangente al grafico nel punto $x = 0$. (*Omettere lo studio della derivata seconda.*)

1.2 Determinare D_1, l'insieme di definizione della funzione

$$f_1(x) = \log(\arcsin(\sqrt{x} - x))\sqrt[3]{\mathrm{arctg} x}$$

Trovare anche D_2, l'insieme di definizione della funzione

$$f_2(x) = \sqrt{\frac{2}{5^{\frac{x}{x+1}} - 5}}$$

Dire se è vera la relazione

$$D_1 \cup D_2 = D_3$$

essendo D_3 l'insieme di definizione della funzione $f_3(x) = f_1(x)f_2(x)$.

1.3 Calcolare uno a scelta dei seguenti limiti (se esiste):

$$\lim_{x\to-\infty} \cos\left(3\mathrm{arctg}\frac{x^4 - 2}{x^3 + 1}\right)\frac{\sqrt{6 + x^2}}{1 - 3x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\tan x) - \log x}{x \arctan x}.$$

1.4 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \log(1 + x^2)\mathrm{d}x.$$

1.5 Trovare tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale del secondo ordine, oppure del problema di Cauchy del primo ordine:

$$y''(x) - 4y'(x) = 3\mathrm{e}^x + x^2,$$

$$\begin{cases} x'(t) + 4t^3 x(t) = 3t^3 \\ x(0) = k^2 \end{cases}$$

1.6 Ricordando il teorema di Taylor (col resto nella forma appropriata...), dire se è vero che per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\mathrm{e}^x \geq 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120.$$

Giustificare adeguatamente la risposta.

1.7 Si trovino due funzioni continue $a(t), b(t)$ in modo che

$$x_1(t) = t^3 \text{ e } x_2(t) = 1$$

siano soluzioni (per $t \neq 0$) dell'equazione differenziale lineare omogenea

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$$

Qual è la soluzione generale dell'equazione trovata sopra?

Corso di Laurea in Matematica

PROVA D'ESAME DI ANALISI I – ESERCIZI, 10/7/2001

(A.A. 2000-2001)

ISTRUZIONI: E richiesta la soluzione dell'esercizio 1.1, e di tre a scelta dei rimanenti. A chi invece **ha superato** lo scritto dell'esonero del primo semestre, si chiede di svolgere tre a scelta tra gli esercizi 1.4, 1.5, 1.6 e 1.7.

1.1 Studiare la funzione

$$f(x) = \cos x \log(\cos x).$$

Si ometta lo studio di f'', ma si interpreti graficamente il limite

$$\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} f'(x).$$

1.2 Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tali che } \frac{\log_2 x - 1}{\log_{1/2} x - 1} \geq 0 \right\}.$$

Individuare inf$A$, sup$A$. Dire quindi se essi appartengono all'insieme dato.

1.3 Calcolare uno a scelta dei seguenti limiti (se esiste):

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 + x^4}{\sqrt[3]{1 - \cos x} |\cos(1/x)|}$$

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + x^3)^{\frac{1}{\log \sin(x) - \log x}}.$$

1.4 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\log(x) + \sqrt[6]{x}}{x} \mathrm{d}x$$

1.5 Risolvere l'equazione differenziale

$$y''(t) - y'(t) - 2y = 0.$$

Trovare poi tutte le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 2y = \sin t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

1.6 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine

$$y'(x)(1 + \sin^2 x) + (y^2(x) + 1) \cos x = 0.$$

1.7 Stabilire, al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$, la convergenza degli integrali impropri

$$\int_2^{+\infty} \left(\frac{cx}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x + 1} \right) \mathrm{d}x.$$

Corso di laurea in Matematica; **PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA I – ESERCIZI, 11/9/2001**
(A.A. 2000-2001)

ISTRUZIONI: È richiesta la soluzione dell'esercizio 1.1, e di tre a scelta dei rimanenti. Chi ha superato l'esonero del primo semestre, deve affrontare gli esercizi 1.4, 1.5, 1.6.

1.1 Si studi una delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \operatorname{arctang} x$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

1.2 Calcolare il seguente limite (se esiste):

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen}(\mathrm{e}^{-x}).$$

Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x} \operatorname{sen}(\mathrm{e}^{-x}).$$

1.3 Determinare il dominio e la periodicità della seguente funzione:

$$f(x) = \ln^2(2 - \sqrt{\operatorname{sen} x}).$$

Si determini anche l'immagine della funzione (senza necessariamente fare uso di derivate).

1.4 Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{1}{x} \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int \frac{1}{x^2} \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x.$$

1.5 Determinare l'integrale generale di una delle seguenti equazioni differenziali:

$$y' + y = e^x + 1$$

$$x'' + x = e^t.$$

1.6 Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\log(1+x)}}{x}\, dx$$

Corso di laurea in Matematica

PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA I, 9/10/2001

(A.A. 2000-2001)

ISTRUZIONI: È richiesta la soluzione dell'esercizio 1.1, e di tre a scelta dei rimanenti.

1.1 Tracciare il grafico della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\log^2 x + 1}$$

1.2 Calcolare uno a scelta tra i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 1^+} \log x(\log(x-1))$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\log(1+x^2)}$$

1.3 Calcolare le primitive di una delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{1}{3e^{-2x}+e^{-x}}$$

$$g(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x^2}$$

1.4 Risolvere una a scelta delle due seguenti equazioni differenziali

$$y'' + 2y' + y = x$$

$$y' + xy = 1$$

1.5 Si dica se converge il seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)\sin(1/x)}{x\sqrt{x}}$$

Corso di laurea in Matematica

PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA I, 12/12/2001

(A.A. 2000-2001)

1.1 Tracciare il grafico della seguente funzione

$$f(x) = \arctan \log x$$

1.2 Calcolare uno a scelta tra i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - x \sin x}{x^4}$$

1.3 Calcolare le primitive di una delle seguenti funzioni

$$f(x) = e^{\sqrt{x}}$$

$$g(x) = \sin(\log x)$$

1.4 Risolvere una a scelta delle due seguenti equazioni differenziali

$$y'' + y' + y = e^x$$

$$x' + tx = t^3$$

Corso di laurea in Matematica

PROVA D'ESAME DI ANALISI I, ORDINAMENTO QUADRIENNALE

5/2/2002

ISTRUZIONI: È richiesta la soluzione dell'esercizio 1.1, e di tre a scelta dei rimanenti.

1.1 Tracciare il grafico della seguente funzione

$$f(x) = (x^2 + x + 2)e^x$$

1.2 Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x)\sqrt{1 - \sin(x)}.$$

1.3 Dire per quali valori di $\alpha > 0$ il seguente limite esiste finito:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + x^2)}{x^\alpha}.$$

1.4 Studiare la derivabilità nel punto $x = 0$ della funzione $f(x) = |x|^\alpha \sin(x)$, al variare di $\alpha > 0$.

1.5 Calcolare le primitive di una delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sin^5(x) \qquad g(x) = e^{\sqrt{x}}.$$

1.6 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $x'' + 2x' + x = e^{3t}$.

Prove di Istituzioni di Matematiche I del
CORSO DI LAUREA IN CHIMICA
(Anno Accademico 1999-2000)

Corso di Laurea in Chimica

PROVA D'ESAME DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I, 8/2/2000

(A.A. 1999-2000)

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x\ (1-\cos^2 x)}{(x-\sin x)\ \log(1+x^3)}.$$

2. Si studi la seguente funzione e se ne disegni un grafico qualitativo. (Se possibile, trovare anche gli eventuali punti di flesso).

$$f(x) = \log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

3. Si calcoli il valore del seguente integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+\sin x)\ \cos x\ dx.$$

4. Si consideri la seguente funzione reale di variabile reale:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } |x|>3, \\ \\ a+bx^2 & \text{se } -3\le x\le 3, \end{cases}$$

dove a e b sono parametri reali. Per quali valori di a e b la funzione è continua su tutto $\mathbf{R}$? Per quali è anche derivabile?

Corso di Laurea in Chimica

PROVA D'ESAME DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I, 22/2/2000

(A.A. 1999-2000)

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^x \frac{x^2+8x+1}{(x-3)^3}\sin x\right].$$

2. Si studi la seguente funzione e se ne disegni un grafico qualitativo. La ricerca degli eventuali punti di flesso e degli asintoti obliqui è facoltativa.

$$f(x)=(x+1)\,e^{\frac{x}{x-1}}.$$

3. Si calcoli il seguente integrale indefinito:

$$\int x\arctan(2x)\,dx.$$

4. Determinare il dominio e la natura degli eventuali punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

(a) $f(x)=\frac{\log(x+1)}{x}$;

(b) $g(x)=\frac{\log x}{x}$;

(c) $h(x)=\cos(e^{\frac{1}{x}})$. Dire anche se qualcuna di queste funzioni ammette prolungamento per continuità in qualche punto.

Corso di Laurea in Chimica

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I, 13/6/2000

(A.A. 1999-2000)

1.1. Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{4\sin(\frac{x^3}{6})}.$$

1.2. Si studi la funzione

$$f(x) = x^2 \log(x^2)$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

1.3. Dire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f(x) = |x|^{10\alpha}$$

è ovunque continua, e per quali è ovunque derivabile.

1.4. Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{11^x + 11^{-x}}\, dx.$$

Corso di Laurea in Chimica

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I, 11/7/2000

(A.A. 1999-2000)

1.1. Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - \frac{\sin(2x)}{x}}{\log(1+x^2)}$$

1.2. Si studi la funzione

$$f(x) = x^2(e^{|x|} + 2x^2)$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

1.3. Dire per quali valori del parametro α la funzione

$$f(x) = x^2 + \alpha \log x$$

è convessa in tutto il suo dominio.

1.4. Si trovino le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x^2}.$$

Corso di Laurea in **Chimica**
PROVA SCRITTA Settembre 2000
(A.A. 1999-2000)

1. Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}}-1\right).$$

2. Si studi la funzione

$$f(x)=|x|(\lg|x|-1)^2$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

3. Si trovi F la primitiva della funzione

$$f(x)=x\frac{\mathrm{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

tale che $F(1)=2$.

4. Discutere la continuità, la derivabilità, la monotonia e l'invertibilità della funzione

$$f(x)=\begin{cases} -\sqrt{|x|} & x\leq 0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{arcsen}(2x-1) & 0<x<1\\ 1+\sqrt{x-1} & x\geq 1.\end{cases}$$

Corsi di Laurea in Chimica e Geologia

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I, 10/10/2000

(A.A. 1999-2000)

1. Si studi la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{2(x^3 + x)}{2x + 1}}$$

e se ne tracci un grafico qualitativo *(Non si richiede lo studio della derivata seconda)*.

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi:

2.1. Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(\ln x + 1)}{x - 1}.$$

NOTA: *Si risolva preferibilmente l'esercizio usando i soli limiti notevoli.*

2.2 Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2}\, dx.$$

Si calcoli poi la primitiva della funzione integranda *(facoltativo)*.

2.3 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin(|x^2 - 4|).$$

(i) Si determini l'insieme di definizione (dominio) D della funzione f.

(ii) Dire se $x = 0$ è un maggiorante, e se è un minorante di D.

(iii) Si calcolino $\inf D$, $\sup D$, e si dica se sono rispettivamente il massimo e il minimo dell'insieme.

2.4 Risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} -s + t + 2w = 2 \\ 3s - t + w = 6 \\ -s + 3t + 4w = 4 \end{cases}$$

NOTA: *L'esercizio sarà valutato 2 punti in più se si utilizza per risolverlo il metodo di eliminazione di Gauss in avanti e all'indietro.*

Corsi di Laurea in Chimica e Geologia

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I, 5/12/2000

(A.A. 1999-2000)

1. Si studi la funzione

$$f(x) = \arctan(\log(x) + 1)$$

e se ne tracci un grafico qualitativo.

Risolvere tre a scelta dei seguenti esercizi:

2.1. Determinare i parametri reali a e b in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & se\ x \leq 0 \\ e^x & se\ x > 0 \end{cases}$$

sia derivabile su tutto $\mathbf{R}$.

2.2. Sia data la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}\, dt.$$

Si calcoli $F(2)$. Si dica anche se F è una funzione monotona, giustificando la risposta.

2.3. Si calcolino, preferibilmente nell'ordine, i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3+e^{x^2})}{x^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3+e^{x^2})}{\sqrt{6+x^2+x^4}}.$$

2.4 Si risolva il seguente sistema di equazioni lineari, utilizzando di preferenza il metodo di eliminazione di Gauss.

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = -3 \\ 3x + 2y + 4z = -9 \\ -x - 3y + z = 3 \end{cases}$$