DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Università della Basilicata
C.da Macchia Romana - 85100 POTENZA.

Teorema di esistenza e unicità per le equazioni differenziali del primo ordine

Dispensa per il corso di Analisi Matematica I per Matematici,
a.a. 2000-'01
Sisto Baldo

Questi appunti contengono la dimostrazione del Teorema di esistenza e unicità locale di una soluzione del problema di Cauchy per equazioni differenziali del primo ordine. Nei Paragrafi 1 e 2 vengono sviluppati i necessari preliminari, ovvero un minimo di teoria dello spazio delle funzioni continue, ed il Teorema delle contrazioni. Nel Paragrafo 3 viene dimostrato il Teorema di esistenza e unicità locale.

I Paragrafi 4 e 5 sono decisamente più complicati, e possono essere omessi da chi non si senta particolarmente "coraggioso". Il paragrafo 4 è dedicato alla dimostrazione del Teorema di esistenza locale di Peano: esso predica l'esistenza di soluzioni locali del problema di Cauchy, nella sola ipotesi di continuità del secondo membro dell'equazione. Come abbiamo visto a lezione, in questo caso dobbiamo rinunciare all'unicità. Il Paragrafo 5 contiene la dimostrazione del Teorema di Ascoli-Arzelà, già usato nel Paragrafo 4 per dimostrare il Teorema di Peano.

1. Preliminari: lo spazio $C^0([a,b])$ delle funzioni continue.

Consideriamo lo spazio vettoriale delle funzioni continue su $[a,b]$,

$$C^0([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbf{R} : \ f \text{ continua}\},$$

e definiamo la *distanza uniforme* tra due funzioni f e g nel modo seguente:

$$\|f-g\|_\infty = \sup\{|f(x)-g(x)| : \ x \in [a,b]\}.$$

Come si vede, la distanza uniforme non è altro che il massimo delle distanze tra i valori della funzione f e della funzione g in ogni fissato punto dell'insieme di definizione. Si noti che, nella definizione, sarebbe stato possibile prendere il massimo anziché l'estremo superiore.

Il fatto che questo oggetto si chiami *distanza* si giustifica in quanto valgono le seguenti proprietà:

- $\|f-g\|_\infty \geq 0$ per ogni $f,g \in \mathcal{C}^0([a,b])$, e $\|f-g\|_\infty = 0$ se e solo se $f=g$;
- $\|f-g\|_\infty = \|g-f\|_\infty$ per ogni $f,g \in \mathcal{C}^0([a,b])$;
- $\|f-g\|_\infty \leq \|f-h\|_\infty + \|h-g\|_\infty$ per ogni $f,g,h \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

A questo punto, diremo che una successione di funzioni continue $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{C}^0([a,b])$ *converge uniformemente* a $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ se la distanza uniforme tra f_n e f tende a 0 per $n \to +\infty$, cioè se

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Osserviamo che *se $f_n \to f$ uniformemente, allora $f_n(x) \to f(x)$ per ogni fissato $x \in [a,b]$: la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale, cioè la convergenza dei valori delle funzioni in ogni punto.* Il viceversa però è falso, come si vede dal seguente

Esempio: *Le funzioni $f_n(x) = nx\ e^{-nx}$ tendono a $f(x)=0$ per ogni fissato $x \in [0,1]$, ma è facile verificare che $\|f_n - f\|_\infty = 1/e$, per cui non c'è convergenza uniforme in $\mathcal{C}^0([0,1])$.*

In analogia con quanto abbiamo fatto con i numeri reali, possiamo definire una successione di Cauchy di funzioni continue:

Definizione 1.1: Una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{C}^0([a,b])$ si dice *di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall\ m,n \geq \nu.$$

Esattamente come in $\mathbf{R}$, abbiamo un teorema di completezza:

Teorema 1.2: *Se $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{C}^0([a,b])$ è una successione di Cauchy, allora esiste una funzione continua f tale che $f_n \to f$ uniformemente in $\mathcal{C}^0([a,b])$.*

Dim.: Fissiamo $\varepsilon > 0$, e sia $\nu \in \mathbf{N}$ come nella definizione di successione di Cauchy. Per ogni fissato $x \in [a,b]$ e per ogni coppia di indici $m,n \in \mathbf{N}$ con $m,n \geq \nu$ abbiamo

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon, \tag{1.1}$$

per cui la successione di numeri reali $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $\mathbf{R}$, ed ammette un limite che "battezziamo" $f(x)$. Se ora passiamo al limite per $m \to +\infty$ in (1.1), otteniamo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq \nu,\ \forall x \in [a,b]. \tag{1.2}$$

Passando al sup per $x \in [a,b]$, otteniamo che $f_n \to f$ uniformemente in $\mathcal{C}^0([a,b])$, e per concludere la dimostrazione dobbiamo solo far vedere che la funzione limite f è continua.

Sia $x_0 \in [a,b]$. Siccome la funzione f_ν è continua, esiste $\delta > 0$ tale che, se $x \in [a,b]$ e $|x - x_0| < \delta$, abbiamo $|f_\nu(x) - f_\nu(x_0)| < \varepsilon$. Applicando la (1.2) nei punti x_0 e x otteniamo allora

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_\nu(x)| + |f_\nu(x) - f_\nu(x_0)| + |f_\nu(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

e quindi anche f è continua in x_0.

Q.E.D.

Nota: *I prossimi due risultati sono necessari solo per la dimostrazione del Teorema di esistenza di Peano (Paragrafo 4). Se si è interessati soltanto al teorema di esistenza e unicità locale del Paragrafo 3, essi possono essere tralasciati.*

Il prossimo semplice teorema mostra come la convergenza uniforme implichi la convergenza degli integrali (cosa che sarebbe falsa con la semplice convergenza puntuale).

Teorema 1.3: *Se la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente a f in $\mathcal{C}^0([a,b])$, allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dim.: Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi, esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che, se $n > \nu$, allora $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in [a,b]$. Ne deduciamo che

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx < \varepsilon(b-a),$$

da cui la tesi.

Q.E.D.

Teorema 1.4: *Sia* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}$ *una funzione continua di due variabili. Supponiamo poi che* $u_n : [a,b] \to [c,d]$ *sia una successione di funzioni continue che converge uniformemente a* u *in* $\mathcal{C}^0([a,b])$*. Allora le funzioni* $g_n(x) = f(x, u_n(x))$ *convergono uniformemente a* $g(x) = f(x, u(x))$ *in* $\mathcal{C}^0([a,b])$*.*

Dim.: Fissiamo $\varepsilon > 0$. La funzione f, continua sul rettangolo chiuso e limitato $[a,b] \times [c,d]$, è uniformemente continua (la dimostrazione è esattamente come per le funzioni di una variabile): è possibile trovare un $\delta > 0$ tale che, se $(x_1, s_1), (x_2, s_2) \in [a,b] \times [c,d]$ e $|x_1 - x_2| < \delta$, $|s_1 - s_2| < \delta$, allora

$$|f(x_1, s_1) - f(x_2, s_2)| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Siccome $u_n \to u$ uniformemente, possiamo trovare $\nu \in \mathbf{N}$ tale che, se $n \geq \nu$, $\|u_n - u\|_\infty < \delta$.

Ma allora, usando (1.3), possiamo concludere che per ogni $n \geq \nu$ e per ogni $x \in [a,b]$ si ha

$$|f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))| < \varepsilon,$$

da cui $\|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_\infty < \varepsilon$.

Q.E.D.

2. Il teorema delle contrazioni.

Data una funzione $T : A \to A$ il cui dominio coincide col codominio, un *punto fisso* per T è un punto che non viene "spostato" dalla funzione, cioè un punto $a \in A$ tale che $T(a) = a$.

Invece, una funzione $T : \mathcal{C}^0([a,b]) \to \mathcal{C}^0([a,b])$ si dice *contrazione* se *riduce le distanze*, cioè se esiste una costante $L \in (0,1)$ tale che

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq L\|f - g\|_\infty \qquad \forall f, g \in \mathcal{C}^0([a,b]).$$

Vale il seguente

Teorema 2.1 (delle contrazioni): *Una contrazione $T : \mathcal{C}^0([a,b]) \to \mathcal{C}^0([a,b])$ ammette un unico punto fisso, cioè esiste un'unica funzione $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ tale che $T(f) = f$.*

Dim: Fissiamo una *qualunque* funzione $f_0 \in \mathcal{C}^0([a,b])$, e definiamo per ricorrenza una successione di funzioni ponendo $f_{n+1} = T(f_n)$ per $n \geq 0$. Dimostriamo che la successione f_n è di Cauchy, e che converge proprio al punto fisso di T che stiamo cercando.

Intanto, applicando ripetutamente la definizione di contrazione abbiamo

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty = \|T(f_n) - T(f_{n-1})\|_\infty \leq L\|f_n - f_{n-1}\|_\infty \leq \cdots \leq L^n\|f_1 - f_0\|_\infty.$$

Dalla terza proprietà della distanza uniforme (nota come disuguaglianza triangolare) otteniamo poi che, per ogni $n, k \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad & \|f_{n+k} - f_n\|_\infty \leq \\ & \|f_{n+k} - f_{n+k-1}\|_\infty + \|f_{n+k-1} - f_{n+k-2}\|_\infty + \cdots + \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \\ & (L^{n+k-1} + L^{n+k-2} + \cdots + L^n)\|f_1 - f_0\|_\infty = \\ & L^n\,(L^{k-1} + L^{k-2} + \cdots + L + 1)\|f_1 - f_0\|_\infty = L^n\frac{1 - L^k}{1 - L}\|f_1 - f_0\|_\infty \leq \\ & \frac{L^n}{1 - L}\|f_1 - f_0\|_\infty.\end{aligned}$$

Nelle ultime due righe, si è usata la formula per la somma di una progressione geometrica, e il fatto che $0 < L < 1$.

Ora, poiché $L < 1$, L^n può essere reso piccolo quanto si vuole, e da (2.1) deduciamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in N$ tale che, se $n \geq \nu$ e k è qualunque, allora

$$\|f_{n+k} - f_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Dunque, la successione $\{f_n\}$ è di Cauchy, e per il Teorema 1.2 converge uniformemente ad una funzione $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

Dico che f è un punto fisso per T: infatti,

$$\begin{aligned}
&\|T(f) - f\|_\infty \leq \\
&\|T(f) - T(f_n)\|_\infty + \|T(f_n) - f_n\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \leq \\
&(L+1)\|f_n - f\|_\infty + \|f_{n+1} - f_n\|_\infty,
\end{aligned}$$

e abbiamo visto sopra che le quantità nell'ultima espressione tendono entrambe a zero per $n \to +\infty$. Dunque $\|T(f) - f\|_\infty = 0$ e $T(f) = f$.

Mostriamo infine che f è l'*unico* punto fisso di T: sia infatti $g \in \mathcal{C}^0([a,b])$ un punto fisso. Abbiamo

$$\|f - g\|_\infty = \|T(f) - T(g)\|_\infty \leq L\|f - g\|_\infty,$$

il che è possibile se e solo se $\|f - g\|_\infty = 0$, poichè $L < 1$. Quindi, $f = g$.

Q.E.D.

Osservazione 2.2: Il teorema continua a valere anche se T è una contrazione $T : X \to X$, con

$$X = \{f \in \mathcal{C}^0([a,b]) : \ f(x) \in [c,d] \text{ per ogni } x \in [a,b]\}$$

La dimostrazione del risultato è identica a quella appena vista. Si noti però che è importante supporre che l'intervallo $[c,d]$ sia *chiuso*: questo serve a garantire che la funzione f, limite uniforme della successione $\{f_n\}$ introdotta nella nostra dimostrazione, faccia ancora parte dell'insieme X.

3. Il teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy.

Consideriamo ora il problema di Cauchy del primo ordine

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

dove f è una data funzione continua di due variabili definita in un intorno di (t_0, x_0).

Supponiamo di avere una soluzione $x(t)$ di (3.1), e integriamo ambo i membri dell'equazione tra t_0 e t, tenendo conto della condizione iniziale. Otteniamo l'identità

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \tag{3.2}$$

valida per tutti i t in cui è definita la soluzione.

Vale anche il viceversa:

Proposizione 3.1: *Sia $x \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ una funzione per cui vale l'identità integrale (3.2). Allora $x(t)$ è derivabile, ed è una soluzione del problema di Cauchy (3.1) nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.*

Dim.: Sostituendo $t = t_0$ in (3.2) si ottiene la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$. Inoltre, a secondo membro abbiamo l'integrale tra t_0 e t di una funzione continua: per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, la derivata di questa quantità è $f(t, x(t))$, e quindi $x(t)$ è derivabile e soddisfa l'equazione differenziale in (3.1).

Q.E.D.

Siamo finalmente in grado di dimostrare un Teorema di esistenza e unicità locale per il nostro problema di Cauchy:

Teorema 3.2: *Sia $f : [t_0 - R, t_0 + R] \times [x_0 - R, x_0 + R] \to \mathbf{R}$ una funzione continua soddisfacente alla seguente condizione di Lipschitz: esiste $L > 0$ tale che*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \forall t \in [t_0 - R, t_0 + R],\ \forall x_1, x_2 \in [x_0 - R, x_0 + R].$$

Allora è possibile trovare un $\delta \in (0, R]$, tale che nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ esiste una soluzione del problema di Cauchy (3.1). Inoltre, tale soluzione è unica.

Dim.: Grazie alla Proposizione 3.1, basta in realtà cercare soluzioni continue dell'equazione integrale (3.2).

Per il teorema di Weierstrass, la funzione continua $|f(x,t)|$ ammette massimo sul rettangolo $[t_0 - R, t_0 + R] \times [x_0 - R, x_0 + R]$: chiamiamo M tale massimo. Poniamo poi

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{R, \frac{1}{L}, \frac{R}{M}\}. \tag{3.3}$$

Definiamo un'applicazione T che ad ogni elemento dell'insieme di funzioni

$$X = \left\{ x \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) : \ x(t) \in [x_0 - R, x_0 + R] \ \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \right\}$$

ne associa un'altra che chiamiamo $T(x)$:

$$(T(x))(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \, ds. \tag{3.4}$$

Chiaramente, per ogni $x \in X$ la funzione $T(x)$ è continua (ed anzi derivabile). Verifichiamo che, in realtà, $T : X \to X$ ed *è una contrazione.*

Intanto, se $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ abbiamo

$$|(T(x))(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))| \, ds \right| \leq M \cdot \delta \leq \frac{R}{2}$$

grazie a (3.3). Dunque $(T(x))(t) \in [x_0 - R, x_0 + R]$, e effettivamente $T : X \to X$.

Inoltre, se $x_1(t), x_2(t) \in X$:

$$|(T(x_1))(t) - (T(x_1))(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| \, ds \right| \leq$$
$$\left| \int_{t_0}^{t} L|x_1(s) - x_2(s)| \, ds \right| \leq L \cdot \delta \|x_1 - x_2\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_\infty.$$

Passando al sup per $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ abbiamo allora

$$\|T(x_1) - T(x_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_\infty,$$

e T è una contrazione di X in X.

Il Teorema 2.1 e l'Osservazione 2.2 ci dicono allora che T ha un unico punto fisso: esso è evidentemente l'unica soluzione dell'equazione integrale (3.2), e quindi del problema di Cauchy (3.1).

Q.E.D.

4. Il Teorema di Peano: esistenza per il problema di Cauchy se f non soddisfa una condizione di Lipschitz.

Il Torema 3.2 di esistenza e unicità non vale più se $f(t,x)$ è continua sul rettangolo $[t_0-R,t_0+R]\times[x_0-R,x_0+R]$, ma *non soddisfa una condizione di Lipschitz* nella seconda variabile. Per esempio, è facile vedere che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ammette *infinite soluzioni* ("baffo di Peano").

D'altra parte, continua ad esserci un risultato di *esistenza locale*:

Teorema 4.1 (Peano): *Sia $f:[t_0-R,t_0+R]\times[x_0-R,x_0+R]\to\mathbf{R}$ una funzione continua. E' possibile trovare un $\delta\in(0,R]$, tale che nell'intervallo $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ esiste una soluzione del problema di Cauchy (3.1). Tale soluzione non è necessariamente unica.*

Dim.: Questa dimostrazione usa in modo essenziale il Teorema di Ascoli Arzelà, che verrà dimostrato nel Paragrafo 5.

Anche se la dimostrazione è piuttosto complessa, l'idea di base è semplice: supponendo che una soluzione esista, possiamo tentare di approssimarla con una successione di funzioni lineari a tratti note come *spezzate di Eulero.* Dimostreremo poi che, in effetti, c'è una sottosuccessione delle spezzate di Eulero che converge uniformemente ad una funzione continua, e che questa funzione continua soddisfa l'equazione integrale (3.2), e quindi il problema di Cauchy (3.1).

Cominciamo con l'introdurre alcuni parametri necessari: come nella dimostrazione del Teorema 3.2, sia M il massimo della funzione $|f(t,x)|$ sul quadrato $[t_0-R,t_0+R]\times[x_0-R,x_0+R]$. Ne consegue che un'eventuale soluzione contenuta nel quadrato avrà derivata compresa tra $-M$ e M, e sarà quindi contenuta tra le rette $x=x_0-M(t-t_0)$ e $x=x_0+M(t-t_0)$.

Quindi, per evitare che la candidata soluzione del problema di Cauchy che andiamo a costruire *esca dal quadrato*, poniamo

$$\delta=\min\{R,\frac{R}{M}\}. \tag{4.1}$$

Costruiamo ora delle *soluzioni approssimate* $x_n(t)$ del nostro problema, lineari a tratti sull'intervallo $[0,\delta]$. Il discorso si estende poi in maniera del tutto analoga all'intervallo $[-\delta,0]$ (esercizio!).

L'idea è la seguente: anche se non conosciamo una soluzione, l'equazione differenziale ne prescrive la retta tangente nel punto t_0: essa è data da

$$x=x_0+f(t_0,x_0)(t-t_0).$$

Per un breve tratto, diciamo tra t_0 e $t_0 + \frac{1}{n}$, tale retta sarà una *discreta approssimazione* della soluzione. A questo punto, andiamo a vedere quanto vale f nel punto dove siamo arrivati (cioè in $(t_0 + \frac{1}{n}, x_0 + f(t_0, x_0) \cdot \frac{1}{n})$, e prendiamo questo valore come *pendenza di una nuova retta approssimante tra* $t_0 + \frac{1}{n}$ *e* $t_0 + \frac{2}{n}$. Procedendo in questo modo arriveremo a costruire una spezzata, definita sull'intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$, che chiameremo *n-esima spezzata di Eulero*.

Più formalmente, possiamo dire che l'n-esima spezzata di Eulero è l'unica funzione continua $x_n : [t_0, t_0 + \delta] \to [x_0 - R, x_0 + R]$ tale che

$$x_n(0) = x_0, \tag{4.2}$$

$$\text{se } t \in \Big(t_0 + \frac{i}{n}, t_0 + \frac{i+1}{n}\Big],\ i = 0, \ldots, [n\delta],\ \textit{allora} \tag{4.3}$$

$$x_n(t) = x_n\Big(t_0 + \frac{i}{n}\Big) + f\Big(t_0 + \frac{i}{n}, x_n\Big(t_0 + \frac{i}{n}\Big)\Big) \cdot \Big(t - t_0 - \frac{i}{n}\Big).$$

In (4.3), $[n\delta]$ denota la parte intera di $n\delta$, cioè il numero di tratti lunghi $\frac{1}{n}$ necessari a "completare" la nostra spezzata tra t_0 e $t_0 + \delta$.

La nostra legittima speranza è che, al crescere di n, queste spezzate approssimino sempre meglio una soluzione del problema di Cauchy (3.1).

Notiamo che, per costruzione, $\{x_n\}$ è una successione di funzioni lineari a tratti definite sull'intervallo $[t_0, t_0+\delta]$ e a valori nell'intervallo $[x_0-R, x_0+R]$. Inoltre, la *derivata* di tutte queste funzioni è ovunque compresa tra $-M$ e M. Dunque, se $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \delta]$ abbiamo

$$|x_n(t_2) - x_n(t_1)| = |\int_{t_1}^{t_2} x_n'(s)\, ds| \le M|t_2 - t_1|, \tag{4.4}$$

e le x_n soddisfano tutte una condizione di Lipschitz con la stessa costante M.

Allora, per il Teorema 5.1 (di Ascoli-Arzelà), esiste una funzione continua $x(t)$, e una sottosuccessione $\{x_{n_k}(t)\}$ di $\{x_n(t)\}$ tale che $x_{n_k} \to x$ uniformemente in $\mathcal{C}^0([t_0, t_0 + \delta])$.

Mostiamo che $x(t)$ soddisfa l'eqauzione integrale (3.2), e dunque è la nostra agognata soluzione.

Intanto,

$$\begin{aligned} x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} x_n'(s)\, ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds + R_n(t) \end{aligned} \tag{4.5}$$

dove $R_n(t) = \int_{t_0}^t [x_n'(s) - f(s, x_n(s))]\, ds$.

Se definiamo

$$\omega_n = \sup\left\{|f(t,x_1)-f(t,x_2)| :\ t \in [0,\delta],\ x_1, x_2 \in [x_0-R, x_0+R],\ |x_2-x_1| < \frac{M}{n}\right\},$$

l'uniforme continuità di f (vedi dimostrazione del Teorema 1.4) ci dice che $\omega_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Evidentemente:

$$|R_n(t)| \leq \int_{t_0}^{t_0+\delta} |x_n'(s) - f(s, x_n(s)|\, ds. \tag{4.6}$$

Nell'ultimo integrale, consideriamo l'integranda nel generico intervallino $[t_0 + \frac{i}{n}, t_0 + \frac{i+1}{n}]$, $i = 0, \ldots, [n\delta]$: si ha

$$|x_n'(s) - f(s, x_n(s)| = |f\Big(t_0 + \frac{i}{n}, x_n(t_0 + \frac{i}{n})\Big) - f(s, x_n(s)| \leq \omega_n,$$

dove abbiamo usato (4.4) e la definizione di ω_n. Usando questa stima in (4.6) otteniamo allora $|R_n(t)| \leq \delta \cdot \omega_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Allora, usando (4.5), il Teorema 1.4 ed il Teorema 1.3 otteniamo

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}(t) = \\ &\lim_{k\to+\infty} \Big(x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n_k}(s))\, ds + R_{n_k}(t)\Big) = \\ &x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds, \end{aligned}$$

e l'equazione integrale (3.2) è soddisfatta.

Q.E.D.

5. Il Teorema di Ascoli-Arzelà.

Il Teorema di Ascoli-Arzelà è una specie di analogo del Teorema di Bolzano-Weierstrass per lo spazio delle funzioni continue: ci fornisce una condizione sufficiente per poter dire che una successione di funzioni continue ammette una sottosuccessione che converge uniformemente.

Teorema 5.1 (di Ascoli-Arzelà): *Sia* $f_n : [a,b] \to [c,d]$ *una successione di funzioni continue, tutte a valori nello stesso intervallo chiuso e limitato* $[c,d]$*. Supponiamo anche che le funzioni* f_n *siano equilipschitziane, cioè che esista una costante* L *tale che*

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x-y| \qquad \forall x, y \in [a,b] \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Allora esiste una funzione continua $f : [a,b] \to [c,d]$ *ed una successione crescente* n_k *di numeri naturali tali che* $f_{n_k} \to f$ *uniformemente in* $\mathcal{C}^0([a,b])$*.*

Dim:
Supponiamo per semplicità $[a,b] = [0,1]$: la dimostrazione si adatta in modo ovvio al caso generale.

Dividiamo il nostro ragionamento in due passi. Nel primo, troviamo una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_k$ tale che la successione numerica $f_{n_k}(x)$ converga puntualmente ad un certo numero $f(x)$ *in tutti i punti* x *del tipo* $\frac{i}{2^n}$ *(*$n \in \mathbf{N}$*,* $i = 0, 1, \ldots, 2^n$*)*: questi punti sono noti come *razionali binari*, e sono un sottinsieme denso di $[0,1]$. Nel secondo passo, dimostriamo che in realtà la successione $\{f_{n_k}\}_k$ trovata nel passo precedente è di Cauchy in $\mathcal{C}^0([0,1])$, e quindi converge uniformemente ad una certa funzione continua f (grazie al Teorema 1.2).

Passo I:
Sia $\{x_j\}_{j \in \mathbf{N}} \subset [0,1]$ la successione numerica

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}, \frac{1}{32}, \frac{3}{32} \ldots$$

Tale successione fornisce un modo di "enumerare" tutti i razionali binari: essa è un'applicazione iniettiva e suriettiva di $\mathbf{N}$ nell'insieme dei razionali binari.

Consideriamo la successione *numerica* $\{f_n(x_0)\}_n = \{f_n(0)\}_n$: essa è una successione di *numeri reali* contenuta nell'intervallo *chiuso e limitato* $[c,d]$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, possiamo estrarre una sottosuccessione, che chiamiamo $\{f_n^0\}_n$, in modo che $f_n^0(x_0)$ converga ad un numero reale $f(x_0)$.

Consideriamo ora la successione numerica $\{f_n^0(x_1)\}_n$: essa è una sottosuccessione di $\{f_n(x_1)\}_n$, e come tale è ancora contenuta nell'intervallo $[c,d]$. Possiamo allora estrarre un'ulteriore sottosuccessione $\{f_n^1\}_n$ in modo che $f_n^1(x_1)$ converga ad un numero reale che chiameremo $f(x_1)$.

Procedendo ricorsivamente in questo modo, da $\{f_n\}_n$ estraiamo una successione infinita di sottosuccessioni $\{f_n^0\}_n$, $\{f_n^1\}_n$, $\{f_n^2\}_n$, $\{f_n^3\}_n$, $\{f_n^4\}_n$, $\{f_n^5\}_n$, ..., $\{f_n^k\}_n$, ...

La k-esima sottosuccessione $\{f_n^k\}_n$ ha la proprietà che per $i = 0, 1, 2, ..., k$ esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} f_n^k(x_i),$$

e tale limite è uguale ad un certo numero reale che chiamiamo $f(x_i)$.

Noi, però, vogliamo un'*unica sottosuccessione* $\{\widetilde{f}_n\}_n$ che converga in *tutti i punti x_i contemporaneamente*. Essa puo' essere ottenuta con il vecchio trucco della *successione diagonale*: poniamo $\widetilde{f}_n = f_n^n$ (cioè, l'n-esimo elemento della sottosuccessione diagonale $\widetilde{f}_n$ è l'n-esimo elemento dell'n-esima sottosuccessione che abbiamo estratto sopra).

In questo modo, comunque si fissi k, $\widetilde{f}_n$ è una sottosuccessione di $\{f_n^k\}$ per $n \geq k$, e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{f}_n(x_i) = f(x_i) \qquad \forall i \in \mathbf{N}.$$

Questo conclude la dimostrazione del *Passo I.*

Passo II:
Ora abbiamo una sottosuccessione $\{\widetilde{f}_n\}$ che converge puntualmente ad una funzione limite f sul solo insieme dei razionali binari in $[0,1]$.

La funzione f, pur essendo definita solo sui razionali binari, soddisfa la stessa condizione di Lipschitz delle f_n: se x_i, x_j sono due razionali binari abbiamo

$$|f(x_i) - f(x_j)| = \lim_{n\to+\infty} |\widetilde{f}(x_i) - \widetilde{f}(x_j)| \leq L|x_i - x_j|.$$

Per far vedere che la successione $\{\widetilde{f}_n\}_n$ è di Cauchy in $\mathcal{C}^0([0,1])$, fissiamo $\varepsilon > 0$. Scegliamo $N \in \mathbf{N}$ in modo che

$$\frac{1}{2^N} \leq \frac{\varepsilon}{4L}. \tag{5.1}$$

Poichè sappiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{f}_n\Big(\frac{i}{2^N}\Big) = f\Big(\frac{i}{2^N}\Big), \quad i = 0, ..., 2^N,$$

possiamo trovare $\nu \in \mathbf{N}$ in modo che per ogni $n \geq \nu$

$$(5.2) \qquad |\widetilde{f}_n\Big(\frac{i}{2^N}\Big) - f\Big(\frac{i}{2^N}\Big)| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad i = 0, ..., 2^N.$$

Sia ora $x \in [0,1]$ qualunque, e scegliamo $i \in \{0, 1, ..., 2^N\}$ in modo che $|x - i/2^N| < 1/2^N$. Allora, se $m, m \geq \nu$ e tenendo conto di (5.1), (5.2) abbiamo

$$\begin{aligned}
&|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}_m(x)| \leq \\
&|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}_n(i/2^N)| + |\widetilde{f}_n(i/2^N) - \widetilde{f}(i/2^N)| + |\widetilde{f}(i/2^N) - \widetilde{f}_m(i/2^N)| + \\
&|\widetilde{f}_m(i/2^N) - \widetilde{f}_m(x)| \leq \\
&L|x - i/2^N| + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + L|x - i/2^N| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Passando al sup per $x \in [0,1]$ otteniamo infine

$$\|\widetilde{f}_n - \widetilde{f}_m\|_\infty \leq \varepsilon \qquad \forall m, n \geq \nu,$$

e grazie al Teorema 1.4 la successione di Cauchy $\{\widetilde{f}_n\}$ converge uniformemente ad una funzione continua.

Q.E.D.