

# Diario del Corso di Analisi Matematica II - Mod. 2

**Corso di Laurea:** Matematica Applicata

**Docente:** Sisto Baldo

*ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso vuole essere un riassunto abbastanza dettagliato di quello che è stato detto in aula, e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione. D'altra parte, queste brevi paginette NON possono sostituire completamente un libro di testo, la lezione in aula o un'interazione diretta con il docente o l'esercitatore: siete quindi invitati a servirvi ANCHE di queste altre opportunità per approfondire le vostre conoscenze!*

# Indice

- 1 Lezione del 6/12/2015 (2 ore) 4**  
*Misura di Lebesgue: motivazione, ripasso sulla misura di Peano Jordan, misura esterna di Lebesgue. Prime proprietà della misura esterna di Lebesgue.*
- 2 Lezione del 7/12/2016 (1 ora) 8**  
*Misure esterne astratte. Insiemi misurabili secondo Caratheodory. Proprietà della misura sugli insiemi misurabili.*
- 3 Lezione del 13/12/2015 (2 ore) 11**  
*Dimostrazione del teorema sugli insiemi misurabili e sulle proprietà della misura sugli insiemi misurabili. Regolarità della misura di Lebesgue.*
- 4 Lezione del 15/12/2016 (2 ore) 14**  
*Esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue. Funzioni misurabili e loro stabilità.*
- 5 Lezione del 16/12/2016 (3 ore) 18**  
*Funzioni semplici e loro integrale. Approssimazione di funzioni misurabili non negative con funzioni semplici. Integrale di Lebesgue di funzioni misurabili non negative. Teorema di Beppo Levi. Lemma di Fatou. Integrale di funzioni di segno qualunque. Teorema della convergenza dominata di Lebesgue.*
- 6 Lezione del 20/12/2016 (2 ore) 23**  
*Qualche conseguenza dei teoremi di convergenza integrale. Proprietà vere "quasi ovunque". Confronto con l'integrale di Riemann. Lo spazio  $L^2$  delle funzioni a quadrato sommabile. Teorema di Fubini (senza dimostrazione).*
- 7 Lezione del 21/12/2016 (1 ora) 29**  
*Equazioni differenziali ordinarie: forma integrale del problema di Cauchy. Teorema di Cauchy-Lipschitz: enunciato.*
- 8 Lezione del 22/12/2016 (2 ore) 31**  
*Teorema di Cauchy-Lipschitz: dimostrazione. Prolungabilità delle soluzioni locali e soluzioni massimali. Esistenza e unicità per i sistemi di equazioni ordinarie.*
- 9 Lezione del 10/1/2017 (2 ore) 35**  
*Un risultato di esistenza globale. Equazioni lineari di ordine  $n$ : esistenza e unicità globale per il problema di Cauchy. Equazioni lineari omogenee:*

*struttura dell'insieme delle soluzioni. Equazioni lineari complete: struttura dell'insieme delle soluzioni. Metodo della variazione delle costanti.*

**10 Lezione del 12/1/2017 (2 ore) 40**

*Dimostrazione del metodo della variazione delle costanti. Esponenziale complesso. Soluzione generale di equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti.*

**11 Lezione del 13/1/2017 (3 ore) 44**

*Metodo di somiglianza o degli annihilatori o dei coefficienti indeterminati. Serie di Fourier di una funzione  $2\pi$ -periodica: definizione e considerazioni euristiche. Relazioni di ortogonalità per seni e coseni. Alcuni risultati di convergenza (in  $L^2$ , puntuale, uniforme).*

**12 Lezione del 17/1/2017 (2 ore) 52**

*Risoluzione per separazione di variabili dell'equazione del calore e dell'equazione della corda vibrante.*

# 1 Lezione del 6/12/2015 (2 ore)

La prima parte delle mie lezioni è dedicata all'introduzione della teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue. Contestualmente, e con poco o nessuno sforzo aggiuntivo, avremo modo di familiarizzarci anche con la teoria della misura (e dell'integrazione) astratte.

Nelle lezioni di Giandomenico Orlandi avete (sostanzialmente) incontrato la *misura di Peano-Jordan*, che è probabilmente uno dei modi più semplici di definire in modo rigoroso l'area di un sottinsieme del piano (il volume di un sottinsieme dello spazio...)

Ricordiamo alcune definizioni rilevanti:

**DEFINIZIONE:** Un *intervallo* o *rettangolo* in  $\mathbf{R}^n$  è un sottinsieme  $I \subset \mathbf{R}^n$  che sia prodotto cartesiano di intervalli unidimensionali:  $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$ . Gli intervalli unidimensionali di cui si fa il prodotto possono essere anche chiusi, oppure chiusi in una sola delle due estremità. La *misura* di un intervallo  $I$  è per definizione il numero

$$|I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Si vede subito che per  $n = 2$  il nostro intervallo è un rettangolo con lati paralleli agli assi, e la sua misura coincide con l'area. Invece, per  $n = 3$ ,  $I$  sarà un parallelepipedo e la sua misura coincide con il volume.

Gli insiemi *misurabili secondo Peano-Jordan* sono insiemi la cui area si approssima bene, sia da fuori che da dentro, con unioni finite di intervalli.

**DEFINIZIONE (Insieme misurabile secondo Peano-Jordan):** Un sottinsieme  $A \subset \mathbf{R}^n$  si dice misurabile secondo Peano-Jordan se è limitato e per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono un numero finito di intervalli  $I_1, \dots, I_N, J_1, \dots, J_K \subset \mathbf{R}^n$  tali che gli  $I_i$  hanno due a due in comune solo punti della frontiera, i  $J_i$  hanno due a due in comune solo punti della frontiera,

$$\bigcup_{i=1}^N I_i \subset A \subset \bigcup_{i=1}^K J_i$$

e infine

$$\sum_{i=1}^K |J_i| - \sum_{i=1}^N |I_i| \leq \varepsilon.$$

In tal caso, la *misura di Peano-Jordan* di  $A$  si definisce come

$$\begin{aligned} |A| &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^N |I_i| : I_i \text{ due a due con interni disgiunti, } \bigcup_{i=1}^N I_i \subset A \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^K |J_i| : J_i \text{ due a due con interni disgiunti, } \bigcup_{i=1}^K J_i \supset A \right\}. \end{aligned}$$

È facile vedere che un rettangolo è misurabile secondo Peano-Jordan, mentre l'insieme dei punti a coordinate razionali di un rettangolo non lo è. Nel piano, il *trapezoide* sotteso ad una funzione di una variabile integrabile secondo Riemann è misurabile secondo Peano-Jordan, e la sua misura è data proprio dall'integrale. Sono anche misurabili secondo Peano-Jordan gli insiemi dati dalla parte di piano compresa tra i grafici di due funzioni di una variabile integrabili secondo Riemann:

*ESERCIZIO:* Siano  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  due funzioni di una variabile, integrabili secondo Riemann e con  $g(x) \leq h(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Consideriamo l'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq h(x)\}$ . Mostrare che  $A$  è misurabile secondo Peano-Jordan e si ha

$$|A| = \int_a^b (h(x) - g(x)) dx.$$

Un insieme  $A$  di questo tipo si chiama *semplice rispetto all'asse delle  $x$* ... Gli insiemi semplici rispetto all'asse delle  $y$  si definiscono in modo analogo, e ci sono anche naturali generalizzazioni in dimensione più alta.

La misura di Peano-Jordan è un ottimo oggetto, che però si comporta male rispetto ad operazioni *numerabili*: se è vero che l'unione di un numero finito di insiemi misurabili secondo P.-J. rimane misurabile, questo non è vero per unioni numerabili (un'unione numerabile di *punti* può dare un insieme non misurabile: un esempio è l'insieme dei punti con coordinate razionali in un rettangolo). Per questa ed altre ragioni, risulta utile definire una nozione più generale di misura, che sarà appunto la misura di Lebesgue.

Siamo ora in grado di definire la *misura esterna di Lebesgue* di un sottinsieme di  $\mathbf{R}^n$ : l'idea è molto simile a quella della definizione della misura di Peano-Jordan, solo che useremo unioni numerabili anziché unioni finite di intervalli.

*DEFINIZIONE (Misura esterna di Lebesgue):* Se  $A \subset \mathbf{R}^n$ , la sua *misura esterna di Lebesgue* si definisce come

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : I_i \text{ intervalli, } \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset A \right\}.$$

Si noti che non richiediamo che gli intervalli abbiano parti interne disgiunte. Inoltre, consideriamo anche l'insieme vuoto come intervallo degenere, in modo da poter considerare anche ricoprimenti finiti.

La misura esterna di Lebesgue gode delle seguenti proprietà elementari:

*TEOREMA (Proprietà elementari della misura esterna di Lebesgue):* Sia  $m : \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  la misura esterna di Lebesgue<sup>1</sup>. Valgono i fatti seguenti:

(i)  $m(\emptyset) = 0$ ,  $m(\{x\}) = 0$  per ogni  $x \in \mathbf{R}^n$ .

(ii) Se  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , con  $A, A_1, A_2, \dots \subset \mathbf{R}^n$ , allora

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

(numerabile subadditività della misura di Lebesgue). In particolare, se  $A \subset B$  vale  $m(A) \leq m(B)$  (monotonia della misura di Lebesgue).

(iii) Nella definizione della misura esterna di Lebesgue, non è restrittivo chiedere che gli intervalli  $I_i$  siano tutti aperti.

(iv)  $m(I) = |I|$  per ogni intervallo  $I \subset \mathbf{R}^n$ . Inoltre,  $m(\mathbf{R}^n) = +\infty$ .

*DIM.:* La (i) è lasciata come facile esercizio. Per quanto riguarda la (ii), è importante fare un'osservazione preliminare che ricorre in tutta la teoria della misura: la somma di una serie di numeri non negativi (che ovviamente può essere  $+\infty$ ) non cambia se si permuta l'ordine degli addendi della serie (per esercizio si provi a dimostrare questo fatto, che è falso per le serie a termini di segno qualunque che non siano assolutamente convergenti).

Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e un indice  $i$ : per definizione di inf possiamo trovare una successione di intervalli  $\{I_j^i\}_j$  tali che  $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^i \supset A_i$  e

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j^i| < m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Allora  $\{I_j^i\}_{i,j}$  è un ricoprimento numerabile di  $A$  fatto di intervalli, e per definizione di misura di Lebesgue abbiamo

$$m(A) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |I_j^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |I_j^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} (m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) + \varepsilon,$$

---

<sup>1</sup> $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$  denota l'insieme delle parti di  $\mathbf{R}^n$ , ossia l'insieme di tutti i sottinsiemi di  $\mathbf{R}^n$ .

da cui segue (ii) perché  $\varepsilon$  può essere preso arbitrariamente piccolo.

La monotonia è conseguenza immediata della subadditività numerabile.

Dimostriamo (iii): se  $A \subset \mathbf{R}^n$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  possiamo trovare degli intervalli  $I_j$  tali che  $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset A$  e

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < m(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per ogni  $j = 1, 2, \dots$  sia  $I'_j \supset I_j$  un intervallo *aperto* di poco più grande, scelto in modo che  $|I'_j| < |I_j| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ . Allora

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I'_j| < \sum_{j=1}^{\infty} (|I_j| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}) < m(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

e (iii) è dimostrata.

Sorpontentemente, la (iv) è la proprietà più difficile da dimostrare. Grazie alla (iii), essa segue immediatamente dal seguente

*LEMMA: Se  $I$  è un intervallo, allora per ogni successione di intervalli  $I_j$  aperti con  $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset I$  si ha*

$$(*) \quad |I| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|.$$

La (\*) è dimostrabile abbastanza facilmente se gli  $I_j$  sono in numero finito, lo è meno nel caso generale di un ricoprimento numerabile. Se però  $J \subset I$  è un intervallo *chiuso e limitato*, possiamo dire che esiste un numero finito di intervalli  $I_1, I_2, \dots, I_N$  del nostro ricoprimento di  $I$  tali che  $J \subset \bigcup_{j=1}^N I_j$ .

Dimostriamo per assurdo la validità di questa affermazione: se così non fosse, per ogni  $n \in \mathbf{N}$  potremmo trovare  $x_n \in J \setminus \bigcup_{j=1}^n I_j$ . Grazie al teorema di Bolzano-Weierstrass, esisterebbe una sottosuccessione  $x_{n_k} \rightarrow \bar{x} \in J$  (grazie alla chiusura di  $J$ ). Siccome gli  $I_j$  ricoprono  $J$ , esisterebbe  $\bar{n}$  tale che  $\bar{x} \in I_{\bar{n}}$ . Ma  $I_{\bar{n}}$  è aperto: ne deriverebbe che  $x_{n_k} \in I_{\bar{n}} \subset \bigcup_{j=1}^n I_j$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ , il che è evidentemente assurdo<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Come vedrete nel secondo semestre studiando un po' di topologia generale, abbiamo dimostrato che  $J$  è *compatto per ricoprimenti*.

Poiché la (\*) è vera per i ricoprimenti finiti, se ne deduce che

$$|J| \leq \sum_{j=1}^N |I_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|.$$

Poiché la misura di  $J$  può essere presa vicina quanto si vuole alla misura di  $I$ , (\*) risulta dimostrata. Q.E.D.

Come immediata conseguenza del nostro teorema, vediamo che un sottinsieme *numerabile* di  $\mathbf{R}^n$  ha misura zero: infatti, un punto di  $\mathbf{R}^n$  ha evidentemente misura di Lebesgue zero e la nostra affermazione segue dalla numerabile subadditività.

## 2 Lezione del 7/12/2016 (1 ora)

La misura esterna di Lebesgue è un importante caso particolare di un oggetto astratto più generale, chiamato misura esterna:

*DEFINIZIONE (Misura esterna):* Una *misura esterna* su un insieme  $X$  è una funzione  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  tale che  $\mu(\emptyset) = 0$  e che sia numerabilmente subadditiva: se  $A, A_1, A_2, A_3, \dots \subset X$  e  $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ , allora

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Dalla numerabile subadditività segue che  $\mu$  è monotona: se  $A \subset B$  allora  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

Un esempio di misura esterna diversa dalla misura di Lebesgue è la *restrizione* della misura di Lebesgue a un sottinsieme  $A_0 \subset \mathbf{R}^n$ : questa è la misura  $\tilde{m}$  definita da

$$\tilde{m}(A) := m(A \cap A_0).$$

Un altro esempio è la misura  $\delta_0$  (*delta di Dirac centrata in 0*), misura su  $\mathbf{R}^n$  definita da

$$\delta_0(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in A, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ancora, è una misura esterna la “*misura che conta*” definita da

$$\#(A) = \begin{cases} \text{numero degli elementi di } A & \text{se } A \text{ è finito,} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



In generale, si può dire che la misura di Lebesgue non ha buone proprietà su *tutti* i sottinsiemi di  $\mathbf{R}^n$ : essa mostra un comportamento assai più simpatico e desiderabile su una particolare classe di insiemi, detti *misurabili*:

*DEFINIZIONE (Insiemi misurabili secondo Lebesgue, definizione di Carathéodory)*: Un sottinsieme  $A \subset \mathbf{R}^n$  si dice *misurabile secondo Lebesgue* o *m-misurabile* se vale l'uguaglianza

$$m(T) = m(T \cap A) + m(T \setminus A)$$

per ogni sottinsieme  $T \subset \mathbf{R}^n$ . In sostanza, chiediamo che  $A$  “spezzi bene” la misura di ogni insieme di  $\mathbf{R}^n$ .

Si noti che grazie alla numerabile subadditività della misura esterna abbiamo sempre  $m(T) \leq m(T \cap A) + m(T \setminus A)$ : è quindi sufficiente verificare che valga la disuguaglianza opposta

$$m(T) \geq m(T \cap A) + m(T \setminus A) \quad \forall T \subset \mathbf{R}^n.$$

Analogamente, data una misura esterna  $\mu$ ,  $A$  si dice  $\mu$ -misurabile se  $\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$  per ogni  $T \subset \mathbf{R}^n$ .

*OSSERVAZIONE*: In seguito ci sarà utile il seguente fatto: se  $A \subset \mathbf{R}^n$  è misurabile secondo Lebesgue e  $\tilde{m}$  denota la restrizione della misura di Lebesgue ad un *qualunque* insieme  $A_0 \subset \mathbf{R}^n$ , allora  $A$  è anche  $\tilde{m}$ -misurabile. Se infatti  $T \subset \mathbf{R}^n$  abbiamo

$$\begin{aligned} \tilde{m}(T) &= m(T \cap A_0) = m((T \cap A_0) \cap A) + m((T \cap A_0) \setminus A) = \\ &= m((T \cap A) \cap A_0) + m((T \setminus A) \cap A_0) = \tilde{m}(T \cap A) + \tilde{m}(T \setminus A). \end{aligned}$$

Questo stesso fatto rimane vero, con identica dimostrazione, anche se  $m$  e  $\tilde{m}$  vengono sostituite da una generica misura esterna  $\mu$  e dalla sua restrizione  $\tilde{\mu}$  all'insieme  $A_0$ .

Il seguente teorema mostra due cose: innanzitutto, se partiamo da insiemi misurabili e facciamo operazioni di unione numerabile, complementazione e intersezione numerabile, rimaniamo sempre nell'ambito degli insiemi misurabili. Inoltre, la misura di Lebesgue (o una qualunque misura esterna  $\mu$ ) se ristrette agli insiemi misurabili hanno buone proprietà, la principale delle quali è la *numerabile additività*: la misura dell'unione di una famiglia numerabile di insiemi due a due disgiunti è uguale alla somma delle loro misure.

*TEOREMA (Proprietà degli insiemi misurabili e della misura sugli insiemi misurabili)*: Sia  $m$  la misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}^n$ . Valgono i seguenti fatti

(i) Se  $A$  è misurabile secondo Lebesgue, allora  $A^C = \mathbf{R}^n \setminus A$  è misurabile. Inoltre, se  $m(A) = 0$  allora  $A$  è misurabile.

(ii) Unione o intersezione numerabile di insiemi misurabili è misurabile.

(iii) Se  $\{A_i\}_i$  è una famiglia di insiemi misurabili due a due disgiunti e  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , allora

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

(numerabile additività della misura di Lebesgue sui misurabili).

(iv) Se  $\{A_i\}$  è una successione crescente di insiemi misurabili, cioè se  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ , e  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  allora

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow +\infty} m(A_i).$$

(v) Se  $\{A_i\}$  è una successione decrescente di insiemi misurabili, cioè se  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ , se  $m(A_1) < +\infty$  e se infine  $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ , allora

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow +\infty} m(A_i).$$

Identico enunciato vale se la misura di Lebesgue è sostituita con una qualunque misura esterna  $\mu$  e gli insiemi misurabili secondo Lebesgue con gli insiemi  $\mu$ -misurabili.

*DIM.*: La (i) è ovvia se si osserva che la condizione di misurabilità può essere riscritta:

$$m(T) \geq m(T \cap A) + m(T \cap A^C) \quad \forall T \subset \mathbf{R}^n.$$

Che un insieme di misura nulla sia misurabile è immediato. Da questo segue in particolare che  $\emptyset$  e  $\mathbf{R}^n$  sono misurabili.

Mostriamo una versione indebolita di (ii): se  $A$  e  $B$  sono misurabili, allora  $A \cup B$  e  $A \cap B$  sono misurabili. Infatti, se  $T \subset \mathbf{R}^n$  si ha

$$\begin{aligned} m(T) &= m(T \cap A) + m(T \setminus A) = \\ &= m((T \cap A) \cap B) + m((T \cap A) \setminus B) + m((T \setminus A) \cap B) + m((T \setminus A) \setminus B). \end{aligned}$$

Si osservi l'ultima riga: l'unione degli insiemi nei primi tre addendi è esattamente  $T \cap (A \cup B)$  per cui, per la subadditività della misura, la somma dei

primi tre addendi è  $\geq m(T \cap (A \cup B))$ . Invece, l'insieme nell'ultimo addendo non è altro che  $T \setminus (A \cup B)$ : si ha allora

$$m(T) \geq m(T \cap (A \cup B)) + m(T \setminus (A \cup B)),$$

e  $A \cup B$  è misurabile. Da questo e da (i) segue la misurabilità di  $A \cap B$  perché  $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$ . Per induzione, segue anche che unione e intersezione *finita* di insiemi misurabili è misurabile (alle unioni e intersezioni numerabili arriveremo solo alla fine, dopo aver dimostrato tutto il resto!).

Vedremo la prossima volta il resto della dimostrazione!

### 3 Lezione del 13/12/2015 (2 ore)

Concludiamo la dimostrazione del teorema sulla proprietà della misura sugli insiemi misurabili.

Cominciamo a dimostrare (iii): essa è vera per l'unione di *due* insiemi misurabili e disgiunti in quanto  $m(A \cup B) = m((A \cup B) \cap A) + m((A \cup B) \setminus A) = m(A) + m(B)$ . Per induzione, ne deriva che (iii) è vera per l'unione di una famiglia finita di insiemi misurabili due a due disgiunti.

Nel caso generale di una famiglia *numerabile* di insiemi misurabili due a due disgiunti, la numerabile subadditività della misura fornisce  $m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ , mentre la monotonia assicura che per ogni  $N \in \mathbb{N}$

$$m(A) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^N (A_i)\right) = \sum_{i=1}^N m(A_i),$$

dove l'ultima uguaglianza vale per quanto osservato sulle unioni finite di insiemi misurabili disgiunti. Passando al sup su  $N$  si ricava

$$m(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

e (iii) è dimostrata.

Dimostriamo (iv): basta applicare (iii) alla successione di insiemi due a due disgiunti data da  $B_1 = A_1$ ,  $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$  ( $i \geq 2$ ). Si ha

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N m(B_i) = \lim_{N \rightarrow +\infty} m(A_N).$$

Dimostriamo (v): Definiamo la successione crescente di insiemi  $B_i = A_1 \setminus A_i$ ,  $i = 2, 3, \dots$ . Allora

$$A_1 = A \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} B_i$$

e per (iv) si ha

$$m(A_1) \leq m(A) + \lim_{i \rightarrow +\infty} [m(A_1) - m(A_i)],$$

da cui  $\lim_{i \rightarrow +\infty} m(A_i) \leq m(A)$ . La disuguaglianza opposta vale per monotonia, per cui la (v) è dimostrata.

A questo punto il teorema è quasi dimostrato: manca solo la (ii).

Sia  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , con gli  $A_i$  tutti misurabili. Dobbiamo mostrare che  $A$  è misurabile.

Sia  $T \subset \mathbf{R}^n$ . Consideriamo la successione crescente di insiemi misurabili  $B_N := \bigcup_{i=1}^N A_i$ : essi sono misurabili anche per la misura esterna  $\tilde{m}$  data dalla restrizione di  $m$  all'insieme  $T$  (cioè la misura definita da  $\tilde{m}(A) := m(T \cap A)$  per ogni  $A \subset \mathbf{R}^n$ ). Per la monotonia della misura abbiamo:

$$(***) \quad m(T) = m(T \cap B_N) + m(T \setminus B_N) \geq m(T \cap B_N) + m(T \setminus A)$$

D'altra parte, per (iv) applicata alla misura esterna  $\tilde{m}$  abbiamo

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} m(T \cap B_N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{m}(B_N) = \tilde{m}(A) = m(T \cap A)$$

e la misurabilità di  $A$  segue passando al limite per  $N \rightarrow +\infty$  in (\*\*\*). La misurabilità di  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  segue al solito scrivendo

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C \right)^C.$$

Q.E.D.

Il seguente teorema mostra che gli insiemi misurabili secondo Lebesgue abbondano.

*TEOREMA (Regolarità della misura di Lebesgue): I sottinsiemi aperti e i sottinsiemi chiusi di  $\mathbf{R}^n$  sono misurabili secondo Lebesgue. Inoltre, se  $A$  è*

un insieme misurabile secondo Lebesgue, allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono  $B$  aperto e  $C$  chiuso, con  $C \subset A \subset B$  e  $m(B \setminus C) < \varepsilon$ .

Per dimostrarlo ci servirà il seguente fatterello topologico: qualunque aperto di  $\mathbf{R}^n$ , comunque complicato, può essere ottenuto facendo un'unione numerabile di intervalli:

*PROPOSIZIONE:* Ogni aperto  $A \subset \mathbf{R}^n$  è unione numerabile di intervalli aperti.

*DIM.:* Consideriamo la famiglia  $\mathcal{F}$  costituita da tutti i cubi di  $\mathbf{R}^n$  del tipo  $(q_1 - r, q_1 + r) \times (q_2 - r, q_2 + r) \times \dots \times (q_n - r, q_n + r)$ , dove tutti i  $q_i$  ed  $r$  sono razionali. Questa è una famiglia numerabile di intervalli.

Mostriamo che  $A$  è unione degli elementi della famiglia numerabile di intervalli

$$\mathcal{F}' = \{I \in \mathcal{F} : I \subset A\}.$$

Infatti, poiché  $A$  è aperto, per ogni  $x \in A$  esiste una palla aperta  $B_{r(x)}(x) \subset A$ . Dentro questa palla possiamo trovare un cubo centrato in  $x$  dentro il quale, grazie alla densità dei razionali, c'è un elemento  $I_x \in \mathcal{F}$  che contiene  $x$ . Per costruzione,  $I_x \in \mathcal{F}'$ : abbiamo mostrato che per ogni  $x \in A$  c'è un elemento della famiglia numerabile  $\mathcal{F}'$  che lo contiene. Dunque  $A = \bigcup_{I \in \mathcal{F}'} I$ .

Q.E.D.

Dimostriamo il teorema di regolarità della misura di Lebesgue.

È un esercizio relativamente semplice verificare che gli intervalli sono insiemi misurabili secondo Lebesgue: un intervallo si ottiene come intersezione finita di *semispazi*. A sua volta, un semispazio  $S$  è misurabile secondo Lebesgue: se  $T$  è un insieme test, fissiamo  $\varepsilon > 0$  e sia  $\{I_i\}$  una famiglia numerabile di intervalli che ricopre  $T$  tale che  $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m(T) + \varepsilon$ . Definiamo poi  $I'_i = I_i \cap S$ ,  $I''_i = I_i \cap (\mathbf{R}^n \setminus S)$ : questi sono ancora intervalli (eventualmente vuoti), la somma delle cui misure è esattamente  $|I_i|$ . Inoltre, la famiglia  $\{I'_i\}$  ricopre  $T \cap S$ , mentre  $\{I''_i\}$  ricopre  $T \cap S^C$ : dunque

$$m(T) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} |I'_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |I''_i| \geq m(T \cap S) + m(T \cap S^C)$$

e la misurabilità di  $S$  segue perché  $\varepsilon$  è arbitrario.

Di conseguenza gli intervalli sono misurabili, e lo sono anche gli aperti perché possono essere ottenuti come unione numerabile di intervalli.

I chiusi sono misurabili perché i loro complementari sono aperti e quindi misurabili.

Sia ora  $A$  misurabile,  $\varepsilon > 0$ : mostriamo che esiste un aperto  $B \supset A$  con  $m(B \setminus A) < \varepsilon/2$ . Supponiamo dapprima che  $A$  abbia misura finita. Per

definizione di misura di Lebesgue, possiamo trovare una famiglia numerabile di intervalli  $I_1, I_2, \dots$  con  $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset A$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq m(A) + \varepsilon/2$ . Abbiamo già visto che non è restrittivo supporre che gli  $I_i$  siano tutti aperti. Se  $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ , allora  $B$  è aperto e per subadditività

$$m(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \leq m(A) + \varepsilon/2,$$

da cui  $m(B \setminus A) = m(B) - m(A) \leq \varepsilon/2$ .

Mostriamo che anche un insieme misurabile  $A$  con  $m(A) = +\infty$  si approssima “da fuori” con insiemi aperti: prendiamo  $\varepsilon > 0$  e mostriamo che esiste  $B \supset A$ ,  $B$  aperto, tale che  $m(B \setminus A) < \varepsilon$ .

A tal fine consideriamo gli insiemi misurabili  $A_N = A \cap B_N(0)$ ,  $N = 1, 2, \dots$ : essi hanno tutti misura finita e la loro unione è  $A$ . Per ciascuno di questi possiamo trovare  $B_N \supset A_N$ ,  $B_N$  aperto tale che  $m(B_N \setminus A_N) < \frac{\varepsilon}{2^{N+1}}$ : definiamo  $B = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$ .

Ora,  $B$  è un aperto che contiene  $A$ , e inoltre  $B \setminus A \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} (B_N \setminus A_N)$ : per subadditività numerabile ricaviamo  $m(B \setminus A) \leq \sum_{N=1}^{\infty} m(B_N \setminus A_N) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Mostriamo infine che dato  $A$  misurabile e  $\varepsilon > 0$ , esiste un chiuso  $C \subset A$  con  $m(A \setminus C) < \varepsilon/2$ : questo concluderà la nostra dimostrazione. A questo fine, scegliamo un aperto  $F \supset A^C$  tale che  $m(F \setminus A^C) < \varepsilon/2$ . Allora  $C = F^C$  è un chiuso,  $C \subset A$ , e  $m(A \setminus C) = m(F \setminus A^C) < \varepsilon/2$ . Q.E.D.

## 4 Lezione del 15/12/2016 (2 ore)

Nonostante vi siano moltissimi insiemi misurabili secondo Lebesgue, non tutti i sottinsiemi di  $\mathbf{R}^n$  lo sono:

*ESEMPIO (Insieme non misurabile di Vitali):* Mettiamoci nel caso  $n = 1$ , e consideriamo l'intervallo  $(0, 1) \subset \mathbf{R}$ . Definiamo la seguente relazione di equivalenza su  $(0, 1)$ : diciamo che  $x \sim y$  se e solo se  $x - y \in \mathbf{Q}$ . La nostra relazione di equivalenza partiziona l'intervallo  $(0, 1)$  in infinite classi di equivalenza: definiamo un insieme  $A$  che contiene esattamente 1 elemento per ogni classe di equivalenza<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Per poter definire questo insieme, dobbiamo assumere la validità dell'assioma della scelta!

Mostriamo ora che l'insieme  $A$  non è misurabile secondo Lebesgue.

Per ogni  $q \in \mathbf{Q} \cap [0, 1)$  definiamo gli insiemi  $A_q = \{x + q : x \in A\}$ . Siccome la misura di Lebesgue è invariante per traslazione (questo è ovvio per come è definita: la misura di un intervallo è invariante per traslazione!) abbiamo che  $m(A_q) = m(A)$ . Poiché gli intervalli sono misurabili secondo Lebesgue abbiamo anche  $m(A) = m(A_q) = m(A_q \cap (0, 1)) + m(A_q \setminus (0, 1))$ . Se  $B_q = A_q \setminus (0, 1)$ , definiamo  $\tilde{B}_q = \{x : x + 1 \in B_q\}$ : evidentemente  $m(\tilde{B}_q) = m(B_q)$  per l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue.

Definiamo infine  $\tilde{A}_q = (A_q \cap (0, 1)) \cup \tilde{B}_q$ . Per quanto visto sopra, abbiamo  $m(\tilde{A}_q) = m(A)$ . Ora, è facile vedere che gli insiemi  $A_q$  sono due a due disgiunti al variare di  $q \in \mathbf{Q} \cap [0, 1)$  e che  $\bigcup_q \tilde{A}_q = (0, 1)$ . Se  $A$  fosse misurabile, lo sarebbero anche gli insiemi  $\tilde{A}_q$  e per additività numerabile avremmo

$$1 = m([0, 1)) = \sum_{q \in [0, 1) \cap \mathbf{Q}} m(\tilde{A}_q) = \sum_{q \in [0, 1) \cap \mathbf{Q}} m(A).$$

Questo è assurdo: infatti la misura di  $A$  è nulla oppure positiva. Se fosse  $m(A) = 0$ , l'espressione di destra varrebbe 0, mentre se fosse  $m(A) > 0$  essa varrebbe  $+\infty$ : in nessun caso essa può essere uguale a 1. Dunque  $A$  non è misurabile secondo Lebesgue.

In vista della definizione dell'integrale di Lebesgue, occorre definire un'importante classe di funzioni: le funzioni *misurabili*.

**DEFINIZIONE** (*funzione misurabile*): Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  misurabile,  $f : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ . Il simbolo  $\overline{\mathbf{R}}$  denota l'insieme  $\mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ : in questo contesto, in futuro useremo la "strana" convenzione che  $0 \cdot \pm\infty = 0$ , mentre la somma  $+\infty - \infty$  rimarrà non definita, come è giusto che sia!

La funzione  $f$  si dice *misurabile* (rispetto ad una fissata misura esterna, per esempio la misura di Lebesgue su  $\mathbf{R}^n$ ) se per ogni  $a \in \mathbf{R}$  gli insiemi  $f^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > a\}$  sono misurabili.

Una caratterizzazione equivalente della misurabilità, di sapore un po' più topologico, è data dalla seguente

**PROPOSIZIONE** (*Caratterizzazione delle funzioni misurabili*): Una funzione  $f : A_0 \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  (con  $A_0 \subset \mathbf{R}^n$  misurabile) è misurabile se e solo se  $f^{-1}(\{+\infty\})$ ,  $f^{-1}(\{-\infty\})$  sono misurabili e  $f^{-1}(U)$  è misurabile per ogni aperto  $U \subset \mathbf{R}$ .

**DIM.:** Se sappiamo che  $f^{-1}(\{+\infty\})$ ,  $f^{-1}(\{-\infty\})$  sono misurabili e  $f^{-1}(U)$  è misurabile per ogni aperto  $U \subset \mathbf{R}$ , allora  $f$  è misurabile perché  $f^{-1}((a, +\infty]) = f^{-1}((a, +\infty)) \cup f^{-1}(\{+\infty\})$ .

Viceversa, supponiamo che  $f$  sia misurabile e dimostriamo che la controimmagine di un aperto è sempre misurabile.

Possiamo scrivere

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{N=1}^{\infty} f^{-1}((N, +\infty]),$$

per cui  $f^{-1}(\{+\infty\})$  è misurabile in quanto intersezione numerabile di misurabili.

Dall'ipotesi di misurabilità di  $f$  segue allora che  $f^{-1}((a, +\infty))$  è misurabile per ogni  $a \in \mathbf{R}$ . Dimostriamo che anche gli insiemi  $f^{-1}([a, +\infty))$ ,  $f^{-1}((-\infty, a))$  e  $f^{-1}((-\infty, a])$  sono tutti misurabili per ogni  $a \in \mathbf{R}$ . Infatti,  $f^{-1}([a, +\infty)) = \bigcap_{N=1}^{\infty} f^{-1}((a - \frac{1}{N}, +\infty))$  è misurabile in quanto intersezione numerabile di misurabili. Le controimmagini di semirette “sinistre” del tipo  $f^{-1}([-\infty, a))$  e  $f^{-1}([-\infty, a])$  sono misurabili in quanto sono complementari di controimmagini di semirette “destre”. Ne segue che  $f^{-1}(\{-\infty\})$  è misurabile:  $f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{N=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty, -N])$ ...e sono misurabili anche le controimmagini di semirette “sinistre” senza  $-\infty$ .

Allora, anche le controimmagini di intervalli aperti sono misurabili, infatti  $f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((-\infty, b)) \cap f^{-1}(a, +\infty)$ . Se poi  $U \subset \mathbf{R}$  è aperto, scriviamo  $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ , con  $I_i \subset \mathbf{R}$  intervalli aperti. Allora  $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(I_i)$  è misurabile. Q.E.D.

Osserviamo che una funzione continua a valori reali, definita su un aperto di  $\mathbf{R}^n$ , è certamente misurabile secondo Lebesgue. Perché?

Le funzioni misurabili sono “stabili” per tutta una serie di operazioni algebriche e di limite:

*PROPOSIZIONE (Stabilità delle funzioni misurabili):* Supponiamo che  $f, g$  siano misurabili,  $\lambda \in \mathbf{R}$  e che  $\{f_n\}$  sia una successione di funzioni misurabili. Allora

- (i) l'insieme  $\{x : f(x) > g(x)\}$  è misurabile;
- (ii) se  $\phi : \overline{\mathbf{R}} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  è continua, allora  $\phi \circ f$  è misurabile (sul suo dominio);
- (iii) le funzioni  $f + g$ ,  $\lambda f$ ,  $|f|$ ,  $\max\{f, g\}$ ,  $\min\{f, g\}$  e  $fg$  sono tutte misurabili nel loro dominio;
- (iv) le funzioni  $\sup f_n$ ,  $\inf f_n$ ,  $\limsup f_n$ ,  $\liminf f_n$  e  $\lim f_n$  sono tutte misurabili nel loro dominio.



*DIM.:* Per verificare la (i), osserviamo che se  $f(x) > g(x)$ , allora esiste un razionale  $q$  compreso tra  $g(x)$  e  $f(x)$ . Allora il nostro asserto è vero in quanto possiamo scrivere

$$\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} (f^{-1}((q, +\infty]) \cap g^{-1}([-\infty, q))),$$

per cui abbiamo espresso il nostro insieme come unione numerabile di insiemi misurabili.

La (ii), nel caso di funzioni a valori reali, è ovvia grazie alla nostra caratterizzazione delle funzioni misurabili: sappiamo infatti che la controimmagine di un aperto secondo  $\phi$  è un aperto. Nel caso di funzioni a valori reali estesi, occorre precisare cosa vuol dire che  $\Phi$  è continua: significa che la controimmagine di ogni aperto di  $\overline{\mathbf{R}}$  è un aperto in  $\overline{\mathbf{R}}$ . A loro volta, gli aperti di  $\overline{\mathbf{R}}$  sono gli insiemi che si possono ottenere prendendo unioni (è sufficiente prenderle numerabili) di intervalli aperti di  $\mathbf{R}$  e di semirette “intorno di  $\pm\infty$ ”, cioè del tipo  $(a, +\infty]$  oppure  $[-\infty, a)$ . È allora un semplice esercizio verificare che la composizione è ancora misurabile.

Vediamo la (iii): siano  $f, g$  misurabili e consideriamo la funzione somma  $f + g$  (essa è definita sull'intersezione dei domini, privata dei punti in cui la somma si presenta nella forma  $+\infty - \infty$  o  $-\infty + \infty$ ). Essa è misurabile in quanto

$$(f + g)^{-1}((a, +\infty]) = \{x : f(x) > a - g(x)\}$$

è misurabile grazie a (i): la funzione  $a - g(x)$  è infatti banalmente misurabile. Da (ii) segue poi la misurabilità di  $\lambda f$ , di  $|f|$  e di  $f^2$  (che si ottengono da  $f$  componendo con una funzione continua). Se  $f, g$  sono a valori reali possiamo poi scrivere  $\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$ ,  $\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$ ,  $f(x)g(x) = \frac{1}{2}((f(x) + g(x))^2 - f^2(x) - g^2(x))$ , il che ci fornisce la misurabilità di  $\max\{f, g\}$ ,  $\min\{f, g\}$  e  $fg$ . Nel caso generale di funzioni a valori reali estesi, il ragionamento appena fatto ci fornisce la misurabilità della restrizione delle funzioni che ci interessano all'insieme, evidentemente misurabile, dove sia  $f$  che  $g$  sono finite.

Tutto il resto è facilmente decomponibile in pochi pezzi misurabili, su ciascuno dei quali le funzioni in esame sono costanti: per esempio,  $f(x)g(x)$  vale identicamente  $+\infty$  sull'insieme (misurabile)  $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = +\infty, g(x) > 0\}$ , vale 0 sull'insieme  $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = +\infty, g(x) = 0\}$ , etc. In conclusione, se ne deduce facilmente che la funzione prodotto è misurabile.

Per quanto riguarda la (iv), sia  $f(x) = \sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$ . Si ha  $f^{-1}((a, +\infty)) = \bigcup_n f_n^{-1}((a, +\infty))$ , per cui  $f$  è misurabile essendolo le  $f_n$ . Analogamente,  $\inf_n f_n(x)$  è misurabile.

La funzione  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  è misurabile in quanto  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sup_n \inf\{f_m(x) : m \geq n\}$ . Analogamente,  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  è misurabile. L'insieme dove le due funzioni misurabili  $\liminf_n f_n$  e  $\limsup_n f_n$  coincidono è misurabile: tale insieme è proprio quello in cui esiste  $\lim_n f_n$ , che quindi è misurabile. Q.E.D.

## 5 Lezione del 16/12/2016 (3 ore)

Un'importante sottoclasse delle funzioni misurabili è quella delle *funzioni semplici*: nella definizione di integrale di Lebesgue esse giocheranno lo stesso ruolo che le funzioni a scala avevano in quella dell'integrale di Riemann.

Ricordiamo che, dato  $A \subset \mathbf{R}^n$ , la sua *funzione caratteristica* è la funzione

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

**DEFINIZIONE:** Una *funzione semplice*  $\phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  è una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili. In altre parole,  $\phi$  è semplice se esistono un numero finito di insiemi misurabili  $A_1, A_2, \dots, A_N$  e dei numeri reali  $c_1, c_2, \dots, c_N$  tali che  $\phi(x) = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$ . Evidentemente, non è restrittivo supporre che gli  $A_i$  siano due a due disgiunti. In modo equivalente, possiamo dire che una funzione semplice è una funzione *misurabile* la cui immagine è un *insieme finito*.

Se  $\phi(x) \geq 0$  per ogni  $x$ , definiamo in modo naturale l'integrale (di Lebesgue) di  $\phi$  rispetto alla misura  $m$  come

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi(x) dx = \sum_{i=1}^N c_i m(A_i).$$

Osserviamo che una funzione a scala è una funzione semplice in cui gli insiemi  $A_i$  sono intervalli. Per la misura di Lebesgue e per questo tipo di funzioni, la nuova definizione di integrale coincide con quella di Riemann. Inoltre, non è difficile vedere che l'integrale sulle funzioni semplici gode delle usuali proprietà di monotonia, di additività e di omogeneità rispetto alla funzione integranda.

Come vedremo, l'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile non negativa  $f$  si definisce in maniera del tutto analoga all'integrale (inferiore) di Riemann, sostituendo le funzioni a scala con le funzioni semplici:  $\int f(x) dx = \sup\{\int \phi(x) dx : \phi \text{ semplice, } \phi \leq f\}$ .

Tuttavia, per provare che quest'oggetto gode di tutte le proprietà che ci aspettiamo, sarà necessario provare un risultato di approssimazione: il prossimo, fondamentale teorema dice che ogni funzione misurabile *non negativa* può essere approssimata da sotto con una successione di funzioni semplici:

*TEOREMA (Approssimazione di funzioni misurabili con funzioni semplici):*  
 Sia  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una funzione misurabile. Allora esiste una successione  $\phi_k : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  di funzioni semplici tali che  $f \geq \phi_{k+1} \geq \phi_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) e tali che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_k(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

*DIM.:* Per ogni fissato  $k = 1, 2, \dots$  e  $j = 0, 1, \dots, k2^k - 1$  definiamo gli insiemi misurabili  $E_{k,j} = f^{-1}([\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}))$ , mentre poniamo  $E_{k,k2^k} = f^{-1}([k2^k, +\infty))$ .

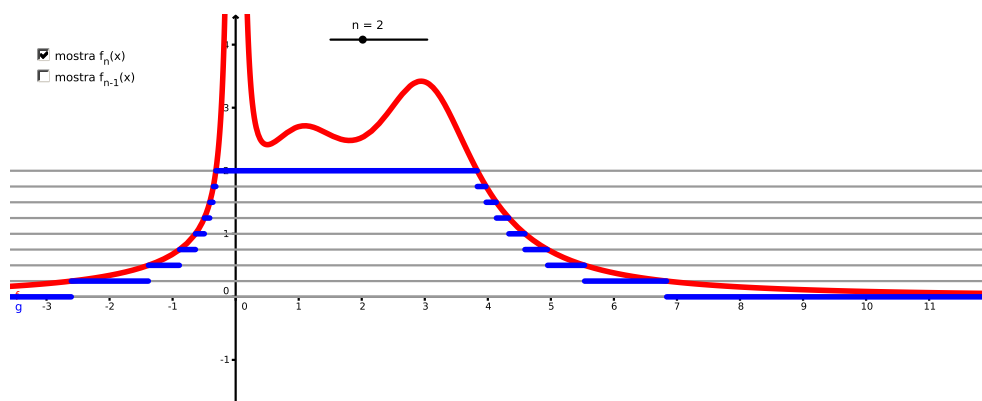
Consideriamo poi le funzioni semplici<sup>4</sup>

$$\phi_k(x) = \sum_{j=0}^{k2^k} \frac{j}{2^k} \mathbf{1}_{E_{k,j}}(x).$$

Per costruzione, queste funzioni sono misurabili e sono tutte minori o uguali a  $f$ . Inoltre, esse formano una successione crescente: basta osservare che per ogni  $k$  e per ogni  $j = 1, \dots, k2^k - 1$  si ha  $E_{k,j} = E_{k+1,2j} \cup E_{k+1,2j+1}$ . Quanto poi a  $E_{k,k2^k}$ , questo verrà suddiviso al passo successivo in  $2^k + 1$  insiemi...

È poi facile vedere che  $\phi_k(x) \rightarrow f(x)$  per ogni  $x$ : se  $f(x) < +\infty$ , per  $k$  abbastanza grande si ha  $f(x) - \phi_k(x) \leq 2^{-k}$ , mentre se invece  $f(x) = +\infty$  si ha  $x \in E_{k,2^k}$  per ogni  $k$  e quindi  $\phi_k(x) = k \rightarrow +\infty$ .

Ecco un tentativo di visualizzare la costruzione delle funzioni  $\phi_k$  con un foglio GeoGebra<sup>5</sup>.



<sup>4</sup>Possiamo esprimere queste funzioni anche nel seguente modo più compatto:  $\phi_k(x) = \min\{k, 2^{-k} \lfloor 2^k f(x) \rfloor\}$ , dove  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota la parte intera.

<sup>5</sup><https://www.geogebra.org/student/m51513>

Q.E.D.

È finalmente giunto il momento di introdurre l'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile non negativa: la definizione è quella anticipata prima.

*DEFINIZIONE:* L'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  si definisce come

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = \sup \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x) dx : \phi \text{ semplice, } \phi \leq f \right\}.$$

Se poi  $f : A \rightarrow [0, +\infty]$  è misurabile, definiamo  $\int_A f(x) dx$  come  $\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{f}(x) dx$ , dove  $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  si ottiene estendendo  $f$  ponendola uguale a 0 fuori da  $A$ .

Il prossimo risultato di convergenza integrale si rivelerà importantissimo per la teoria dell'integrale di Lebesgue, grazie anche al risultato di approssimazione con funzioni semplici che abbiamo dimostrato prima.

*TEOREMA (di Beppo Levi o della convergenza monotona):* Sia  $\{f_k\}$  una successione di funzioni misurabili non negative,  $f_k : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ , e supponiamo che la successione sia anche crescente:  $f_{k+1}(x) \geq f_k(x)$  per ogni  $x \in \mathbf{R}^n$  e per ogni  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Allora, se  $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$ , si ha

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx.$$

Prima della dimostrazione, vediamo una importante conseguenza del teorema di Beppo Levi:

*OSSERVAZIONE (Additività dell'integrale rispetto alla funzione integranda):* Siano  $f, g : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  funzioni misurabili. Allora

$$\int_{\mathbf{R}^n} (f(x) + g(x)) dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx + \int_{\mathbf{R}^n} g(x) dx.$$

Infatti possiamo trovare due successioni crescenti di funzioni semplici,  $\{s_k\}$ ,  $\{u_k\}$  con  $s_k \rightarrow f$ ,  $u_k \rightarrow g$ . L'integrale delle funzioni semplici è evidentemente additivo: il teorema di Beppo-Levi ci consente di passare al limite e ottenere l'identità voluta.

*DEFINIZIONE (Integrale di funzioni di segno qualunque):* Che fare se abbiamo una funzione misurabile di segno qualunque  $f : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ ? Definiamo la parte positiva e la parte negativa di  $f$  nel modo seguente:

$$f^+(x) := \max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) := -\min\{0, f(x)\}.$$

Evidentemente, si ha  $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$  e  $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ . Se gli integrali di  $f^+$  e  $f^-$  non sono entrambi  $+\infty$ ,  $f$  si dice *integrabile secondo Lebesgue* e definiamo

$$\int_A f(x) dx := \int_A f^+(x) dx - \int_A f^-(x) dx.$$

Se poi i due integrali della parte positiva e della parte negativa sono entrambi finiti, allora  $f(x)$  si dice *sommabile*, ed ha integrale finito. Evidentemente, una funzione misurabile  $f$  è sommabile se e solo se il suo modulo ha integrale finito.

Grazie all'additività dell'integrale e al fatto evidente che le costanti possono essere portate fuori dal segno di integrale, l'integrale di Lebesgue è *lineare* sullo spazio vettoriale delle funzioni sommabili.

*Dimostrazione del teorema di Beppo Levi:* Notiamo innanzitutto che la funzione  $f$  è misurabile in quanto limite (sup) di funzioni misurabili. Inoltre, la successione  $k \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx$  è crescente: indichiamo con  $\alpha$  il suo limite.

Evidentemente, essendo  $f \geq f_k$  per ogni  $k$ , si ha  $\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx \geq \alpha$ : in particolare, se  $\alpha = +\infty$ , il teorema è dimostrato. Se invece  $\alpha \in \mathbf{R}$ , ci rimane da dimostrare la disuguaglianza opposta

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx \leq \alpha.$$

A tal fine, fissiamo  $c \in (0, 1)$  e una funzione semplice  $s : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  con  $s \leq f$ . La funzione semplice  $s$  può essere scritta  $s(x) = \sum_{j=1}^N s_j \mathbf{1}_{A_j}(x)$ , con  $A_j$  insiemi misurabili due a due disgiunti. Definiamo  $E_k = \{x \in \mathbf{R}^n : f_k(x) \geq cs(x)\}$ . Grazie al fatto che le  $f_k$  tendono a  $f$  e che  $c < 1$ , abbiamo che  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbf{R}^n$ , e inoltre la successione di insiemi misurabili  $E_k$  è crescente perché lo è  $\{f_k\}$ . Definiamo poi  $A_{j,k} = A_j \cap E_k$ : grazie alla continuità della misura sulle successioni crescenti abbiamo  $m(A_{j,k}) \rightarrow m(A_j)$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Allora:

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx \geq \\ &\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} f_k(x) dx \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} c s(x) dx = \\ &\lim_{k \rightarrow +\infty} c \sum_{j=1}^N s_j m(A_{j,k}) = c \sum_{j=1}^N s_j m(A_j) = c \int_{\mathbf{R}^n} s(x) dx. \end{aligned}$$

Passando al sup su tutte le funzioni semplici  $s \leq f$  e su tutti i  $c < 1$ , si ottiene la disuguaglianza che ci mancava. Q.E.D.

Si noti che la proprietà di additività rispetto alla funzione integranda continua a valere per funzioni sommabili. In particolare, poiché è evidente dalla definizione che le costanti si possono “portare fuori dall’integrale”, l’integrale di Lebesgue è lineare sullo spazio vettoriale delle funzioni sommabili.

Vediamo l’enunciato di un altro celebre risultato: il Lemma di Fatou!

*TEOREMA (Lemma di Fatou):* Sia  $f_k : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  una successione di funzioni misurabili non negative,  $f(x) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$ . Allora

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx.$$

*DIM.:* Sappiamo già che  $f$  è misurabile non negativa. Si ha  $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k(x)$ , dove  $g_k(x) = \inf\{f_h(x) : h \geq k\}$ . Poiché le  $g_k$  sono una successione crescente di funzioni misurabili non negative abbiamo per Beppo Levi

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} g_k(x) dx.$$

La tesi segue allora grazie alla monotonia dell’integrale di Lebesgue, poiché si ha evidentemente  $g_k(x) \leq f_k(x)$ . Q.E.D.

Un paio di osservazioni: il lemma di Fatou è in generale falso per funzioni di segno qualunque. Si prenda per esempio  $n = 1$ ,  $f_k(x) = -1/k$  (funzioni costanti). Allora  $f_k(x) \rightarrow 0$ , ma

$$\int_{\mathbf{R}} f_k(x) dx = -\infty, \quad \int_{\mathbf{R}} 0 dx = 0.$$

Siccome la nostra successione di costanti cresce, lo stesso esempio mostra che il teorema di Beppo Levi non vale per funzioni di segno qualunque. Infine, le stesse funzioni *cambiate di segno* mostrano che nella tesi del Lemma di Fatou può valere la disuguaglianza stretta.

Probabilmente il più celebre risultato di convergenza integrale nel quadro della teoria di Lebesgue è il seguente:

*TEOREMA (Della convergenza dominata di Lebesgue):* Sia  $f_k : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  una successione di funzioni misurabili, e supponiamo che esista una funzione sommabile  $\phi : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  tale che  $|f_k(x)| \leq \phi(x)$  per ogni  $k$  e per ogni  $x$ .

Se esiste il limite  $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$ , allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} |f_k(x) - f(x)| dx = 0,$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx.$$

*DIM.:* La funzione limite  $f$  è misurabile, ed è anche sommabile perché il suo modulo è dominato da  $\phi$ . Inoltre,  $|f_k(x) - f(x)| \leq |f_k(x)| + |f(x)| \leq 2\phi(x)$ . Ne segue che la successione di funzioni  $2\phi(x) - |f_k(x) - f(x)|$  è non negativa e tende puntualmente alla funzione sommabile  $2\phi(x)$ . Dal Lemma di Fatou segue allora che

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} (2\phi(x) - |f_k(x) - f(x)|) dx \geq \int_{\mathbf{R}^n} 2\phi(x) dx,$$

da cui semplificando l'integrale di  $2\phi(x)$ :

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} |f_k(x) - f(x)| dx \leq 0,$$

che è la prima parte della tesi. La seconda parte segue perché

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx - \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbf{R}^n} |f_k(x) - f(x)| dx.$$

Q.E.D.

## 6 Lezione del 20/12/2016 (2 ore)

Vediamo subito qualche altra conseguenza interessante dei teoremi che abbiamo dimostrato.

*ESEMPIO (Integrazione per serie):* Se  $\{f_k\}$  è una successione di funzioni misurabili non negative definite su  $A$ , allora

$$\int_A \sum_{i=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_A f_k(x) dx.$$

Basta applicare il teorema di Beppo Levi e l'additività dell'integrale rispetto alla funzione integranda alle somme parziali della serie.

*ESEMPIO (Numerabile additività dell'integrale rispetto all'insieme di integrazione):* Se  $\{A_i\}$  è una successione di insiemi misurabili due a due disgiunti e  $f$  è una funzione misurabile non negativa definita su  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , allora

$$\int_A f(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f(x) dx.$$

Basta infatti considerare la successione crescente di funzioni misurabili  $g_k(x) = \sum_{i=1}^k f(x) \mathbf{1}_{A_i}(x)$ , che converge alla funzione  $g(x) = f(x) \mathbf{1}_A(x)$ . Un'applicazione del teorema di Beppo Levi dimostra subito la tesi.

Il risultato rimane vero se  $f$  è di segno qualunque e sommabile: basta usare il teorema della convergenza dominata (con funzione dominatrice  $|f(x)| \mathbf{1}_A(x)$ ).

*OSSERVAZIONE:* La convergenza puntuale nei teoremi di convergenza integrale non è necessaria in *tutti i punti*: non c'è niente di male se essa viene a mancare in un insieme di misura nulla. A questo proposito è utile introdurre una comoda terminologia: si dice che una certa proprietà è vera *per quasi ogni*  $x \in \mathbf{R}^n$  (o *q.o.*  $x \in A$ , con  $A$  misurabile) se l'insieme degli  $x$  per cui la proprietà è falsa ha misura di Lebesgue nulla.

Per esempio, date due funzioni  $f, g : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ , diremo che esse sono *quasi ovunque uguali* se  $m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ .

È un semplice esercizio verificare che una funzione quasi ovunque uguale ad una funzione misurabile è essa stessa misurabile (infatti tutti gli insiemi di misura nulla sono misurabili). Inoltre, due funzioni quasi ovunque uguali hanno lo stesso integrale. Di più, nei teoremi di Beppo Levi, Fatou e Lebesgue, basta avere la convergenza *quasi ovunque* delle funzioni coinvolte (e la funzione dominante  $\phi$  nel teorema di Lebesgue basta che domini le  $f_k$  quasi ovunque).

Vediamo per esercizio una semplice conseguenza del teorema della convergenza dominata:

*ESEMPIO: Un risultato di integrazione per serie* Se  $f_k : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  sono sommabili e  $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^n} |f_k(x)| < +\infty$ , allora la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  converge puntualmente ad una funzione sommabile  $f(x)$  e

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx.$$

Sia infatti  $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ : grazie al teorema di integrazione per serie che abbiamo già visto (come conseguenza del teorema di Beppo Levi), questa



funzione è sommabile. Ne segue subito che  $g(x) < +\infty$  per quasi ogni  $x$ : dunque la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  converge assolutamente per quasi ogni  $x$  ad una funzione che battezziamo  $f(x)$ .

Per concludere, basta applicare il teorema della convergenza dominata alle somme parziali della serie: esse sono dominate dalla funzione sommabile  $g(x)$ .

Il seguente teorema mostra che l'integrale di Riemann coincide con l'integrale di Lebesgue, fatto ovviamente rispetto alla misura di Lebesgue, sull'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann (limitate su un insieme limitato: per gli integrali impropri la faccenda è leggermente più complicata<sup>6</sup>). Enunciamo e dimostriamo il teorema in dimensione 1: la generalizzazione a dimensione superiore si dimostra allo stesso modo.

*TEOREMA:* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann. Allora  $f$  è misurabile secondo Lebesgue, e il suo integrale di Lebesgue coincide con l'integrale di Riemann.

*DIM.:* Ai fini della dimostrazione, dobbiamo provvisoriamente distinguere l'integrale di Riemann da quello di Lebesgue: data  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , conveniamo che  $\int_a^b f(x) dx$  rappresenti il suo integrale di Lebesgue, mentre indicheremo con  $\mathcal{R} \int_a^b f(x) dx$  il suo integrale di Riemann (purché esistano)... Ricordiamo anche che l'integrale di Lebesgue delle funzioni a scala coincide per definizione con il loro integrale di Riemann.

Per definizione di integrale (superiore ed inferiore) secondo Riemann, è possibile trovare due successioni di funzioni a scala  $\{\psi_n\}$  e  $\{\phi_n\}$ , con  $\psi_n \geq f \geq \phi_n$  e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \phi_n dx = \mathcal{R} \int_a^b f dx.$$

Siano ora  $\bar{\psi}(x) = \inf\{\psi_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$ ,  $\underline{\phi}(x) = \sup\{\phi_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$ . Queste due funzioni sono misurabili, e  $\underline{\phi} \leq f \leq \bar{\psi}$ . Per la

---

<sup>6</sup>Si dimostri per esercizio che l'integrale improprio secondo Riemann di una funzione *non negativa*, se esiste, coincide col suo integrale di Lebesgue: basta usare opportunamente il Teorema di Beppo Levi e il teorema di confronto tra integrale di Riemann e di Lebesgue enunciato in questa pagina. Stessa cosa se la funzione è assolutamente integrabile nel senso di Riemann (si usi il risultato per le funzioni non negative ed il teorema della convergenza dominata). Invece, se  $f$  è integrabile in senso improprio con integrale finito, ma l'integrale del suo valore assoluto diverge a  $+\infty$ , si vede facilmente che gli integrali della parte positiva e della parte negativa sono  $+\infty$ : per questo motivo, la funzione *non è integrabile* nel senso di Lebesgue.

monotonia dell'integrale sarà

$$\int_a^b \psi_n(x) dx \geq \int_a^b \bar{\psi}(x) dx,$$

da cui passando al limite

$$\mathcal{R} \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \bar{\psi}(x) dx,$$

e analogamente

$$\mathcal{R} \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \underline{\phi}(x) dx.$$

Siccome  $\bar{\psi} \geq \underline{\phi}$ , se ne deduce che  $\int_a^b (\bar{\psi} - \underline{\phi}) dx = 0$ . Ora, è semplice mostrare che una funzione non negativa ha integrale nullo se e soltanto se è quasi ovunque nulla (vedremo poi la dimostrazione). Quindi  $\bar{\psi} - \underline{\phi} = 0$  quasi ovunque, ossia  $\bar{\psi} = \underline{\phi} = f$  quasi ovunque in  $[a, b]$ . Ne segue immediatamente che  $f$  è misurabile e che il suo integrale di Lebesgue coincide con quello di Riemann. Q.E.D.

In realtà, si può dimostrare che una funzione limitata è integrabile secondo Riemann se e soltanto se essa è *quasi ovunque continua* (Teorema di Vitali). Per motivi di tempo, non dimostreremo questo teorema.

Mostriamo che una funzione non negativa con integrale 0 è nulla quasi ovunque:

*PROPOSIZIONE:* Se  $f : A \rightarrow [0, +\infty]$  è misurabile e  $\int_A f(x) dx = 0$ , allora  $f = 0$  quasi ovunque in  $A$ .

*DIM.:* Possiamo scrivere

$$\{x \in A : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

Tutti gli insiemi a destra hanno misura nulla: se fosse infatti  $m(E_{\bar{n}}) > 0$ , con  $E_{\bar{n}} = \{x \in A : f(x) > \frac{1}{\bar{n}}\}$  avremmo

$$\int_A f(x) dx \geq \int_{E_{\bar{n}}} f(x) dx \geq m(E_{\bar{n}})/\bar{n} > 0,$$

contro l'ipotesi. Q.E.D.

Come applicazione dei risultati appena visti, introduciamo lo spazio  $L^2$  delle funzioni a quadrato sommabile:

*DEFINIZIONE:* Sia  $f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  una funzione misurabile. Definiamo la sua *norma quadratica* come  $\|f\|_{L^2(a,b)} := \left( \int_a^b f(x) dx \right)^{1/2}$ . Definiamo poi lo spazio delle *funzioni a quadrato sommabile* come

$$L^2(a, b) = \{f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbf{R}} : \|f\|_{L^2(a,b)} < +\infty\}.$$

Quozientiamo questo insieme rispetto alla classe di equivalenza di “essere uguali quasi ovunque”: in tal caso,  $\|\cdot\|_{L^2(a,b)}$  è effettivamente una norma. La norma è infatti evidentemente non degenera (le sole funzioni di norma nulla sono quelle quasi ovunque uguali a 0) e omogenea ( $\|tf\|_{L^2} = |t| \|f\|_{L^2}$  per ogni  $t \in \mathbf{R}$ ,  $f \in L^2$ ). Per provare la disuguaglianza triangolare, partiamo dimostrando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Abbiamo infatti

$$0 \leq \|tf + g\|_{L^2}^2 = t^2 \|f\|_{L^2}^2 + 2 \int_a^b f \cdot g dx + \|g\|_{L^2}^2 \quad \forall t \in \mathbf{R}, \forall f, g \in L^2.$$

Allora il discriminante di questo polinomio di secondo grado in  $t$  deve essere minore o uguale a 0, da cui segue subito la disuguaglianza voluta.

Usando Cauchy-Schwarz si ottiene subito

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^2}^2 &= \|f\|_{L^2}^2 + 2 \int_a^b f \cdot g dx + \|g\|_{L^2}^2 \leq \\ &\|f\|_{L^2}^2 + 2\|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}^2 = (\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2})^2 \end{aligned}$$

che è la disuguaglianza triangolare al quadrato.

Lo spazio  $L^2(a, b)$  è uno spazio metrico completo: la dimostrazione usa le stesse idee che abbiamo usato per dimostrare l'ultimo risultato di integrazione per serie. La riporto sotto, anche se non l'abbiamo vista in classe:

*TEOREMA (Riesz-Fischer):* Lo spazio  $L^2(a, b)$  con la norma indotta dal prodotto scalare  $L^2$  è completo.

*DIM.:*

Sia  $\{u_n\}_n$  una successione di Cauchy in  $L^2$ : questo vuol dire che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbf{N}$  tale che per ogni  $m, n \geq \nu$  vale  $\|u_n - u_m\|_{L^2} < \varepsilon$ .

Applicando ripetutamente questa relazione con  $\varepsilon = 1/2^k$ , troviamo una successione crescente di numeri naturali  $\{n_k\}_k$  tale che

$$(*) \quad \|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|_{L^2} \leq 1/2^k.$$

Consideriamo ora la serie di funzioni non negative

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x)|.$$

La funzione  $g(x)$  è una ben definita funzione a valori in  $\overline{\mathbf{R}}$ .

Denotiamo con  $g_K(x)$  la somma parziale  $K$ -esima della serie. Grazie alla (\*) si vede subito che  $\|g_K\|_{L^2} \leq 1$  per ogni  $K$ : applicando il teorema di Beppo Levi alla successione crescente di funzioni non negative  $g_K^2(x)$  si ottiene che  $\|g\|_{L^2} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \|g_K\|_{L^2} \leq 1$ . In particolare  $g \in L^2$  e quindi  $g(x) < +\infty$  per quasi ogni  $x$ .

Se ne deduce che per quasi ogni  $x$  la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x))$$

converge assolutamente. D'altra parte, si vede subito che la somma parziale  $K$ -esima di questa "serie telescopica" non è altro che  $u_{n_{K+1}}(x) - u_{n_1}(x)$ : abbiamo così dimostrato che la successione di funzioni  $u_{n_k}(x)$  converge puntualmente ad un numero reale  $u(x)$  per quasi ogni  $x \in \mathbf{R}$ .

Applichiamo ora il teorema della convergenza dominata alla successione di funzioni  $(u_{n_k}(x))^2$ : essa tende puntualmente quasi ovunque alla funzione  $(u(x))^2$ , e la convergenza è dominata dalla funzione sommabile  $(u_{n_1} + g(x))^2$ . Allora  $u(x) \in L^2(2\pi)$  e riapplicando il teorema della convergenza dominata alla successione  $(u_{n_k}(x) - u(x))^2$  si ottiene che

$$\|u_{n_k} - u\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Quest'ultima proprietà vale in realtà per tutta la successione  $\{u_n\}$  e non solo per la sottosuccessione  $u_{n_k}$ : fissiamo infatti  $\varepsilon > 0$ . Per definizione di successione di Cauchy troviamo  $\nu \in \mathbf{N}$  tale che  $\|u_n - u_m\|_{L^2} < \varepsilon$  per ogni  $m, n \geq \nu$ . Troviamo poi  $K \in \mathbf{N}$  tale che  $\|u_{n_k} - u\|_{L^2} < \varepsilon$  per ogni  $k \geq K$ .

Sia poi  $n \geq \nu$ , e scegliamo  $k \geq K$  in modo tale che  $n_k \geq \nu$ : allora

$$\|u_n - u\|_{L^2} \leq \|u_n - u_{n_k}\|_{L^2} + \|u_{n_k} - u\|_{L^2} < 2\varepsilon.$$

Q.E.D.

Passiamo ad un importantissimo teorema, che migliora di gran lunga il teorema di riduzione degli integrali doppi che abbiamo visto per l'integrale di Riemann:

*TEOREMA (di Fubini e Tonelli):* Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  una funzione misurabile. Allora

- (i) Se  $f \geq 0$ , allora per quasi ogni  $y \in \mathbf{R}$  la funzione  $x \mapsto f(x, y)$  è misurabile sulla retta reale. Inoltre, la funzione  $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx$  è misurabile e si ha

$$(*) \int_{\mathbf{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx \right) dy.$$

Ovviamente, le stesse cose valgono anche scambiando il ruolo di  $x$  e  $y$ .

- (ii) Se  $f$  è di segno qualunque e  $\int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(x, y)| dx \right) dy < +\infty$ , allora  $f$  è sommabile. La stessa cosa vale anche scambiando l'ordine di integrazione.

- (iii) Se  $f$  è di segno qualunque e sommabile, continua a valere l'enunciato del punto (i).

La dimostrazione è un po' complicata, per cui la ometteremo.

Osserviamo che se la funzione  $f$  è di segno qualunque e non è sommabile, l'enunciato non è più vero e i due integrali iterati possono essere diversi, come mostrano esempi anche semplici<sup>7</sup>. Invece, il teorema si generalizza a dimensione superiore: lo spazio ambiente può essere  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ , e possiamo supporre  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $y \in \mathbf{R}^k$ ...

## 7 Lezione del 21/12/2016 (1 ora)

Dopo l'enunciato del teorema di Fubini, diamo anche quello del teorema di cambio di variabile per gli integrali multipli: una versione non ottimale è la seguente.

*TEOREMA (Del cambiamento di variabili negli integrali multipli):* Sia  $\Phi : A \rightarrow B$  un diffeomorfismo, con  $A$  e  $B$  aperti di  $\mathbf{R}^n$ ,  $f : B \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  una funzione integrabile. Allora si ha

$$\int_B f(y) dy = \int_A f(\Phi(x)) |\det(\nabla \Phi(x))| dx.$$

---

<sup>7</sup>Si consideri per esempio la funzione  $f(x, y) = (x - y)/(x + y)^3$ : i suoi integrali iterati sono finiti e diversi sul quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

I due teoremi precedenti sono ovviamente utilissimi nelle applicazioni. . . e hanno anche delle suggestive conseguenze “geometriche”: dal teorema di Fubini segue subito che l’integrale di Lebesgue di una funzione misurabile  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  non è altro che la *misura del sottografico di  $f$*  in  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Il teorema del cambiamento di variabili garantisce che la misura di Lebesgue è *invariante per isometrie*: fino ad ora, sapevamo solo che lo era per traslazioni!

Nella parte seguente del corso, vogliamo studiare meglio la teoria delle equazioni differenziali ordinarie, già incontrata al primo anno. Vogliamo cominciare con un teorema che assicura, sotto certe condizioni, che la soluzione del problema di Cauchy *esiste localmente* ed è *unica*.

Consideriamo dunque il problema di Cauchy del primo ordine

$$(*) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove  $f$  è una data funzione continua di due variabili definita in un intorno di  $(t_0, x_0)$ .

Supponiamo di avere una soluzione  $x(t)$  del problema: integriamo ambo i membri dell’equazione tra  $t_0$  e  $t$ , tenendo conto della condizione iniziale. Otteniamo allora l’identità

$$(**) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds,$$

valida per tutti i  $t$  in cui è definita la soluzione.

Vale anche il viceversa:

*PROPOSIZIONE:* Sia  $x \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$  una funzione per cui vale l’identità integrale (\*\*). Allora  $x(t)$  è derivabile, ed è una soluzione del problema di Cauchy (\*) nell’intervallo  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ .

*DIM.:* Sostituendo  $t = t_0$  in (\*\*) si ottiene la condizione iniziale  $x(t_0) = x_0$ . Inoltre, a secondo membro abbiamo l’integrale tra  $t_0$  e  $t$  di una funzione continua: per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, la derivata di questa quantità è  $f(t, x(t))$ , e quindi  $x(t)$  è derivabile e soddisfa l’equazione differenziale (\*). Q.E.D.

Siamo finalmente in grado di enunciare un Teorema di esistenza e unicità locale per il nostro problema di Cauchy:

*TEOREMA (di Cauchy-Lipschitz):* Sia  $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - R, x_0 + R] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua soddisfacente alla seguente condizione di Lipschitz:

esiste  $L > 0$  tale che

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall t \in [t_0 - a, t_0 + a], \forall x_1, x_2 \in [x_0 - R, x_0 + R].$$

Allora è possibile trovare un  $\delta \in (0, a]$ , tale che nell'intervallo  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  esiste una soluzione del problema di Cauchy (\*). Inoltre tale soluzione è unica, nel senso che due soluzioni di (\*) definite in uno stesso intorno di  $t_0$  coincidono.

Vedremo domani la dimostrazione!

## 8 Lezione del 22/12/2016 (2 ore)

*DIM.:* Grazie alla Proposizione, basta in realtà cercare soluzioni continue dell'equazione integrale (\*\*).

Per il teorema di Weierstrass, la funzione continua  $|f(x, t)|$  ammette massimo sul rettangolo  $[t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - R, x_0 + R]$ : chiamiamo  $M$  tale massimo. Scegliamo poi

$$\delta = \min\left\{a, \frac{1}{2L}, \frac{R}{M}\right\}.$$

Definiamo un'applicazione  $T$  che ad ogni elemento dell'insieme di funzioni

$$X = \left\{ x \in C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) : x(t) \in [x_0 - R, x_0 + R] \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \right\}$$

ne associa un'altra che chiamiamo  $T(x)$ :

$$(T(x))(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Chiaramente, per ogni  $x \in X$  la funzione  $T(x)$  è continua (ed anzi derivabile). Verifichiamo che, in realtà,  $T : X \rightarrow X$  ed è una *contrazione*.

Intanto, se  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  abbiamo

$$|(T(x))(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \right| \leq M \cdot \delta \leq R$$

grazie alla condizione di Lipschitz. Dunque  $(T(x))(t) \in [x_0 - R, x_0 + R]$ , e effettivamente  $T : X \rightarrow X$ .

Inoltre, se  $x_1(t), x_2(t) \in X$ :

$$\begin{aligned} |(T(x_1))(t) - (T(x_2))(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| ds \right| \leq \\ &\left| \int_{t_0}^t L|x_1(s) - x_2(s)| ds \right| \leq L \cdot \delta \|x_1 - x_2\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Passando al sup per  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  abbiamo allora

$$\|T(x_1) - T(x_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_\infty,$$

e  $T$  è una contrazione di  $X$  in  $X$ .

L'insieme di funzioni  $X$ , dotato della metrica uniforme, è evidentemente un sottoinsieme chiuso di  $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ :  $X$  è dunque uno *spazio metrico completo*.

Allora, grazie al teorema delle contrazioni,  $T$  ha un unico punto fisso: esso è evidentemente l'unica soluzione dell'equazione integrale (\*\*), e quindi del problema di Cauchy (\*). Q.E.D.

La dipendenza di  $\delta$  dalla costante di Lipschitz  $L$  può essere facilmente eliminata: in realtà, l'(unica) soluzione locale esiste su  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  con  $\delta = \min\{a, R/M\}$ . Questo fatto ci servirà nel seguito per dimostrare un risultato di esistenza globale!

Per mostrarlo, dimostriamo per prima cosa il seguente, immediato corollario del teorema delle contrazioni:

*PROPOSIZIONE: Sia  $X$  uno spazio metrico completo,  $T : X \rightarrow X$  una funzione per la quale esiste  $k \in \mathbf{N}$ ,  $k \geq 1$  tale che  $T^{(k)}$  (iterata  $k$  volte di  $T$ <sup>8</sup>) è una contrazione. Allora  $T$  ha un unico punto fisso in  $X$ .*

*DIM.:* Il teorema delle contrazioni ci assicura che  $T^{(k)}$  ha un unico punto fisso  $\bar{x}$ . Ma allora anche  $T(\bar{x})$  è un punto fisso di  $T^{(k)}$ :  $T^{(k)}(T(\bar{x})) = T(T^{(k)}(\bar{x})) = T(\bar{x})$ . Ma allora  $T(\bar{x}) = \bar{x}$ , grazie all'unicità del punto fisso di  $T^{(k)}$ : anche  $T$  possiede un punto fisso! Tale punto fisso è poi unico, perché ogni punto fisso di  $T$  è tale anche per  $T^{(k)}$ . Q.E.D.

*COROLLARIO: Con le notazioni della dimostrazione del Teorema di Cauchy-Lipschitz, la soluzione (unica) del problema di Cauchy esiste anche scegliendo  $\delta = \min\{a, R/M\}$ .*

*DIM.:* La condizione su  $\delta$  è sufficiente a garantire che  $T : X \rightarrow X$ . Se mostriamo che esiste un'iterata di  $T$  che è una contrazione, possiamo applicare la proposizione appena dimostrata e concludere che esiste un unico punto fisso.

A questo scopo, proviamo per induzione che per ogni  $x, y \in X$  si ha

$$|T^{(k)}(x)(t) - T^{(k)}(y)(t)| \leq \frac{L^k}{k!} |t - t_0|^k \|x - y\|_\infty.$$

---

<sup>8</sup> Cioè  $T^{(k)} = T \circ T \circ \dots \circ T$  ( $k$  volte).



Per  $k = 1$  abbiamo già provato questa disuguaglianza dimostrando il teorema. Supponiamola vera per  $k$ . Allora, usando la definizione dell'operatore  $T$  e la lipschitzianità:

$$|T^{(k+1)}(x)(t) - T^{(k+1)}(y)(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^t |T^{(k)}(x)(s) - T^{(k)}(y)(s)| ds \right|.$$

Usando allora l'ipotesi induttiva ed integrando si ottiene la tesi con  $k + 1$  al posto di  $k$ .

Passando al sup:

$$\|T^{(k)}(x) - T^{(k)}(y)\|_\infty \leq \frac{L^k}{k!} \delta^k \|x - y\|_\infty.$$

Siccome  $(L\delta)^k/k! \rightarrow 0$ , l'iterata è una contrazione per  $k$  abbastanza grande. Q.E.D.

*OSSERVAZIONE:* Si noti che, nel teorema di esistenza e unicità, in generale è lecito sperare soltanto nell'esistenza *locale*: per esempio, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

ha soluzione unica, che però è definita soltanto su una semiretta.

Analogamente, se rimuoviamo l'ipotesi di lipschitzianità in generale la soluzione non è più unica: il problema

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni. Vedremo invece che l'*esistenza locale* è garantita nella sola ipotesi di continuità della funzione  $f$ .

*OSSERVAZIONE (Lipschitzianità delle funzioni regolari):* Una condizione sufficiente per avere la lipschitzianità di  $f$  nella seconda variabile è la richiesta che sia  $f_x \in \mathcal{C}^0([t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - R, x_0 + R])$ . Sia infatti  $L = \max\{|f_x(t, x)| : (t, x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - R, x_0 + R]\}$ . Dati  $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$  e  $x, y \in [x_0 - R, x_0 + R]$  possiamo scrivere

$$|f(t, y) - f(t, x)| = \left| \int_x^y f_x(t, u) du \right| \leq L|y - x|.$$

Si vede facilmente che la costante  $L$  che abbiamo scelto è anche *la più piccola* per cui la disuguaglianza di Lipschitz è vera in tutto il rettangolo.

*OSSERVAZIONE (Esistenza globale per  $f$  globalmente lipschitziana su una striscia)*: La versione migliorata del teorema ci garantisce che se  $f$  è definita sulla striscia  $[t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbf{R}$  ed è lipschitziana in  $x$  uniformemente rispetto a  $t$ , allora la soluzione è *globale*, nel senso che esiste sull'intero intervallo  $[t_0 - a, t_0 + a]$ . Infatti, la richiesta che  $\delta \leq R/M$  è necessaria solo per evitare che  $T(x)(t)$  esca dall'intervallo  $[x_0 - R, x_0 + R]$ : questa richiesta può essere tolta se la funzione è definita sulla striscia infinita.

L'ipotesi di lipschitzianità sull'intera striscia è però piuttosto forte (anche se è soddisfatta nel caso importantissimo delle equazioni - e dei sistemi - lineari): vedremo tra breve come indebolirla per avere un risultato di esistenza globale più generale.

*OSSERVAZIONE (Prolungamento di soluzioni, soluzione massimale del problema di Cauchy)*: Sia data l'equazione differenziale  $x'(t) = f(t, x(t))$ , con  $f$  definita su un aperto  $A \subset \mathbf{R}^2$  e soddisfacente le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz *localmente*, cioè in un intorno rettangolare di ogni punto di  $A$ . Questo garantisce l'esistenza di un'(unica) soluzione locale *per ogni* dato iniziale scelto in  $A$ .

Una semplice osservazione è allora che *due soluzioni locali dell'equazione che coincidono in un punto  $t_0$ , devono coincidere nell'intersezione degli intervalli su cui sono definite*: supponiamo per assurdo che ci siano punti a destra di  $t_0$  in cui le soluzioni differiscono, e sia  $t_*$  il loro estremo inferiore. Le due soluzioni devono coincidere in  $t_*$  (per continuità): il teorema di Cauchy-Lipschitz assicura che allora coincidono anche in un intorno destro di  $t_*$  (basta risolvere il problema di Cauchy con punto iniziale  $t_*$ ), contro la definizione di inf. In modo analogo, le due soluzioni devono coincidere a sinistra di  $t_0$ .

Questa osservazione permette allora di dedurre che tra tutte le soluzioni di un fissato problema di Cauchy, ve n'è una definita su un *intervallo massimale*: questo è semplicemente l'unione dei domini di tutte le soluzioni.

*OSSERVAZIONE (Teorema di fuga dai compatti)*: Nelle stesse ipotesi dell'osservazione precedente, è possibile dimostrare che una soluzione massimale  $u_* : I_* \rightarrow \mathbf{R}$  deve necessariamente *uscire da ogni sottinsieme compatto  $K$  di  $A$* : possiamo esprimere informalmente questo fatto dicendo che una soluzione massimale *scappa verso il bordo dell'insieme  $A$  su cui è definito il secondo membro dell'equazione*, quando  $t$  tende agli estremi dell'intervallo in cui tale soluzione esiste.

*OSSERVAZIONE (Esistenza e unicità per sistemi di equazioni del primo ordine)*: Il problema di Cauchy per un sistema di  $n$  equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (in forma normale) è formalmente identico a quello

per un'equazione singola:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

se assumiamo che la funzione  $f$  e l'incognita  $x$  siano *vettoriali*:

$$\begin{aligned} f(t, x) &= (f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n)) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \\ x(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{aligned}$$

Il teorema di Cauchy-Lipschitz vale allora, *con dimostrazione assolutamente identica*, anche per i sistemi!

Inoltre, anche in questo caso la lipschitzianità è implicata dalla continuità delle derivate parziali di  $f$  rispetto alle ultime  $n$  variabili: la dimostrazione è un semplice adattamento di quella che abbiamo visto nel caso scalare.

## 9 Lezione del 10/1/2017 (2 ore)

Vediamo subito un risultato di esistenza globale: anche in questo caso, lo enunciamo e dimostriamo per un'equazione scalare, ma il risultato vale (con identica dimostrazione) per i sistemi.

*TEOREMA (di esistenza globale):* Sia  $f : [a, b] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua soddisfacente alla seguente condizione di Lipschitz locale: per ogni  $R > 0$  esiste  $L = L(R) > 0$  tale che

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall t \in [a, b], \forall x_1, x_2 \in [-R, R].$$

Supponiamo inoltre che  $f$  abbia crescita lineare nella variabile  $x$ : esistono due costanti  $A, B > 0$  tali che

$$|f(t, x)| \leq A + B|x| \quad \forall t \in [a, b], \forall x \in \mathbf{R}.$$

Allora esiste un'(unica) soluzione del problema di Cauchy (\*) (con  $t_0 \in [a, b]$ ), definita sull'intero intervallo  $[a, b]$ .

*DIM. (non vista in classe):* Poiché abbiamo già dimostrato l'unicità della soluzione massimale, rimane solo da provare che essa è definita sull'intero intervallo!

Mostriamo solo l'esistenza della soluzione su  $[t_0, b]$ : procedendo allo stesso modo si prova che la soluzione esiste anche su  $[a, t_0]$ .

Cominciamo col mostrare che per ogni fissato  $\bar{t} \in [a, b)$  e per ogni fissato  $\bar{x} \in \mathbf{R}$ , la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale  $x(\bar{t}) = \bar{x}$  è definita *almeno* sull'intervallo  $[\bar{t}, \bar{t} + \delta]$  con

$$(*) \quad \delta = \min\left\{b - \bar{t}, \frac{1}{1 + B}\right\}.$$

Sappiamo infatti, dalla stima “migliorata” di  $\delta$  nel teorema di Cauchy-Lipschitz, che se  $f$  soddisfa la condizione di Lipschitz su  $[\bar{t}, b] \times [\bar{x} - R, \bar{x} + R]$ , allora la soluzione esiste su  $[\bar{t}, \bar{t} + \delta]$  con  $\delta = \min\{b - \bar{t}, R/M\}$  ove

$$M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in [\bar{t}, b] \times [\bar{x} - R, \bar{x} + R]\}.$$

Per ottenere (\*) basta scegliere  $R = A + B|\bar{x}|$ : in tal caso, per ogni  $(t, x) \in [\bar{t}, b] \times [\bar{x} - R, \bar{x} + R]$  abbiamo

$$|f(t, x)| \leq A + B|x| \leq A + B|\bar{x}| + BR = (1 + B)R,$$

da cui  $M \leq (1 + B)R$  e  $R/M \geq 1/(1 + B)$ .

In soldoni abbiamo provato che risolvendo il problema di Cauchy *con un punto iniziale arbitrario*, la soluzione o esiste fino a  $b$ , oppure è definita su un intervallino di ampiezza almeno  $1/(1 + B)$  a destra del punto iniziale.

Partendo da  $t_0$ , la soluzione sarà quindi definita almeno su  $[t_0, t_0 + 1/(1 + B)]$ . A questo punto, possiamo prendere il *valore finale* di tale soluzione nel punto  $t_0 + 1/(1 + B)$  come dato iniziale di un nuovo problema di Cauchy...e potremo prolungare la soluzione fino a  $t_0 + 2/(1 + B)$ . Procedendo in questo modo, in un numero finito di passi avremo prolungato la soluzione sino al punto  $b$ , estremo finale del nostro intervallo. Q.E.D.

La condizione di Lipschitz serve a garantire l'unicità delle soluzioni: essa non è invece necessaria a dimostrare l'esistenza locale. Vale infatti un teorema, dovuto a Peano, che assicura l'esistenza di una soluzione nella sola ipotesi di continuità della funzione  $f(t, x)$ :

**TEOREMA (Peano):** Sia  $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - R, x_0 + R] \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua. E' possibile trovare un  $\delta \in (0, a]$ , tale che nell'intervallo  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  esiste una soluzione del problema di Cauchy

$$(P) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

---

<sup>9</sup>Siccome vogliamo la soluzione soltanto a destra di  $\bar{t}$ , le richieste su  $f$  sono necessarie solo a destra di tale punto!

Tale soluzione non è necessariamente unica.

Omettiamo la dimostrazione di questo risultato.

Passiamo ora a studiare in modo un po' sistematico le soluzioni di un'equazione lineare di ordine  $n$ . Per prima cosa, definiamo un operatore differenziale lineare di ordine  $n$ : si tratta di un'applicazione lineare  $L : \mathcal{C}^n([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}^0([a, b])$  del tipo

$$Lx(t) = D^n x(t) + a_{n-1}(t)D^{n-1}x(t) + a_{n-2}(t)D^{n-2}x(t) + \dots + a_1 D x(t) + a_0 x(t),$$

ove  $D^k x(t)$  indica la derivata  $k$ -esima della funzione  $x(t)$ , mentre  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{C}^0([a, b])$  sono fissate funzioni continue.

Un'equazione differenziale lineare di ordine  $n$  associata a questo operatore è del tipo  $Lx(t) = f(t)$ , con  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ . Il problema di Cauchy relativo consiste nel trovare la soluzione dell'equazione che soddisfa un' $n$ -upla di condizioni iniziali del tipo  $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$ , con  $t_0 \in [a, b]$  e  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  fissati numeri reali.

Osserviamo per prima cosa che questo problema di Cauchy ha un'unica soluzione globale definita sull'intero intervallo  $[a, b]$ : a questo scopo, basta osservare che tale problema di Cauchy, indichiamolo con (P), è equivalente al seguente, che coinvolge un sistema di  $n$  equazioni del primo ordine:

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} x'_{n-1}(t) = -a_{n-1}(t)x_{n-1}(t) - a_{n-2}(t)x_{n-2}(t) + \dots - a_1 x_1(t) - a_0 x_0(t) + f(t) \\ x'_{n-2}(t) = x_{n-1}(t) \\ x'_{n-3}(t) = x_{n-2}(t) \\ \dots \\ x'_0(t) = x_1(t) \\ x_{n-1}(t_0) = x_{n-1} \\ x_{n-2}(t_0) = x_{n-2} \\ \dots \\ x_1(t_0) = x_1 \\ x_0(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

Infatti, la funzione  $x_0(t)$  data dal problema (P') è evidentemente una soluzione di (P). Viceversa, una soluzione  $x(t)$  del problema (P) assieme alle sue derivate fino alla  $(n-1)$ -esima forma l' $n$ -upla soluzione del sistema (P').

Evidentemente, al sistema (P') è applicabile il teorema di esistenza e unicità globale: per ogni  $n$ -upla di dati iniziali esiste una ed una sola soluzione definita sull'intero intervallo  $[a, b]$ . Lo stesso vale dunque per il problema di Cauchy originale (P) per l'equazione di ordine  $n$ <sup>10</sup>. .

<sup>10</sup>Un analogo risultato di esistenza e unicità locale vale anche per il problema di Cauchy relativo ad un'equazione non lineare di ordine  $n$ : anche questa è equivalente ad un sistema di  $n$  equazioni del primo ordine, ottenuto con il trucco sopra.

Stabilito che vale il risultato di esistenza e unicità, passiamo a studiare la *struttura dell'insieme delle soluzioni* dell'equazione lineare  $Lx(t) = f(t)$ . Per farlo, partiamo dal caso dell'equazione *omogenea*  $Lx(t) = 0$ :

*TEOREMA (Spazio delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea di ordine  $n$ ):* Dato l'operatore lineare  $L$  di cui sopra, l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea  $Lx(t) = 0$

$$\mathcal{V} = \{x(t) : Lx(t) = 0\}$$

è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$ . In particolare,  $n$  soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea generano l'intero insieme  $\mathcal{V}$ .

*DIM.:* È immediato verificare che una combinazione lineare di soluzioni dell'equazione omogenea è ancora una soluzione (è una conseguenza della linearità della derivata): l'insieme  $\mathcal{V}$  delle soluzioni è dunque uno spazio vettoriale reale.

Fissiamo allora  $t_0 \in [a, b]$  e consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{V} &\rightarrow \mathbf{R}^n \\ x(t) &\mapsto (x(t_0), x'(t_0), x''(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) \end{aligned}$$

che ad una soluzione  $x(t)$  associa il vettore dei suoi *dati iniziali di Cauchy*.

L'applicazione  $\Psi$  è evidentemente lineare: dico che si tratta di un isomorfismo di spazi vettoriali.

La suriettività di  $\Psi$  viene dal teorema di esistenza globale: qualunque dato di Cauchy si scelga, esiste una soluzione.

L'iniettività è invece conseguenza dell'unicità:  $x(t) \in \ker \Psi$  se e soltanto se il vettore dei dati iniziali è nullo. Ora, la funzione identicamente nulla è chiaramente una soluzione del problema di Cauchy per l'equazione omogenea con dati nulli: grazie al risultato di unicità non ve ne sono altre. In altre parole,  $\ker \Psi = \{0\}$  e  $\Psi$  è un isomorfismo. Q.E.D.

Vediamo subito come è fatto l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare di ordine  $n$  completa:

*COROLLARIO (Soluzioni di un'equazione lineare di ordine  $n$  completa):* L'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare di ordine  $n$

$$\mathcal{W} = \{x(t) : Lx(t) = f(t)\}$$

è uno spazio affine modellato sullo spazio vettoriale  $\mathcal{V}$  delle soluzioni dell'equazione omogenea associata. Precisamente, se  $x_p(t)$  è una qualunque soluzione particolare dell'equazione, allora

$$\mathcal{W} = \{x_p(t) + x_0(t) : Lx_0(t) = 0\}.$$

*DIM.:* Siano  $x_1(t), x_2(t)$  due soluzioni dell'equazione completa  $Lx(t) = f(t)$ . È immediato verificare che  $x_1(t) - x_2(t)$  è una soluzione dell'equazione omogenea  $Lx(t) = 0$ . Q.E.D.

Il teorema appena visto ci dice che per risolvere un'equazione lineare omogenea di ordine  $n$  è sufficiente trovarne  $n$  soluzioni *linearmente indipendenti*.

Un criterio per stabilire se  $n$  soluzioni sono, appunto, linearmente indipendenti, coinvolge il *determinante wronskiano*:

*PROPOSIZIONE (Wronskiano):* Siano  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  soluzioni dell'equazione lineare omogenea di ordine  $n$   $Lx(t) = 0$ . Queste soluzioni sono linearmente indipendenti se e soltanto se il loro determinante wronskiano

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) & \dots & x_n''(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

non si annulla mai nell'intervallo  $[a, b]$ .

*DIM.:* Per ogni fissato  $t_0 \in [a, b]$ ,  $W(t_0)$  è il determinante di una matrice che ha come colonne i vettori dei dati iniziali dei problemi di Cauchy di cui sono soluzioni  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Ricordando l'isomorfismo lineare  $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}^n$  definito nella dimostrazione del teorema si ha facilmente la tesi:  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  formano una base di  $\mathcal{V}$  se e solo se le loro immagini secondo  $\Psi$  (che sono le colonne della matrice) formano una base di  $\mathbf{R}^n$ , cioè se e solo se la matrice wronskiana è non singolare. Q.E.D.

Vedremo tra poco come trovare  $n$  soluzioni indipendenti di un'equazione lineare a coefficienti costanti. Il caso generale, purtroppo, non è così roseo. . .

In compenso, se siamo in grado di risolvere l'equazione omogenea, c'è anche un metodo per trovare una soluzione particolare di un'equazione completa  $Lx(t) = f(t)$ :

*TEOREMA (Metodo della variazione delle costanti):* Data l'equazione lineare di ordine  $n$   $Lx(t) = f(t)$ , siano  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata. Allora esistono  $n$  funzioni di classe  $\mathcal{C}^1([a, b])$ ,  $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$  che soddisfano il sistema

$$(*) \begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + C_2'(t)x_2(t) + \dots + C_n'(t)x_n(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t) + \dots + C_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1''(t) + C_2'(t)x_2''(t) + \dots + C_n'(t)x_n''(t) = 0 \\ \dots \\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + C_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \dots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}$$

Si ha allora che la funzione  $x_p(t) := C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + \dots + C_n(t)x_n(t)$  è una soluzione particolare dell'equazione completa.

Vedremo la dimostrazione la prossima volta.

## 10 Lezione del 12/1/2017 (2 ore)

*DIM.:* Mostriamo innanzitutto che il sistema (\*) è risolubile. Innanzitutto, per ogni fissato  $t$  è certamente possibile trovare una  $n$ -upla di numeri reali  $C_1'(t), \dots, C_n'(t)$  che soddisfano il sistema (che è un onesto sistema *algebrico* di equazioni lineari, di quelli studiati nel corso di algebra lineare!): la matrice incompleta del sistema non è altro che la matrice wronskiana, che sappiamo essere non singolare!

Inoltre, le soluzioni  $C_1'(t), \dots, C_n'(t)$  sono funzioni continue di  $t$ : per rendersene conto, basta ricordarsi come è fatta l'espressione dell'inversa di una matrice non singolare  $n \times n$  (i coefficienti della matrice da invertire sono funzioni continue di  $t$ ...ed il determinante, che finisce a denominatore nell'espressione dell'inversa, non si annulla mai per la proposizione precedente). Siccome anche il vettore dei termini noti è continuo in  $t$ , l'asserto è provato.

A questo punto, per trovare  $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$  basta prendere delle primitive (arbitrarie) delle funzioni che abbiamo trovato risolvendo il sistema.

Non ci resta allora che far vedere che  $x_p(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + \dots + C_n(t)x_n(t)$  è soluzione dell'equazione completa.

Calcoliamoci le derivate: usando la prima equazione del sistema si vede subito che  $x_p'(t) = C_1(t)x_1'(t) + C_2(t)x_2'(t) + \dots + C_n(t)x_n'(t)$ . Analogamente avremo  $x_p''(t) = C_1(t)x_1''(t) + C_2(t)x_2''(t) + \dots + C_n(t)x_n''(t)$  e più in generale  $x_p^{(k)}(t) = C_1(t)x_1^{(k)}(t) + C_2(t)x_2^{(k)}(t) + \dots + C_n(t)x_n^{(k)}(t)$  per  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .

Invece

$$x_p^{(n)}(t) = C_1(t)x_1^{(n)}(t) + C_2(t)x_2^{(n)}(t) + \dots + C_n(t)x_n^{(n)}(t) + f(t).$$

Sostituendo nell'espressione dell'operatore  $L$  si ottiene

$$Lx_p(t) = C_1(t)Lx_1(t) + C_2(t)Lx_2(t) + \dots + C_n(t)Lx_n(t) + f(t) = f(t),$$

dove si è usato il fatto che  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  sono soluzioni dell'omogenea. Q.E.D.

Vedremo ora come fare a trovare  $n$  soluzioni linearmente indipendenti di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti.



Per ragioni che saranno chiare tra un attimo, ci tornerà utile cercare *soluzioni a valori complessi* della nostra equazione differenziale. Una funzione (di una variabile reale) a valori complessi si deriva nel modo ovvio: poniamo per definizione  $D(a(t) + ib(t)) := Da(t) + iDb(t)$ . A questo punto, ha perfettamente senso cercare soluzioni a valori complessi dell'equazione omogenea  $Lx(t) = 0$ . Si noti poi che la parte reale e la parte immaginaria di una soluzione complessa saranno soluzioni reali.

Altra cosa che ci servirà sarà saper fare l'esponenziale di un *numero complesso*.

Ricordando lo sviluppo in serie di  $e^x$ , è abbastanza naturale dare la definizione seguente: se  $z \in \mathbf{C}$ , poniamo

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Con ragionamenti non difficili si può verificare che la serie esponenziale converge per ogni  $z \in \mathbf{C}$ .

Si può anche far vedere, ma è un po' più complicato (c'è bisogno del prodotto alla Cauchy di serie...), che  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ , per cui il nome "esponenziale complesso" è legittimo.

Cosa succede se calcoliamo l'esponenziale complesso di un numero immaginario puro? Usando la definizione e ricordando le serie di Taylor di seno e coseno, si vede subito che vale la *formula di Eulero*

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta.$$

In conclusione, avremo dunque

$$e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha(\cos \beta + i \sin \beta).$$

[*In alternativa, si potrebbe prendere questa formula come definizione, per la verità un po' misteriosa, di esponenziale complesso. Si verifichi per esercizio che vale la proprietà dell'esponenziale richiamata sopra, cioè che si ha*

$$e^{(\alpha_1+i\beta_1)+(\alpha_2+i\beta_2)} = e^{\alpha_1+i\beta_1} \cdot e^{\alpha_2+i\beta_2}.]$$

Una cosa che possiamo verificare senza difficoltà è che  $D(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}$  anche per  $\lambda$  complesso. Questo ci suggerisce come trovare soluzioni di equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti: sia dato l'operatore

$$Lx(t) := D^n x(t) + a_{n-1}D^{n-1}x(t) + a_{n-2}D^{n-2}x(t) + \dots + a_1Dx(t) + a_0x(t),$$

con  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  costanti reali fissate.

L'equazione caratteristica associata all'operatore  $L$  è, per definizione, l'equazione polinomiale nell'incognita  $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra, tale equazione possiede  $n$  radici complesse  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (non necessariamente tutte distinte). È immediato verificare che le radici caratteristiche permettono di fattorizzare l'operatore  $L$  nel prodotto di  $n$  operatori lineari a coefficienti costanti del primo ordine:

$$Lx(t) = \left( \prod_{i=1}^n (D - \lambda_i I) \right) x(t),$$

dove  $I$  è l'identità. In particolare, si noti che gli operatori del primo ordine che compaiono in questa fattorizzazione *commutano tra loro*.

Usando questa fattorizzazione dell'operatore si vede subito che

*PROPOSIZIONE (Soluzioni esponenziali di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti): Una funzione del tipo  $e^{\lambda t}$  è soluzione (a valori complessi) dell'equazione omogenea a coefficienti costanti  $Lx(t) = 0$  se e solo se  $\lambda$  è una delle radici caratteristiche dell'operatore  $L$ . Inoltre, se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  sono radici caratteristiche distinte, allora le soluzioni  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_k t}$  sono linearmente indipendenti.*

*DIM.:* Sia  $\lambda_i$  una delle radici dell'equazione caratteristica. Allora  $(D - \lambda_i I)e^{\lambda t} = (\lambda - \lambda_i)e^{\lambda t}$ : il risultato è nullo se e solo se  $\lambda = \lambda_i$ . Usando la fattorizzazione dell'operatore deduciamo allora che

$$Le^{\lambda t} = e^{\lambda t} \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) :$$

$e^{\lambda t}$  è soluzione dell'equazione omogenea se e soltanto se  $\lambda$  è una delle radici dell'equazione caratteristica.

Mostriamo che  $k$  soluzioni di questo tipo  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}$ , con  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tutti distinti, sono linearmente indipendenti. Supponiamo infatti che valga l'identità

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_k e^{\lambda_k t} = 0.$$

Moltiplicando per  $e^{-\lambda_k t}$  e derivando si ottiene

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_k)e^{(\lambda_1 - \lambda_k)t} + C_2(\lambda_2 - \lambda_k)e^{(\lambda_2 - \lambda_k)t} + \dots + C_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e^{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)t} = 0.$$

Moltiplichiamo poi per  $e^{-(\lambda_{k-1}-\lambda_k)t}$  e deriviamo nuovamente:

$$C_1(\lambda_1-\lambda_k)(\lambda_1-\lambda_{k-1})e^{(\lambda_1-\lambda_{k-1})t} + \dots + C_{k-2}(\lambda_{k-2}-\lambda_k)(\lambda_{k-2}-\lambda_{k-1})e^{(\lambda_{k-2}-\lambda_{k-1})t} = 0.$$

Ripetendo il giochetto per  $k$  volte arriviamo all'espressione

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_k)(\lambda_1 - \lambda_{k-1})(\lambda_1 - \lambda_{k-2}) \dots (\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} = 0$$

da cui  $C_1 = 0$ . In maniera del tutto analoga (basta permutare gli indici...) si dimostra che  $C_2 = C_3 = \dots = C_k = 0$ : le soluzioni sono indipendenti. Q.E.D.

*OSSERVAZIONE: Che fare se ci sono radici complesse coniugate dell'equazione caratteristica.*

Grazie alla proposizione appena dimostrata, siamo in grado di trovare  $n$  soluzioni indipendenti (a valori complessi) di un'equazione lineare omogenea di ordine  $n$  la cui equazione caratteristica abbia radici distinte. Queste si trasformano poi facilmente in  $n$  soluzioni reali linearmente indipendenti, che come sappiamo generano l'intero spazio delle soluzioni.

Se infatti l'equazione caratteristica ha una radice complessa  $\lambda = \alpha + i\beta$ , vi è anche la coniugata  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  (perché l'equazione caratteristica ha coefficienti reali). Ma allora

$$\begin{aligned} \frac{e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda}t}}{2} &= e^{\alpha t} \cos \beta t \\ \frac{e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda}t}}{2i} &= e^{\alpha t} \sin \beta t \end{aligned}$$

sono due soluzioni reali che generano lo stesso sottospazio...

Vediamo come comportarci nel caso che il polinomio caratteristico abbia radici multiple, cioè sia del tipo

$$(\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} (\lambda - \lambda_1)^{\mu_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{\mu_r},$$

ove evidentemente si avrà  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = n$ . La fattorizzazione dell'operatore ha ora dei fattori ripetuti:

$$Lx(t) = \left( \prod_{i=1}^r (D - \lambda_i I)^{\mu_i} \right) x(t).$$

Mostriamo che sotto queste condizioni le funzioni  $t^k e^{\lambda_i t}$  sono soluzioni dell'equazione per ogni  $i = 1, \dots, r$  e per ogni  $k = 0, 1, \dots, \mu_i - 1$ : si ha

infatti  $(D - \lambda_i I)(t^k e^{\lambda_i t}) = k t^{k-1} e^{\lambda_i t}$  da cui iterando  $(D - \lambda_i I)^k (t^k e^{\lambda_i t}) = k! e^{\lambda_i t}$  e  $(D - \lambda_i I)^{k+1} (t^k e^{\lambda_i t}) = 0$ .

In questo modo, ci siamo fabbricati esattamente  $n$  soluzioni dell'equazione omogenea: se dimostreremo che sono linearmente indipendenti, abbiamo finito<sup>11</sup>!

Una relazione di dipendenza lineare tra di esse ha la forma  $P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + P_r(t)e^{\lambda_r t} = 0$ , dove  $P_1, P_2, \dots, P_r$  sono polinomi a coefficienti complessi e il grado di  $P_i$  è strettamente minore di  $\mu_i$ . Supponiamo per assurdo che, per esempio,  $P_1$  non sia identicamente nullo. Allora moltiplichiamo per  $e^{-\lambda_r t}$  e deriviamo  $\mu_r$  volte: troviamo un'identità del tipo

$$Q_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_r)t} + Q_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_r)t} + \dots + Q_{r-1}(t)e^{(\lambda_{r-1} - \lambda_r)t} = 0,$$

ove i  $Q_i$  sono ancora polinomi di grado minore di  $\mu_i$ , ed il grado di  $Q_1$  è esattamente uguale a quello di  $P_1$ . Ripetendo il trucco, arriviamo all'espressione assurda  $R_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = 0$ , ove  $R_1$  ha lo stesso grado di  $P_1$ . Le soluzioni trovate sono dunque indipendenti!

Cominciamo con un esempio di applicazione del risultato della volta scorsa sulle soluzioni di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti.

*ESEMPIO:* Si consideri l'equazione omogenea  $y^{(11)} + 2y^{(7)} + y''' = 0$ . L'equazione caratteristica è  $\lambda^{11} + 2\lambda^7 + \lambda^3 = \lambda^3(\lambda^4 + 1)^2 = 0$ , che ha come radici  $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$ , ciascuna con molteplicità 2, e poi 0 con molteplicità 3. La soluzione generale è quindi

$$\begin{aligned} y(t) = & e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_2 t \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_4 t \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + \\ & e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left( C_5 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_6 t \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_7 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_8 t \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + \\ & C_9 + C_{10}t + C_{11}t^2. \end{aligned}$$

## 11 Lezione del 13/1/2017 (3 ore)

*OSSERVAZIONE:* Un metodo più rapido per risolvere equazioni complete con  $f(t) = P(t)e^{\lambda t}$ ,  $P$  polinomio di grado qualunque.  $\lambda \in \mathbf{C}$ .

Ora abbiamo una ricetta generale per risolvere un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Se l'equazione è poi completa, il metodo della variazione delle costanti ci permette di trovarne una soluzione particolare:

<sup>11</sup>L'indipendenza lineare in classe l'abbiamo data per buona: riporto la dimostrazione per completezza.

anche in questo caso, in linea di principio, siamo capaci di trovare tutte le soluzioni!

Purtroppo, in pratica, il metodo della variazione delle costanti conduce spesso a calcoli complicati ed antipatici. In molti casi di interesse, esistono modi più veloci per trovare una soluzione particolare di un'equazione lineare non omogenea.

Uno di questi casi è quello in cui *il secondo membro dell'equazione è della forma  $f(t) = P(t)e^{\lambda t}$ , dove  $P$  è un polinomio e  $\lambda$  un numero complesso*. In questo caso, abbiamo a disposizione il cosiddetto *metodo degli annihilatori o di somiglianza o dei coefficienti indeterminati*: a parte alcuni casi “degeneri” che vedremo tra un attimo, esiste una soluzione particolare *dello stesso tipo* del secondo membro, ossia del tipo  $x_P(t) = Q(t)e^{\lambda t}$ , ove  $Q$  è un polinomio dello stesso grado di  $P$ . Per trovare la soluzione particolare è allora sufficiente sostituire nell'equazione per determinare i coefficienti del polinomio  $Q(t)$ .

I soli casi in cui non esiste una soluzione di questo tipo sono quelli in cui  $f(t)$  è una *soluzione dell'equazione omogenea*, cioè se  $Lf(t) = 0$ ... ma come vedremo anche in questi casi il problema si aggira molto facilmente!

L'osservazione fondamentale per trovare soluzioni particolari di questo tipo è che il secondo membro  $f(t)$  è soluzione di un'opportuna equazione lineare omogenea  $Mx(t) = 0$ : basta prendere un qualunque operatore lineare a coefficienti costanti  $M$  di cui  $\lambda$  sia una radice caratteristica di molteplicità maggiore del grado del polinomio  $P(t)$ . Per esempio, detto  $k$  il grado di  $P(t)$  possiamo prendere  $M = (D - \lambda I)^{k+1}$ .

Da questo si ricava che una qualunque soluzione particolare dell'equazione  $Lx(t) = f(t)$  è anche soluzione dell'equazione omogenea a coefficienti costanti  $(LM)x(t) = 0$ . Le radici caratteristiche dell'operatore  $LM$  sono semplicemente l'unione di quelle di  $L$  e di quelle di  $M$  (e la molteplicità di una di esse è la somma delle molteplicità con cui compare in  $L$  ed in  $M$ ).

Ne ricaviamo la seguente semplice ricetta:

*Si voglia trovare una soluzione particolare dell'equazione lineare a coefficienti costanti  $Lx(t) = P(t)e^{\lambda t}$ , con  $\lambda \in \mathbf{C}$  e  $P(t)$  polinomio di grado  $n$ . Allora*

- *Se  $\lambda$  non è una radice caratteristica di  $L$ , cerchiamo una soluzione del tipo*

$$x_P(t) = Q(t)e^{\lambda t},$$

*con  $Q$  polinomio di grado  $n$ .*

- *Se  $\lambda$  è una radice caratteristica di  $L$  di molteplicità  $\mu$ , cerchiamo una soluzione del tipo*

$$x_P(t) = t^\mu Q(t)e^{\lambda t},$$

*con  $Q$  polinomio di grado  $n$ .*

Passiamo a discutere le serie di Fourier. Tutto quel che segue è un riassunto (assai più dettagliato della mia lezione in aula) di quanto avete già ampiamente discusso con Giandomenico Orlandi. L'unica cosa veramente nuova è la dimostrazione del teorema di convergenza puntuale alla fine di questa lezione!

Sia  $f$  una funzione  $2\pi$ -periodica abbastanza regolare. Vorremmo esprimere  $f$  come somma di una serie di seni e di coseni:

$$(*) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

per un'opportuna scelta dei coefficienti  $a_k$  e  $b_k$ .

Per capire come calcolare i coefficienti, osserviamo innanzitutto che valgono le seguenti *relazioni di ortogonalità* (dimostrabili facilmente per esercizio): se  $m, n \in \mathbf{N} \setminus 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx &= \pi \delta_{mn}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx &= \pi \delta_{mn}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx &= 0, \end{aligned}$$

dove  $\delta_{mn}$  è il simbolo di Kronecker (vale 1 se  $m = n$ , 0 se  $m \neq n$ ).

Prendiamo la (\*) e integriamo tra  $-\pi$  e  $\pi$ , supponendo di sapere che la serie a destra converge uniformemente (in tal caso, possiamo scambiare impunemente la serie con l'integrale!): si ottiene subito

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx.$$

Analogamente, moltiplichiamo ambo i membri della (\*) per  $\cos nx$  (risp.  $\sin nx$ ) ed integriamo tra  $-\pi$  e  $\pi$ : tenendo conto delle relazioni di ortogonalità si trova subito

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx.$$

Questi coefficienti sono noti come *coefficienti di Fourier* della funzione  $f$ .

Data una qualunque funzione  $f$   $2\pi$ -periodica e sommabile sul periodo, possiamo calcolarne i coefficienti di Fourier e scrivere formalmente la serie

a secondo membro di (\*): vedremo la prossima volta sotto quali condizioni essa converge alla funzione  $f$ !

Abbiamo visto come le serie di Fourier permettano di approssimare una funzione  $2\pi$ -periodica con una somma di funzioni sinusoidali: vogliamo ottenere oggi alcuni risultati di convergenza.

Uno spazio naturale in cui studiarle è  $L^2(2\pi)$  costituito dalle funzioni  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  che siano  $2\pi$ -periodiche e *a quadrato sommabile* sul periodo  $[-\pi, \pi]$ . Tale spazio è dotato del prodotto scalare  $\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ , che induce la norma

$$\|f\|_{L^2} = \left( \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

In realtà, come abbiamo già visto occorre una piccola accortezza nella definizione dello spazio: se  $L^2(2\pi)$  fosse costituito dalle *funzioni* periodiche a quadrato sommabile sul periodo, il prodotto scalare e la norma sarebbero degeneri: la norma di una funzione *quasi ovunque nulla* è 0.

Questo problema scompare definendo  $L^2(2\pi)$  come l'insieme delle *classi di equivalenza di funzioni quasi ovunque uguali* (che siano, ovviamente,  $2\pi$ -periodiche e a quadrato sommabile nel periodo): decidiamo cioè di *identificare* due funzioni la cui differenza è quasi ovunque uguale a 0. Con questa definizione,  $L^2(2\pi)$  diventa un'onesto spazio vettoriale dotato di prodotto scalare e di norma. Abbiamo già detto inoltre, pur non avendolo dimostrato, che questo spazio è *completo*.

Ma torniamo alle nostre serie di Fourier: ricordiamo la

**DEFINIZIONE:** Data  $f \in L^2(2\pi)$ , la sua *serie di Fourier* è definita come

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

ove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad \forall k \in \mathbf{N}$$

sono chiamati *coefficienti di Fourier*.

Il risultato principale sulle serie di Fourier in  $L^2$  è il seguente:

**TEOREMA (Riesz-Fischer):** Se  $f \in L^2(2\pi)$ , la serie di Fourier converge a  $f$  rispetto alla metrica  $L^2$ . In altre parole, la distanza  $L^2$  tra la somma parziale  $N$ -esima della serie e  $f$  tende a 0 per  $N \rightarrow +\infty$ .

Non dimostreremo del tutto questo teorema, ma cercheremo di capire perché è lecito aspettarsi un risultato del genere!

Dalle relazioni di ortogonalità viste la volta scorsa, segue subito che le funzioni

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

sono una famiglia ortonormale in  $L^2(2\pi)$ . Questo ha un'importante conseguenza: se  $u \in L^2(2\pi)$ , consideriamo la somma parziale  $N$ -esima della serie di Fourier di  $u$ , cioè

$$S_N(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

ove  $a_n$  e  $b_n$  sono definiti come sopra.

Ebbene,  $S_N(x)$  non è altro che la *proiezione ortogonale* di  $u(x)$  sul sottospazio (di dimensione finita) generato dalle funzioni

$$\left\{ 1/\sqrt{2\pi}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) : n = 1, 2, 3, \dots, N \right\} :$$

la funzione  $f(x) - S_N(x)$  ha prodotto scalare nullo con tutti gli elementi del sottospazio stesso (chiamati *polinomi trigonometrici di grado  $N$* ). Ne segue che  $S_N$  è il punto di tale sottospazio *più vicino* ad  $u(x)$  (rispetto alla distanza  $L^2$ ): tra tutti i polinomi trigonometrici di grado  $N$ ,  $S_N(x)$  è quello che meglio approssima  $u(x)$ . Verifichiamolo: sia  $g$  un qualunque polinomio trigonometrico di grado  $N$ . Sfruttando le proprietà del prodotto scalare otteniamo:

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{L^2}^2 &= \|(f - S_N) + (S_N - g)\|_{L^2}^2 = \\ &= \|f - S_N\|^2 + \langle f - S_N, S_N - g \rangle + \|S_N - g\|^2 = \\ &= \|f - S_N\|^2 + \|S_N - g\|^2 \geq \|f - S_N\|^2 \end{aligned}$$

che è la disuguaglianza voluta.

Analogamente, otteniamo:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2}^2 &= \\ \|(f - S_N) + S_N\|_{L^2}^2 &= \|f - S_N\|_{L^2}^2 + 2 \langle f - S_N, S_N \rangle + \|S_N\|_{L^2}^2 = \\ \|(f - S_N) + S_N\|_{L^2}^2 &= \|f - S_N\|_{L^2}^2 + \|S_N\|_{L^2}^2 \geq \|S_N\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

D'altra parte, con un conto diretto si vede subito che

$$\|S_N\|_{L^2}^2 = \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right],$$



da cui, passando al limite per  $N \rightarrow +\infty$ , si ottiene

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

(*disuguaglianza di Bessel*). La disuguaglianza di Bessel implica in particolare che i coefficienti di Fourier  $a_n, b_n$  di una funzione  $L^2$  tendono a zero per  $n \rightarrow +\infty$ .

Esiste poi un teorema (noto come *Teorema di Stone-Weierstrass trigonometrico* e di dimostrazione non facilissima ma nemmeno eccessivamente difficile...), che assicura che ogni funzione  $u \in L^2(2\pi)$  può essere approssimata in norma  $L^2$  con una successione di polinomi trigonometrici (cioè combinazioni lineari finite delle funzioni trigonometriche di cui sopra). Grazie all'ottimalità di  $S_N(x)$  tra tutti i polinomi trigonometrici di grado  $N$ , questo garantisce che la serie di Fourier converge a  $u$  in norma  $L^2$ : in questo modo si dimostra il Teorema di Riesz-Fischer!

Inoltre, siccome  $\|f - S_N\|_{L^2} \rightarrow 0$ , la disuguaglianza di Bessel è in realtà un'uguaglianza nota come *identità di Parseval*.

Che dire della convergenza puntuale ed uniforme delle serie di Fourier? Un tipico risultato è il seguente:

*TEOREMA: Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica. Supponiamo che  $f$  sia regolare a tratti: assumiamo cioè che essa sia continua tranne eventualmente che in un numero finito di punti nel suo periodo, e che in questi abbia discontinuità di salto con limiti destro e sinistro finiti. Supponiamo inoltre che la funzione sia derivabile, tranne eventualmente che in un numero finito di punti nel suo periodo, che la derivata sia continua nel suo dominio e che nei punti di non derivabilità esistano finiti i limiti destro e sinistro della derivata.*

*Allora la serie di Fourier di  $f$  converge puntualmente a  $f(x)$  in ogni punto di continuità  $x$ . Se invece  $x$  è un punto di salto per  $f$ , la serie di Fourier converge alla media aritmetica tra il limite destro e il limite sinistro.*

*Infine, la convergenza è uniforme in ogni compatto che non intersechi l'insieme dei punti di salto per  $f$ .*

*OSSERVAZIONE:* Le ipotesi che abbiamo fatto su  $f$  sono piuttosto forti: infatti che per poter scrivere i coefficienti di Fourier di  $f$ , è sufficiente che la funzione sia limitata ed integrabile secondo Riemann in  $[-\pi, \pi]$ . D'altra parte, il teorema comprende un'ipotesi - molto forte - sulla derivata di  $f$ ...

In effetti, neanche la continuità di  $f$  sarebbe sufficiente a garantire la convergenza: esistono funzioni continue periodiche la cui serie di Fourier

non converge in moltissimi punti, anche se è possibile (ma MOLTO difficile) dimostrare che vi è sempre convergenza in quasi tutti i punti (cioè al di fuori da un insieme di misura nulla).

Per contro, le ipotesi che abbiamo dato non sono ottimali e si possono rilassare parecchio.

*DIMOSTRAZIONE NEL CASO PARTICOLARE  $f \in C^1(2\pi)$ :* Dimostriamo che se  $f \in C^1$  allora la serie di Fourier converge uniformemente. Infatti, in questo caso abbiamo  $f' \in C^0(2\pi) \subset L^2(2\pi)$ : ai coefficienti di Fourier di  $f'$  (che denotiamo con  $\alpha_n, \beta_n$ ) si applica la disuguaglianza di Bessel. Denotiamo con  $a_n, b_n$  i coefficienti di Fourier di  $f$ : con un'integrazione per parti si vede subito che  $\alpha_n = nb_n$  e  $\beta_n = -na_n$  e quindi la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2)$  converge.

Applichiamo alla serie di Fourier di  $f$  il criterio della convergenza totale: siccome seno e coseno sono compresi tra  $-1$  e  $1$ , la serie delle norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  si maggiora con  $\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ . D'altra parte,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} < +\infty$$

e in maniera del tutto analoga  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$ .

Dunque la serie di Fourier di  $f$  converge totalmente ed ha come somma una funzione continua e  $2\pi$ -periodica  $g$ . Ma deve essere  $g = f$ , perchè la convergenza uniforme implica la convergenza in  $L^2$  e sappiamo già che la serie di Fourier converge a  $f$  in  $L^2$ . Q.E.D.

Vediamo come dimostrare il caso generale (tra l'altro, con una dimostrazione indipendente dal teorema di convergenza in  $L^2$  che non è stato dimostrato del tutto!).

La dimostrazione del seguente lemma è lasciata come facile esercizio (si può fare per induzione su  $k$ , oppure scrivendo le funzioni trigonometriche con gli esponenziali complessi ed usando la formula per la somma della progressione geometrica).

*LEMMA 1: Se  $k = 1, 2, 3, \dots$ , vale la seguente identità*

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos k\alpha = \frac{\sin((k + \frac{1}{2})\alpha)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Grazie a questo lemma, possiamo ottenere facilmente un'espressione della somma parziale  $N$ -esima della serie di Fourier: se denotiamo con  $S_N$  tale

somma parziale, ricordando la definizione dei coefficienti di Fourier si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(y-x) \right] dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(u) \right] du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il cambio di variabili  $u = y - x$  ed il Lemma 1.

*DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI CONVERGENZA PUNTUALE DELLE SERIE DI FOURIER:* Dimostriamo la sola convergenza puntuale, omettendo (almeno nel caso generale) la dimostrazione della convergenza uniforme.

Cominciamo a dimostrare il teorema nel caso in cui  $x$  sia un punto di continuità della funzione  $f$ .

Siccome si ha evidentemente

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(y) \right] dy = 1,$$

ricordando la formula integrale per  $S_N(x)$  trovata prima possiamo scrivere

$$(B) \quad S_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+y) - f(x)}{2 \sin \frac{y}{2}} \sin(N + \frac{1}{2})y dy.$$

Poniamo allora

$$g(y) = \frac{f(x+y) - f(x)}{2 \sin \frac{y}{2}}.$$

Questa è una funzione a quadrato sommabile (è limitata e presenta solo discontinuità di salto. In particolare, per  $y \rightarrow 0+$  la funzione tende a  $f'_+(x)$  e per  $y \rightarrow 0-$  a  $f'_-(x)$ ), e la (B) diventa:

$$\begin{aligned} S_N(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin(y/2) \cos Ny dy + \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos(y/2) \sin Ny dy. \end{aligned}$$

La disuguaglianza di Bessel ci dice infine che i due integrali nell'ultima formula tendono a 0 per  $N \rightarrow +\infty$ : si tratta infatti dei coefficienti di Fourier

delle funzioni (continue)  $g(y) \sin(y/2)$  e  $g(y) \cos(y/2)$ . Questo conclude la dimostrazione del teorema se  $x$  è un punto di continuità per  $f$ .

Sia  $x$  uno dei punti eccezionali, e denotiamo con  $f(x^+)$  e  $f(x^-)$  i limiti destro e sinistro di  $f$  in  $x$ . In questo caso, dobbiamo mostrare che

$$S_N(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Siccome si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(y) \right] dy = \frac{1}{2},$$

avremo

$$\begin{aligned} S_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+y) - f(x^-)}{2 \sin \frac{y}{2}} \sin(N + \frac{1}{2})y dy + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+y) - f(x^+)}{2 \sin \frac{y}{2}} \sin(N + \frac{1}{2})y dy. \end{aligned}$$

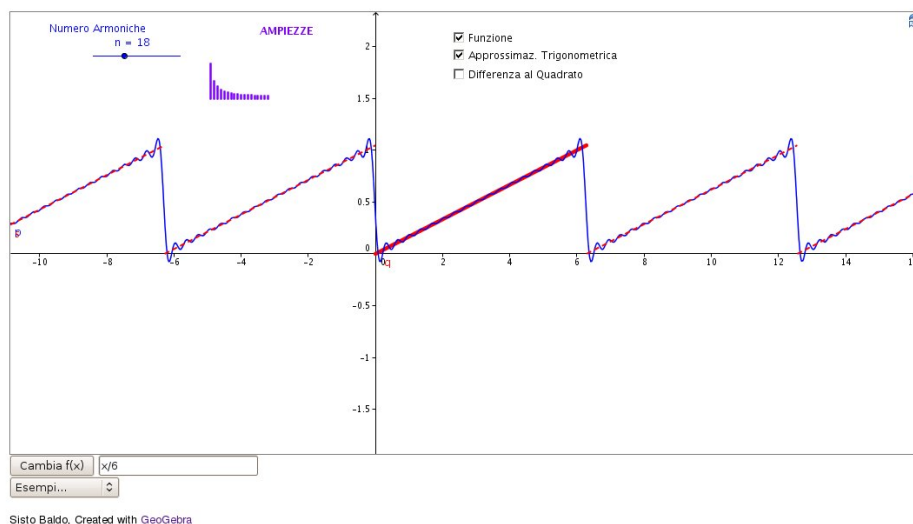
Se guardiamo le frazioni nei due integrali come funzioni di  $y$ , esse hanno solo discontinuità di salto (nel punto  $y = 0$  questo succede perché esistono finiti i limiti destro e sinistro di  $f'$  in  $x$ ): esse sono dunque  $L^2$ , e la dimostrazione può essere conclusa esattamente come prima. Q.E.D.

## 12 Lezione del 17/1/2017 (2 ore)

Per sperimentare un po' sulla convergenza delle serie di Fourier, potete utilizzare un foglio GeoGebra<sup>12</sup> che permette di visualizzare le somme parziali della serie di Fourier di una funzione data: ovviamente, i coefficienti di Fourier sono approssimati (con un metodo noto come DFT - discrete Fourier transform)! Il programma interpreta la funzione data dall'utente come la definizione della funzione periodica tra 0 e  $2\pi$  (nel senso che la estende periodicamente fuori da tale intervallo).

<sup>12</sup><https://www.geogebra.org/material/show/id/103031>

## Serie di Fourier



Torniamo finalmente alle equazioni alle derivate parziali.

Il primo esempio che vogliamo considerare è quello dell'*equazione del calore*: vogliamo trovare una funzione  $u(t, x)$  che soddisfi il problema

$$(*) \quad \begin{cases} u_t = ku_{xx} & \text{se } 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

La funzione  $u(x, t)$  rappresenta la *temperatura*, nella posizione  $x$  ed al tempo  $t$ , di una sbarra metallica di lunghezza  $\pi$  che giace sull'asse delle  $x$  tra  $x = 0$  e  $x = \pi$ . La seconda equazione ci dice che gli estremi della sbarra sono tenuti a temperatura 0 (valori al contorno), la terza equazione che la temperatura iniziale in posizione  $x$  è data da una funzione nota  $f(x)$  (condizione iniziale). Infine, la prima equazione è un'equazione alle derivate parziali nota, appunto, come *equazione del calore*: essa descrive l'evoluzione temporale della temperatura in un corpo unidimensionale conduttore di calore.

Per risolvere il nostro *problema ai valori iniziali ed al contorno*, usiamo il *metodo della separazione delle variabili*. Cominciamo a cercare soluzioni non banali dell'equazione differenziale che siano a variabili separate, ossia del tipo  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$  (prodotto di una funzione della sola  $x$  e di una della sola  $t$ ). Visto che abbiamo condizioni al contorno nulle, è naturale imporre anche che  $X(0) = X(\pi) = 0$ .

Sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo  $XT' = kX''T$ , da cui  $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT}$ . In quest'ultima equazione, a primo membro abbiamo una funzione

della sola  $x$ , a destra una funzione della sola  $t$ : i due membri dell'equazione devono allora essere costanti, ossia deve essere

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

In particolare abbiamo  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ , equazione lineare omogenea che si risolve immediatamente. Se  $\lambda < 0$ , la soluzione generale è  $X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$ : imponendo le condizioni al contorno troviamo  $A = B = 0$ , per cui c'è solo la soluzione nulla. Se  $\lambda = 0$  abbiamo  $X(x) = A + Bx$  e imponendo le condizioni al contorno troviamo ancora  $A = B = 0$ .

Infine, se  $\lambda > 0$ , la soluzione generale dell'equazione è  $X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x$ . La condizione  $X(0) = 0$  implica  $A = 0$ , mentre la seconda condizione diventa  $B \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$ . Possiamo prendere  $B \neq 0$  se e solo se  $\sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$ , cioè se  $\lambda = n^2$  con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . In questi casi, troviamo le seguenti soluzioni non nulle:

$$X(x) = B \sin(nx).$$

Le corrispondenti equazioni per  $T(t)$  sono  $T'(t) = -kn^2T(t)$ , che hanno soluzione  $T_n(t) = Ce^{-kn^2t}$ .

In conclusione, le sole soluzioni non banali a variabili separate sono date da

$$u_n(x, t) = Be^{-kn^2t} \sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vogliamo ora provare a trovare una soluzione del nostro problema in forma di *serie* di queste soluzioni a variabili separate: vogliamo scrivere cioè

$$(**) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-kn^2t} \sin nx,$$

ove ovviamente i coefficienti  $b_n$  devono essere scelti in modo da soddisfare la condizione iniziale e *speriamo che la serie converga, e converga proprio ad una soluzione del problema (\*)!*

Per trovare i coefficienti  $b_n$ , osserviamo che

$$(***) \quad f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \dots$$

e il secondo membro ha tutta l'aria di una serie di Fourier di una funzione dispari! Estendiamo allora  $f$  ad una funzione  $2\pi$ -periodica e dispari: i suoi coefficienti di Fourier sono dati da

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

e con questa scelta dei coefficienti la condizione iniziale (\*\*\*) è soddisfatta purché  $f$  sia abbastanza regolare: per esempio, regolare a tratti e continua in modo da avere convergenza uniforme della serie con  $t = 0$  al dato iniziale. In effetti, con questa ipotesi la serie di due variabili (\*\*) converge totalmente sulla striscia  $[0, \pi] \times [0, +\infty)$ : la serie delle norme è maggiorata da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2},$$

ove le serie a destra sono convergenti (i termini della prima delle serie di destra sono i quadrati dei coefficienti di Fourier di  $f'$  e la serie converge grazie alla disuguaglianza di Bessel, si riveda la dimostrazione del teorema di convergenza uniforme!). In particolare, la somma  $u(x, t)$  della serie è continua sulla striscia e la condizione iniziale è genuinamente soddisfatta.

Si noti, in particolare, che i coefficienti di Fourier  $b_n$  tendono a 0 e sono quindi limitati da una certa costante  $M$ .

Le condizioni al contorno sono evidentemente soddisfatte: ci manca “solo” da mostrare che la funzione  $u(x, t)$  definita dalla serie (\*\*) è regolare per  $t > 0$  e soddisfa effettivamente l'equazione del calore!

Consideriamo, sul rettangolo  $[0, \pi] \times [\tau, T]$  con  $0 < \tau < T$ , la convergenza totale delle serie che si ottengono derivando termine a termine la (\*\*) una volta rispetto a  $t$  o due volte rispetto a  $x$  (vale a dire, le due serie che si ottengono calcolando formalmente  $u_t$  e  $u_{xx}$ ). Le relative serie delle norme sono dominate (a meno di una costante moltiplicativa  $k$  nel caso di  $u_t$ ) dalla serie convergente

$$M \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-kn^2\tau} < +\infty,$$

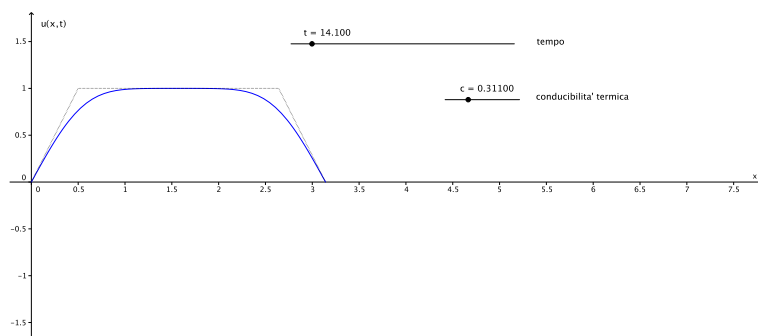
per cui si ha convergenza totale. La derivazione termine a termine è allora lecita, e (\*\*) fornisce effettivamente una soluzione del nostro problema.

Il ragionamento appena fatto mostra la proprietà *regolarizzante* dell'equazione del calore: anche se il dato iniziale  $f(x)$  è non derivabile, o persino discontinuo in qualche punto, la soluzione (\*\*) diventa immediatamente regolare per tempi positivi<sup>13</sup>.

Ecco un foglio GeoGebra che mostra un'animazione delle soluzioni dell'equazione del calore:

---

<sup>13</sup>In realtà, con ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti sopra, si vede che le serie delle derivate di qualunque ordine convergono totalmente sul rettangolo  $[0, \pi] \times [\tau, T]$ : la soluzione è di classe  $C^\infty$



Tecniche molto simili si possono usare per risolvere l'equazione della corda vibrante (o equazione delle onde unidimensionale), cioè il problema

$$(V) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{se } 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Questo problema descrive il movimento di una corda vibrante che a riposo giace sull'asse delle  $x$  tra  $0$  e  $\pi$ :  $u(x, t)$  rappresenta lo spostamento verticale (rispetto a  $0$ ) del punto della corda di ascissa  $x$ , al tempo  $t$ . Le condizioni al contorno  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  dicono che gli estremi della corda sono fissati,  $f(x)$  rappresenta la *posizione iniziale* della corda, mentre l'ultima condizione dice che la corda viene lasciata andare con velocità iniziale nulla (problema della *corda pizzicata*).

Procediamo ancora per separazione di variabili, cercando soluzioni non banali dell'equazione alle derivate parziali della forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ : otteniamo le equazioni

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda.$$

La prima equazione è esattamente quella di prima: abbiamo soluzioni non banali del tipo  $X(x) = B \sin nx$  se e solo se  $\lambda = n^2$ . La corrispondente equazione per  $T$  è  $T'' + n^2 c^2 T = 0$  con la condizione  $T'(0) = 0$  (proveniente dalla condizione su  $u_t$ ): le soluzioni a variabili separate sono allora  $u_n(x, t) = B \sin nx \cos cnt$  e cerchiamo di scrivere la soluzione del problema (V) come serie

$$(VI) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos cnt.$$

Ancora una volta, affinché sia soddisfatta la condizione iniziale  $f(x)$  dovremo scegliere  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ .



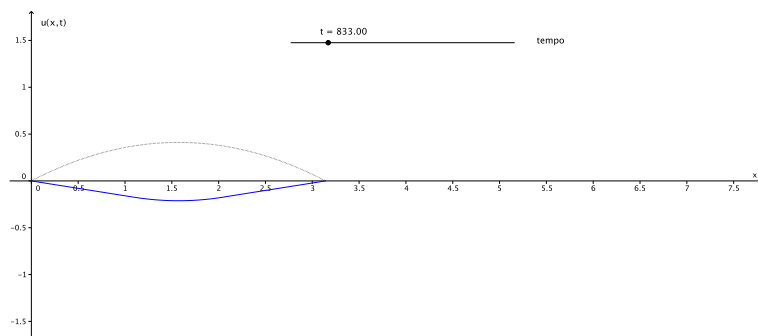
Mostriamo che, sotto opportune ipotesi su  $f$ , la serie (VI) fornisce effettivamente una soluzione del nostro problema. Per non avere problemi, supponiamo che  $f$  sia estendibile ad una funzione  $2\pi$ -periodica e dispari di classe almeno  $C^3$ . La disuguaglianza di Bessel applicata alla derivata terza ci garantisce che  $\sum_{k=1}^{\infty} k^6 |b_k|^2 < +\infty$  (si integri per parti 3 volte...).

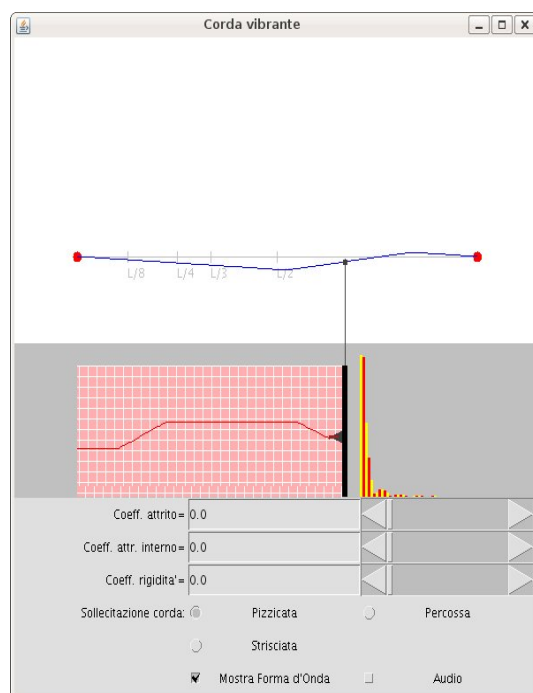
Si ha ovviamente convergenza totale della serie (VI) su tutta la striscia  $[0, \pi] \times [0, +\infty]$ : la somma è una funzione continua che soddisfa la condizione iniziale e le condizioni al contorno. Per verificare che vale l'equazione, calcoliamo formalmente  $u_{tt}$  e  $u_{xx}$  derivando termine a termine la serie e verifichiamo che vi è convergenza totale: le serie derivate sono dominate da

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} k^3 |b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^6 |b_k|^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Ecco un foglio GeoGebra che mostra un'animazione delle soluzioni dell'equazione delle onde:





Concludo mostrandovi una simulazione di corda vibrante, scritta in java, che permette di osservare il moto della corda pizzicata con un modello leggermente più completo, che tiene conto anche di effetti di smorzamento e di rigidità. Selezionando le apposite caselle, è possibile anche vedere ed ascoltare la forma d'onda generata.