Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
Analisi Matematica I: foglio di esercizi n. 3
11 novembre 2015

Risolvere i seguenti problemi. Da consegnare entro il 19/11.

Pb 1. Studiare per quali valori di $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ è continua la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\alpha^{1/x}) + \cos(\alpha^{1/x}) & \textit{se } x < 0, \\ 1 & \textit{se } x = 0, \\ \cos(x^\beta) + \sin(x^\beta) & \textit{se } x > 0. \end{cases}$$

Pb 2. Studiare la funzione $f(x) = \arccos x + \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Pb 3. Studiare la derivabilità in 0 della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & \textit{se } x \neq 0, \\ 0 & \textit{se } x = 0. \end{cases}$$

Pb 4. Studiare la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \tan^2 x & \textit{se } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \textit{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Soluzioni:

Pb 1. La funzione è evidentemente continua per ogni $x \neq 0$. Per $x \to 0^-$ si ha che $\alpha^{1/x}$ tende a 0 per $\alpha > 1$, a 1 per $\alpha = 1$ e a $+\infty$ per $0 < \alpha < 1$. Quindi si ha continuità a sinistra ($\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 1$) se e solo se $\alpha > 1$. Analogamente, per $x \to 0^+$ si ha che x^β tende a 0 per $\beta > 0$, a 1 per $\beta = 0$ e a $+\infty$ per $\beta < 0$: si ha continuità a destra se e soltanto se $\beta > 0$.

In conclusione, la funzione è continua se e soltanto se $\alpha > 1$ e $\beta > 0$.

Pb 2. La funzione è definita per $x \in (-1, 1)$. Calcolando esplicitamente la derivata, si trova che essa si annulla in tutto questo intervallo, per cui f è costante. Si trova poi $f(0) = \pi/2$, per cui $f(x) = \pi/2$ per ogni $x \in (-1, 1)$.

Senza usare le derivate, lo stesso risultato si ottiene usando un po' di identità goniometriche: poniamo $\alpha = \arccos x \in (0, \pi)$. Allora $x = \cos\alpha$ e $\sqrt{1 - x^2} = \sin\alpha$. Si trova allora:

$$f(x) = \alpha + \arctan(\text{cotan }\alpha) = \alpha + \arctan(\tan(\pi/2 - \alpha)) = \alpha + \pi/2 - \alpha = \pi/2.$$

Il penultimo passaggio è giustificato poiché $\pi/2 - \alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Pb 3. Si vede subito che la funzione è continua in 0. Calcoliamoci la derivata sinistra:

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/h}} = 1.$$

Analogamente:

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/h}} = 0,$$

per cui 0 è un punto angoloso e la derivata non esiste.

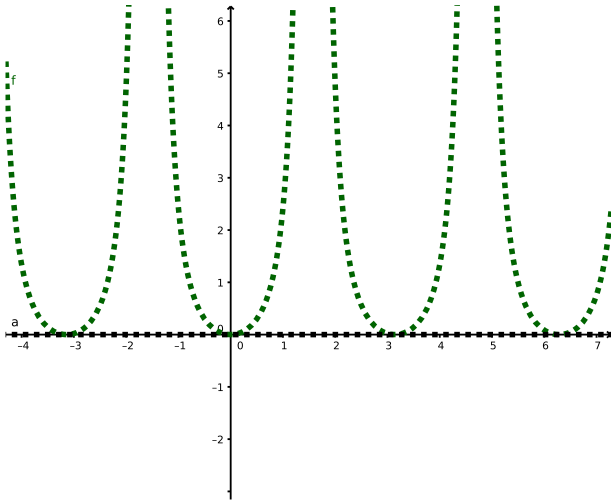
Lo stesso risultato poteva essere ottenuto, con conti leggermente più complicati, calcolando $f'(x)$ per $x \neq 0$ e passando al limite (destro e sinistro) in 0.

Pb 4. La funzione è definita su tutta la retta reale ed è periodica di periodo π: basterà quindi studiarla nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. In ogni punto $x_0 \neq 0$ di tale intervallo, la funzione è discontinua: infatti si ha $\tan^2 x_0 \neq 0$, per cui facendo tendere $x \to x_0$ si ottengono risultati diversi a seconda che x sia razionale o irrazionale...

Nell'origine, invece, la funzione è derivabile con derivata nulla: il rapporto incrementale è infatti

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \begin{cases} \frac{\tan^2 h}{h} & \textit{se } h \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Entrambe queste espressioni tendono a 0 per $h \to 0$, per cui $f'(0) = 0$. Il grafico della funzione è più o meno come segue:



In conclusione, i soli punti di continuità e derivabilità sono quelli del tipo $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.