Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 16/2/2015

Tipologia A

1.1 Si enunci il risultato fondamentale sulle successioni di Cauchy in $\mathbf{R}$. Si spieghi che relazione c'è tra questo e l'assioma di completezza di $\mathbf{R}$.

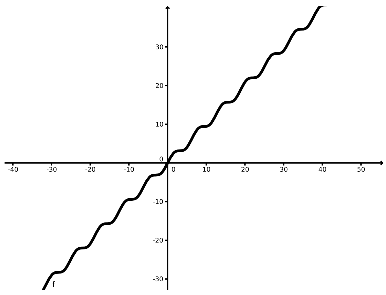
1.2 Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3$. Allora certamente

- ☒ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che $\sup\{a_n : \ n \in \mathbf{N},\ n \geq \overline{n}\} \leq 4$;
- ☐ $\inf\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\} = 3$;
- ☐ $\inf\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\} \geq 2$;
- ☐ $\sup\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\} = 3$;

1.3 Si considerino le due serie reali $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Allora di sicuro

- ☐ convergono entrambe;
- ☐ se la prima converge, la seconda diverge;
- ☐ se la prima converge, converge anche la seconda;
- ☒ nessuna delle risposte precedenti è necessariamente vera;

1.4 La seguente figura mostra la derivata prima di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ è concava;
- ☐ è crescente;
- ☒ è convessa;
- ☐ ha esattamente un flesso;

1.5 Si consideri la funzione $F : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x) = \int_1^x \left(e^{-t^2} + \frac{|\sin t|}{t} \right) dt.$$

Allora

- ☐ F è ben definita ma non è né continua né derivabile sulla semiretta $[1, +\infty)$;
- ☒ F è derivabile e crescente sulla semiretta $[1, +\infty)$;
- ☐ F non è ben definita sulla semiretta $[1, +\infty)$;
- ☐ F è continua ma non derivabile sulla semiretta $[1, +\infty)$;

1.6 Si calcoli, se esiste, almeno uno dei limiti seguenti

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x) - 4\sin x + 2x + x^2}{(e^x - 1)^2 \sin x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x} + \sin x).$$

1.7 Si studi la funzione $f(x) = x^3 e^{-|x-2|}$ e se ne tracci un grafico. Vi sono punti in cui f non è derivabile?

1.8 Trovare le primitive della funzione $f(x) = x^3 \sin x$.

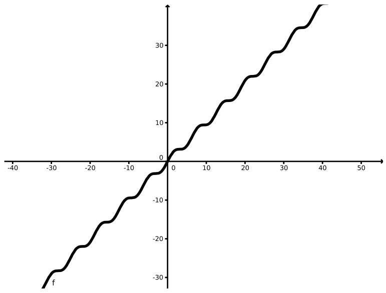
1.9 Discutere la convergenza di almeno uno tra serie e integrale improprio:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{n-2}^{-1} x^n, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x^3)\sqrt{x-1}}\, dx.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 16/2/2015
Tipologia B

2.4 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

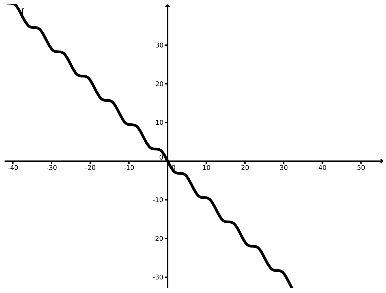
- ☒ ha esattamente un flesso;
- ☐ è convessa;
- ☐ è crescente;
- ☐ è concava;

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 16/2/2015
Tipologia C

3.1 La seguente figura mostra la derivata prima di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

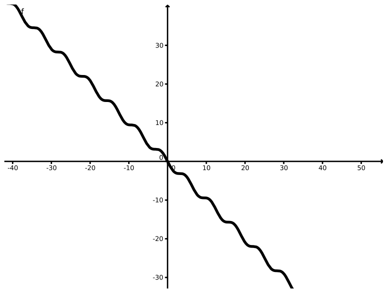
- ☐ ha esattamente un flesso;
- ☐ è crescente;
- ☒ è concava;
- ☐ è convessa;

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 16/2/2015
Tipologia D

4.1 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☒ ha esattamente un flesso;
- ☐ è crescente;
- ☐ è concava;
- ☐ è convessa;

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**) è già indicata nel testo con una crocetta.

6. Per il primo limite, calcoliamo gli sviluppi di Taylor del terzo ordine di numeratore e denominatore: per il numeratore otteniamo $N(x) = 4/3x^3 + o(x^3)$ mentre per il denominatore si ha $D(x) = x^3 + o(x^3)$. Il limite richiesto vale dunque $4/3$.

Per calcolare il secondo limite, si moltiplichi e si divida per $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ e poi per $\sqrt{x}$: il limite dato diventa

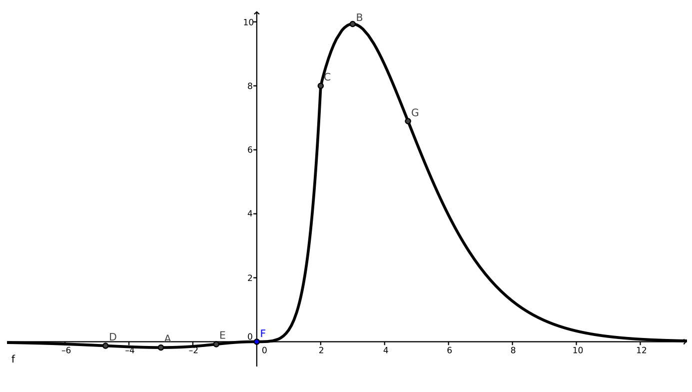
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2(\sqrt{x} + \sin x)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 + \frac{2\sin x}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+1/x} + \sqrt{1-1/x}} = 1.$$

7. La funzione è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$, non presenta particolari simmetrie ed è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$. Tende a 0 per $x \to \pm\infty$. La derivata prima è $f'(x) = e^{-|x-2|}(3x^2 - x^3 \mathrm{sign}\,(x-2))$. In particolare, si vede subito che $x = 2$ è un punto angoloso (dove la derivata non esiste).

È negativa sulle semirette $(-\infty, -3$ e $(3, +\infty)$, positiva sugli intervalli $(-3, 0)$ e $(0, 3)$. Si annulla per $x = -3$ (minimo assoluto), $x = 0$ (flesso orizzontale) e $x = 3$ (massimo assoluto).

La derivata seconda è $f''(x) = e^{-|x-2|}(6x - 6x^2 \mathrm{sign}\,(x-2) + x^3)$: essa si annulla per $x = -3 \pm \sqrt{3}$, $x = 0$ e $x = 3 + \sqrt{3}$. Questi sono tutti punti di flesso, in quanto la funzione è concava negli intervalli $(-\infty, -3-\sqrt{3})$, $(-3+\sqrt{3}, 0)$ e $(2, 3+\sqrt{3})$ mentre è convessa negli intervalli $(-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3})$, $(0, 2)$ e $(3+\sqrt{3}, +\infty)$.

In conclusione, il grafico della funzione è come in figura:



8. Per calcolare l'integrale basta integrare tre volte per parti: le primitive richieste sono $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$.

9. Sviluppando i coefficienti binomiali, si vede subito che il termine generale della serie è $\frac{2}{n(n-1)} x^n \sim \frac{2}{n^2}$. Il criterio del rapporto ci dice subito che il raggio di convergenza è 1.

Inoltre, la serie converge (assolutamente) per $x = \pm 1$: si riduce a una serie armonica generalizzata di esponenente 2. In conclusione, l'intervallo di convergenza della serie è $[-1, 1]$.

Studiamo la convergenza assoluta dell'integrale improprio: il modulo dell'integranda è maggiorato da $\frac{1}{(1+x^3)\sqrt{x-1}}$. Quest'ultima funzione ha integrale improprio convergente sulla semiretta $(1, +\infty)$: per $x \to 1^+$ è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, per $x \to +\infty$ a $1/x^{7/2}$.