Università degli Studi di Verona
**Dipartimento di Informatica**
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
**PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 2/2/2015**
Tipologia A

**1.1** Si enunci il criterio del rapporto per la convergenza delle serie.
**1.2** Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua e pari, allora l'integrale $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

- ☒ vale $2\int_0^1 f(x)\, dx$.
- ☐ è certamente diverso da 0;
- ☐ non esiste;
- ☐ vale 0;

**1.3** Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione decrescente, non necessariamente continua. Allora la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

- ☐ potrebbe non esistere in qualche punto $x \in [0,1]$;
- ☐ è certamente derivabile per ogni $x \in (0,1)$;
- ☒ è ben definita per ogni $x \in [0,1]$;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti è necessariamente vera;

**1.4** Se $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$, allora il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$$

- ☐ vale 1;
- ☐ vale $+\infty$;
- ☐ vale 0;
- ☒ non è calcolabile con le sole informazioni fornite;

**1.5** Se la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge, allora di sicuro la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

- ☐ ha raggio di convergenza $\leq 1$;
- ☒ ha raggio di convergenza $\geq 1$;
- ☐ ha raggio di convergenza 1;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti è necessariamente vera;

**1.6** Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1 + x^2}{\log(1+x^2)(e^{2x^2}-1)}.$$

**1.7** Trovare le primitive della funzione $f(x) = \frac{\log\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}$.

**1.8** Discutere la convergenza di almeno uno tra serie e integrale improprio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n2^n}\right) x^n, \qquad \int_0^1 \frac{\sin^3(1/x)}{\tan^{1/2} x}\, dx.$$

**1.9(ESERCIZIO FACOLTATIVO)** Per $k = 1, 2, 3, \ldots$ definiamo le funzioni

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}(x-k) & \text{se } k < x < k+1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che si ha

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_k^2(x)\, dx$$

e calcolare il valore dell'ultima espressione.

**ATTENZIONE:** Tempo a disposizione 2 ore. Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona

**Dipartimento di Informatica**

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

**PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 2/2/2015**

---

**ESERCIZI DI RECUPERO DELLA PRIMA PROVETTA**

**REGOLE:** *Le soluzioni degli esercizi di recupero devono essere consegnate SEPARATAMENTE da quelle degli esercizi relativi alla seconda parta del corso, su fogli completi di nome e numero di matricola. La prima provetta si considera annullata, qualunque ne sia stato l'esito, per chi consegna le soluzioni degli esercizi di recupero.*

**RECUPERO.1** Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\sin x)}{1-\cos x}.$$

**RECUPERO.2** Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\sin x + x}{|x|\sqrt{1+x^2}}.$$

**RECUPERO.3** Si studi la funzione $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ e se ne tracci il grafico.

**Soluzioni:**

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**) è già indicata nel testo con una crocetta. Si osservi che la risposta corretta per l'**Esercizio 4** era la stessa nelle versioni del compito in cui veniva detto che $f(x) = o(x^2)$. Invece, nelle versioni del compito in cui $f(x) = o(x^4)$ oppure $f(x) = o(x^5)$, il limite dato valeva 0...

**6** Calcoliamo gli sviluppi di Taylor del quarto ordine di numeratore e denominatore: per il numeratore otteniamo

$$N(x) = (1 - x^2/2 + x^4/4! + o(x^4))^2 - 1 + x^2 = x^4/3 + o(x^4),$$

mentre per il denominatore si ha $D(x) = (x^2 + o(x^2))(2x^2 + o(x^2)) = 2x^4 + o(x^4)$. Il limite richiesto vale dunque $1/6$. Nelle altre versioni del compito cambiava solo il valore numerico del limite a causa della presenza di un parametro.

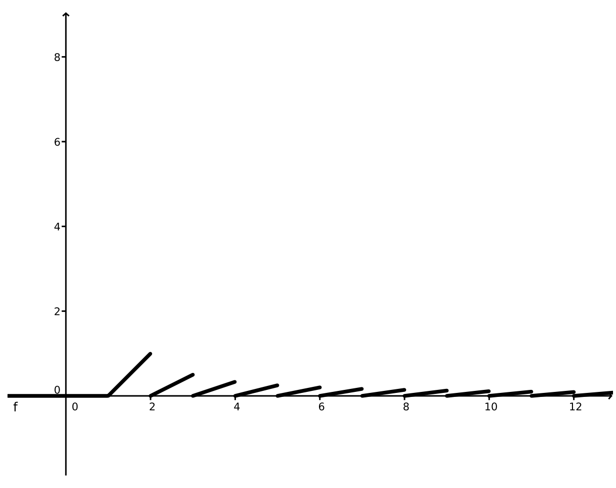
**7** Per calcolare l'integrale si usi il cambio di variabile $y = \sqrt{1+x}$ e si integri per parti. Si trova che le primitive richieste sono

$$2\sqrt{1+x}(\log\sqrt{1+x} - 1) + C.$$

**8** Usando il criterio del rapporto si trova subito che il raggio di convergenza della serie è 2. Per $x = 2$ la serie non converge, perchè il termine generale è asintoticamente equivalente a $1/n$. Per $x = -2$ converge per il criterio di Leibniz: l'insieme di convergenza è dunque $[-2, 2)$.

L'integrale improprio converge assolutamente: il modulo dell'integranda è maggiorato da $\frac{1}{\tan^{1/2} x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, e sappiamo che l'ultima funzione ha integrale improprio convergente.

**9** La funzione $f_k(x)$ è diversa da 0 solo sull'intervallo $(k, k+1)$ (che sono disgiunti al variare di $k$): per ogni fissato $x$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ha in realtà *un solo addendo* non nullo: ecco il grafico della somma della serie



In particolare, $(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x))^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(f_k(x))^2$. Inoltre, grazie all'additività dell'integrale rispetto all'intervallo,

$$\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty}(f_k(x))^2 \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_k^{k+1} (x-k)^2 \, dx.$$

Tutti gli integrali che compaiono nell'ultima espressione sono uguali e valgono 1/3: il valore dell'espressione richiesta è quindi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^2}$.

**RECUPERO.1** Il limite può essere calcolato facilmente con Taylor, oppure usando i limiti fondamentali: la funzione data può essere riscritta come

$$\frac{\sin(x \sin x)}{x \sin x} \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{1-\cos x}.$$

Le prime tre frazioni tendono a 1, l'ultima a 2: il limite vale 2.

**RECUPERO.2** Dividendo numeratore e denominatore per $x^2$ si vede che la funzione è asintoticamente equivalente a $\sin x$ per $x \to +\infty$: il limite non esiste.

**RECUPERO.3** La funzione data è definita per $x \neq -1$. Tende a 0 per $x \to -\infty$, a $-\infty$ per $x \to -1^-$, a $+\infty$ per $x \to -1^+$ e a $+\infty$ per $x \to +\infty$. È negativa per $x < -1$, positiva per $x > -1$.

Si ha poi $f'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$, per cui $f$ è decrescente sugli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$, crescente su $(0, +\infty)$. In particolare, 0 è un punto di minimo relativo. La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}((1+x)^2 - 2(1+x) + 2),$$

da cui si deduce che non vi sono flessi e che la funzione è concava in $(-\infty, -1)$, convessa in $(-1, +\infty)$. Il grafico richiesto è quindi come in figura: