Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 1/12/2014

Tipologia A

1.1 Si enunci il teorema di Bolzano Weierstrass e si dia un esempio di successione limitata che non ammette limite.

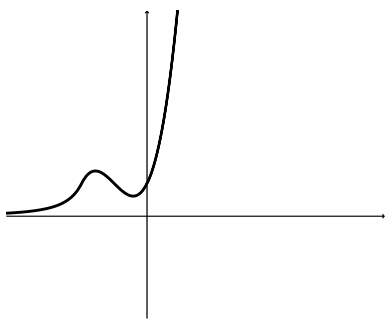
1.2 Il limite $\lim_{x\to 0^+} x^3 e^{1/x}$

- ☐ non esiste;
- ☐ vale 0;
- ☐ vale 1;
- ☒ vale $+\infty$;

1.3 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile 2 volte, x_0 un suo punto di minimo relativo. Possiamo dedurne che

- ☐ potrebbe essere $f'(x_0) \neq 0$;
- ☒ $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$, anche se si può avere $f''(x_0) = 0$;
- ☐ $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$;
- ☐ $f'(x_0) = 0$, non possiamo dire nulla su $f''(x_0)$;

1.4 La seguente figura mostra la derivata prima di una certa funzione f:



Possiamo dedurne che la funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ è convessa;
- ☐ ha esattamente un flesso;
- ☒ ha esattamente due flessi;
- ☐ è discontinua;

1.5 Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : \ |x^2 - 2| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0\}$. Si ha

- ☐ $\sup A = -\infty$;
- ☐ $\sup A = +\infty$;
- ☒ $\sup A < +\infty$;
- ☐ $\sup A = 0$;

1.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{1/x} - 1\right)^2}{1 - \cos^2(1/x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + \sqrt{e^{6\log x}}}{\sqrt{1 + x^6}}$$

1.7 Si studi la funzione

$$f(x) = xe^{\frac{x+2}{x-3}}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

1.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si trovino i punti di continuità e di derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \mathrm{sign}(\sin \frac{1}{x}) & \textit{se } x \neq 0, \\ 0 & \textit{se } x = 0. \end{cases}$$

Si ricorda che la *funzione segno* $\mathrm{sign}(t)$ vale 1 per $t > 0$, 0 per $t = 0$ e -1 per $t < 0$.

ATTENZIONE: Tempo a disposizione 2 ore. Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

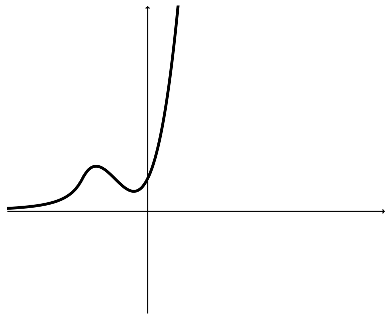
Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 1/12/2014
Tipologia B

2.2 Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbf{Q} : \ |x^2 - 2| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0\}$. Si ha

- ☒ $\sup A < +\infty$;
- ☒ $\sup A = -\infty$;
- ☐ $\sup A = 0$;
- ☐ $\sup A = +\infty$;

2.4 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



Possiamo dedurne che la funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ è discontinua;
- ☒ è convessa;
- ☐ ha esattamente un flesso;
- ☐ ha esattamente due flessi;

2.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{1/x} - 1\right)^2}{1 - \cos^2(2/x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + \sqrt{e^{5\log x}}}{\sqrt{1 + x^6}}$$

2.7 Si studi la funzione

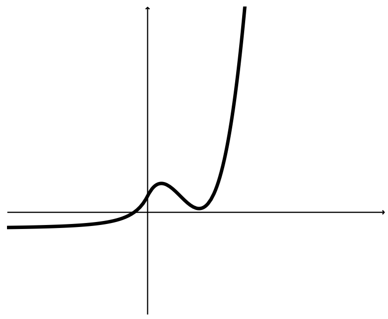
$$f(x) = xe^{\frac{x+3}{x-3}}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 1/12/2014
Tipologia C

3.2 La seguente figura mostra la derivata prima di una certa funzione f:



Possiamo dedurne che la funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ ha esattamente un flesso;
- ☒ ha esattamente due flessi;
- ☐ è convessa;
- ☐ è discontinua;

3.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{1/x}-1\right)^2}{1-\cos^2(3/x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+\sqrt{e^{7\log x}}}{\sqrt{1+x^6}}$$

3.7 Si studi la funzione

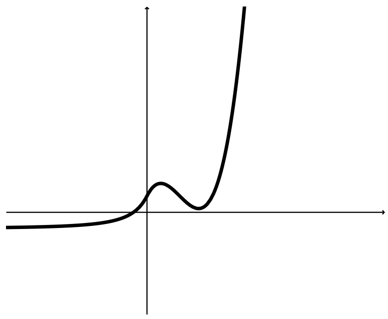
$$f(x) = xe^{\frac{x+4}{x-3}}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 1/12/2014
Tipologia D

4.5 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



Possiamo dedurne che la funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ è convessa;
- ☐ ha esattamente due flessi;
- ☐ è discontinua;
- ☒ ha esattamente un flesso;

4.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{1/x}-1\right)^2}{1-\cos^2(4/x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+\sqrt{e^{4\log x}}}{\sqrt{1+x^4}}$$

4.7 Si studi la funzione

$$f(x) = xe^{\frac{x+5}{x-3}}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Del resto, i testi che precedono riportano solo gli esercizi dei compiti di tipologia B, C, D che differiscono *in qualcosa* da quelli delle versioni precedenti: ad esempio, la funzione da studiare nel compito di tipologia C coincideva con quella del compito di tipologia A, come le funzioni dei compiti di tipologia B e D...

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Con il cambio di variabile $y = 1/x$ il primo limite diventa

$$\lim_{y\to 0^+} \left(\frac{(e^y - 1)}{\sin y}\right)^2.$$

Se ricordiamo i limiti fondamentali $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, vediamo subito che il risultato richiesto è 1. Nelle altre 3 versioni del compito il limite era sostanzialmente identico: cambiava il suo valore numerico (risp. 1/4, 1/9 e 1/16) a causa della presenza di un parametro a denominatore.

Per calcolare il secondo limite, osserviamo che $e^{\log x} = x$ $(x > 0)$, da cui $\sqrt{e^{6\log x}} = x^3$. Dividendo numeratore e denominatore per x^3 si vede subito che il limite richiesto vale 1.

Nelle altre 3 versioni del compito il ragionamento da fare era lo stesso. Tuttavia, a causa dei diversi esponenti, il limite valeva rispettivamente 0, $+\infty$ e 4.

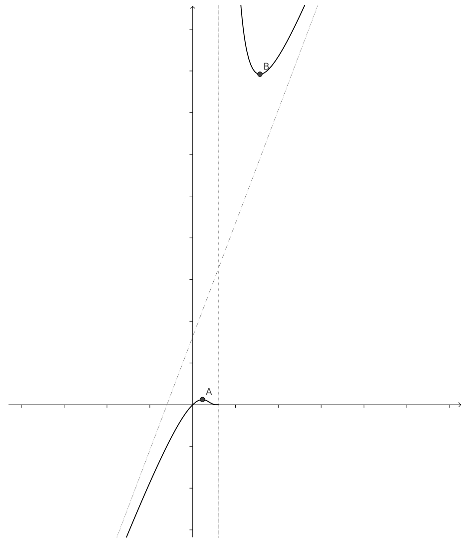
7 La funzione data è definita per $x \neq 3$. È positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$. Per $x \to +\infty$ tende a $+\infty$, per $x \to -\infty$ tende a $-\infty$, per $x \to 3^-$ tende a 0, per $x \to 3^+$ tende a $+\infty$. Calcolando la derivata prima si trova

$$f'(x) = e^{\frac{x+2}{x-3}} \frac{x^2 - 11x + 9}{(x-3)^2},$$

da cui si ricava che c'è un massimo relativo in $x = \frac{11-\sqrt{85}}{2}$ e un minimo relativo in $x = \frac{11+\sqrt{85}}{2}$.

Volendo, possiamo notare anche che la derivata prima tende a 0 per $x \to 3^-$ e che la retta $y = e(x + 5)$ è un asintoto obliquo (sia destro che sinistro).

Riassumendo, la funzione ha l'andamento mostrato nella figura seguente.



8 La funzione è dispari, per cui è sufficiente studiarla per $x > 0$.

Essa vale x^2 negli intervalli ove $\sin(1/x) > 0$ (cioè nella semiretta $x > 1/pi$ e negli intervalli $1/(\pi + 2k\pi) < x < 1/2k\pi$, $k = 1, 2, 3, \ldots$), mentre vale $-x^2$ in quelli ove $\sin(1/x) < 0$ (cioè quelli del tipo $1/(2\pi + 2k\pi) < x < 1/(\pi + 2k\pi)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$). Vale infine 0 nei punti ove $\sin(1/x) = 0$ (cioè per $x = 1/(k\pi)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$): questi sono evidentemente tutti punti di discontinuità per f, mentre in tutti gli infiniti intervalli aperti sopra elencati essa è continua e derivabile. Grazie al fatto che la funzione è dispari, la stessa cosa vale nei punti simmetrici rispetto all'origine.

Infine, in 0 la funzione è continua (grazie al teorema dei carabinieri, dato che $f(0) = 0$ e $|f(x)| \leq x^2$). Un simile ragionamento applicato ai rapporti incrementali di f in 0 mostra che la funzione è ivi derivabile con $f'(0) = 0$.

Il grafico della funzione ha l'aspetto in figura: