Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 20/2/2013
Tipologia A

1.1 Si dia la definizione dell'integrale improprio sulla semiretta $[1, +\infty)$ di una funzione continua ivi definita.

1.2 Se $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sono funzioni continue tali che $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$ allora di sicuro

- ☒ $f(x) > g(x)$ per qualche $x \in [a, b]$;
- ☐ $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$;
- ☐ f e g sono derivabili;
- ☐ $f(x) > g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$;

1.3 Sia $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione continua e decrescente tale che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$. Allora di sicuro

- ☐ il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è finito e non nullo;
- ☒ il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ vale 0;
- ☐ il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}$ vale 0;
- ☐ non esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;

1.4 Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0$ allora di sicuro

- ☒ $x^k f(x) = o(x^k g(x))$;
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$;
- ☐ $f(x) + g(x) = o(f(x) + g(x))$;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti;

1.5 La funzione $f(x) = x\,|x|$

- ☒ è ovunque continua e derivabile;
- ☐ non è derivabile in 0;
- ☐ non è continua in 0;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti;

1.6 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x) - 2\sin(x) + x^2}{(\sin x)^3}.$$

1.7 Si studi la funzione $f(x) = 2^x - e^x$ e se ne tracci il grafico.

1.8 Si calcoli l'integrale

$$\int_2^3 \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx.$$

1.9 Si studi la convergenza di uno a scelta tra l'integrale improprio e la serie:

$$\int_1^2 \frac{dx}{(\log x)^{\frac{1}{3}}} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!\log k}{2^k} x^k.$$

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Lo sviluppo di Taylor del numeratore è

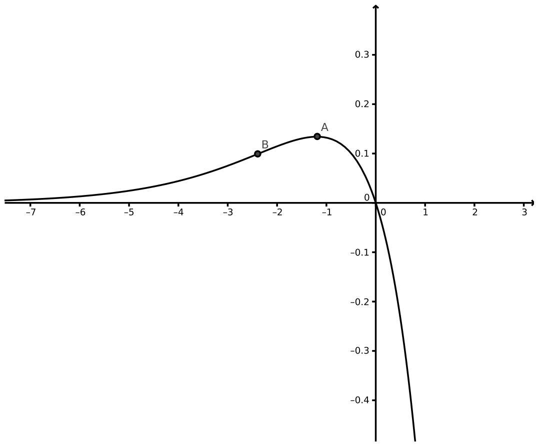
$$2(x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)) - 2(x - x^3/6 + o(x^3)) + x^2 = x^3 + o(x^3),$$

quello del denominatore è $x^3 + o(x^3)$: il limite vale 1.

7 La funzione è definita sull'intera retta reale, tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$ e a 0 per $x \to -\infty$. È inoltre negativa per $x > 0$, positiva per $x < 0$.

La derivata è $f'(x) = e^{x \log 2} \log 2 - e^x = e^x \log 2(e^{x \log 2 - x} - \frac{1}{\log 2})$, che si annulla per $x = \frac{\log \log 2}{1 - \log 2}$, punto di massimo assoluto della funzione.

La derivata seconda è $f''(x) = e^{x \log 2} \log^2 2 - e^x$, che si annulla per $x = \frac{2 \log \log 2}{1 - \log 2}$, unico punto di flesso della funzione. Il grafico è dunque come in figura:



L'andamento qualitativo non cambiava nelle altre versioni del compito.

8 Operando la sostituzione $e^x = t$ ci si riduce all'integrale di una semplice funzione razionale: una primitiva della funzione integranda è

$$1/2 \log \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right),$$

per cui l'integrale richiesto vale

$$1/2 \log \left(\frac{e^3 - 1}{e^3 + 1} \right) - 1/2 \log \left(\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} \right).$$

9 Dopo la sostituzione $x - 1 = t$, l'integrale improprio diventa $\int_0^1 \frac{dt}{(\log(1+t))^{1/3}}$. L'integranda è asintoticamente equivalente a $1/t^{1/3}$, per cui l'integrale improprio converge.

Simile procedimento per le altre versioni del compito (ma in due di queste l'integrale divergeva).

La serie di potenze converge invece soltanto in 0: si vede subito con il criterio del rapporto che il raggio di convergenza è 0.