Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 6/2/2013
Tipologia A

1.1 Si enunci il teorema di Cauchy.

1.2 Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è derivabile e convessa allora di sicuro

☐ $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ potrebbe non esistere;

☐ $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$;

☒ $\lim_{x\to+\infty} f'(x) \geq f'(0)$;

☐ $\lim_{x\to+\infty} f'(x) \geq 0$;

1.3 Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali non negativi tali che $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = 0$ per un opportuno $\alpha > 0$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

☐ è certamente convergente se $0 < \alpha < 1$;

☐ è certamente divergente;

☒ è certamente convergente se $\alpha > 1$;

☐ converge se e soltanto se $\alpha > 1$;

1.4 Data una funzione $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ si considerino l'integrale $\int_1^{+\infty} f([x])\, dx$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$, ove $[x]$ denota la parte intera di x. Possiamo dire che integrale e serie

☐ hanno lo stesso comportamento se e solo se f è decrescente;

☒ hanno certamente lo stesso comportamento;

☐ hanno lo stesso comportamento solo se f è decrescente;

☐ nessuna delle risposte precedenti;

1.5 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione infinitamente derivabile tale che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^4} = 0.$$

Allora può succedere che

- ☐ $f(0) = 1$;
- ☐ $f^{(3)}(0) = 2$;
- ☒ $f^{(5)}(0) = 3$;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti;

1.6 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^6 - 2 + x^4 + 2\cos x^2}{(e^{x^3} - 1)^2}.$$

1.7 Si calcolino le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{2 + e^{4x}}.$$

1.8 Si studi la convergenza di almeno uno tra l'integrale improprio e la serie:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}(1 + x \log x)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} 5^{-n} \arctan(1/n^5) x^n.$$

1.9(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si verifichi che la funzione

$$\phi(x) = \begin{cases} (1 - x^2)^2 & se \ -1 \le x \le 1 \\ 0 & se \ x < -1 \ oppure \ x > 1 \end{cases}$$

è derivabile su tutta la retta reale. Si consideri poi la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(x - n)$$

e si dica se f è ben definita, se è continua e se è derivabile.

ATTENZIONE: Tempo a disposizione 3 ore. Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 6/2/2013

ESERCIZI DI RECUPERO DELLA PRIMA PROVETTA

REGOLE: *Le soluzioni degli esercizi di recupero devono essere consegnate SEPARATAMENTE da quelle degli esercizi relativi alla seconda parta del corso, su fogli completi di nome e numero di matricola. La prima provetta si considera annullata, qualunque ne sia stato l'esito, per chi consegna le soluzioni degli esercizi di recupero.*

RECUPERO.1 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{e^{3x}-1}.$$

RECUPERO.2 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^4+x^2}-x^2}.$$

RECUPERO.3 Si studi la funzione $f(x) = \sqrt{|3x|}\, e^{-3x}$ e se ne tracci il grafico.

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Abbiamo

$$x^6 - 2 + x^4 + 2\cos x^2 = x^6 - 2 + x^4 + 2(1 - x^4/2 + o(x^6)) = x^6 + o(x^6),$$

mentre $(e^{x^3} - 1)^2 = (x^3 + o(x^3))^2 = x^6 + o(x^6)$: il limite richiesto vale 1. Nelle altre versioni del compito il valore del limite è diverso soltanto per la presenza di una costante numerica a numeratore (che non cambia il ragionamento da fare!).

7 L'integrale si calcola facilmente con il cambio di variabile $t = e^{2x}$: le primitive richieste sono $\frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\frac{e^{2x}}{\sqrt{2}}) + C$.

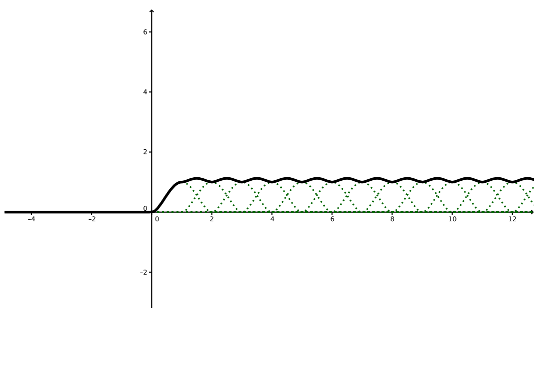
8 La funzione integranda diverge per $x \to 0^+$, per cui è necessario studiare il comportamento dell'integrale anche in un intorno di 0.

Dovrebbe venire anche il legittimo dubbio che il fattore $(1 + x \log x)$ presente a denominatore possa annullarsi, ma non è così: il minimo della funzione $x \log x$ è $-1/e$ (assunto per $x = 1/e$), per cui l'integranda è strettamente positiva sulla semiretta di integrazione!

Conviene suddividere l'insieme di integrazione negli intervalli $(0, 1]$ e $(1, +\infty)$. Per $x \to 0^+$, l'integranda è asisntoticamente equivalente a $1/\sqrt{x}$, per cui l'integrale improprio su $(0, 1]$ è convergente. Per x abbastanza grande, invece, l'integranda è (per esempio) minore o uguale di $1/x^2$ (si faccia il limite del rapporto...): l'integrale è convergente anche su $(1, +\infty)$.

9 Si vede con conti assai semplici che la funzione ϕ è continua e derivabile (con derivata 0) nei "punti di raccordo" $x = -1$ e $x = 1$. Si tratta di una funzione non negativa, maggiore di 0 solo nell'intervallo $(-1, 1)$: se ne deduce che la funzione $\phi(x-n)$ è diversa da zero solo nell'intervallo $(n - 1, n + 1)$. In particolare, in un intorno sufficientemente piccolo di ogni fissato $x \in \mathbf{R}$ ci sono *al massimo due* addendi della serie che sono diversi da 0: la nostra somma è in realtà *localmente finita*! Ne segue immediatamente che la somma della serie è ben definita ed è sia continua che derivabile.

In figura è rappresentata la somma della serie (le funzioni tratteggiate sono gli addendi):



RECUPERO.1 Ricordando i limiti fondamentali

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=1/2, \qquad \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$$

si vede subito che il limite richiesto è lo stesso della funzione

$$\frac{|x|}{\sqrt{2}\cdot 3x}.$$

Il limite richiesto dunque non esiste, in quanto il limite destro vale $\frac{1}{3\sqrt{2}}$, mentre il limite sinistro vale $-\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

RECUPERO.2 Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^4+x^2}+x^2$, si vede che il denominatore è uguale a

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2},$$

che tende a $1/2$ per $x\to+\infty$. Poiché il numeratore non ammette limite (oscilla infinite volte tra -1 e $+1$), il limite richiesto non esiste.

RECUPERO.3 Funzione definita e continua su tutta la retta reale, non negativa, si annulla solo in $x=0$. Per $x\to-\infty$ tende a $+\infty$, per $x\to+\infty$ tende a 0.

Per calcolare le derivate prima e seconda, conviene dividere i casi $x>0$ e $x<0$. Si vede subito che la derivata è negativa per $x<0$ e per $x>1/6$, mentre è positiva in $(0,1/6)$. In 0 c'è una cuspide e c in $x=1/6$ c'è un punto di massimo relativo. Calcolando la derivata seconda si trovano due flessi, in $x=\frac{1+\sqrt{2}}{6}$ e in $x=\frac{1-\sqrt{2}}{6}$.

Il grafico della funzione è più o meno il seguente: