Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 3/12/2012
Tipologia A

1.1 Si enunci il teorema di derivazione della funzione inversa e lo si applichi al calcolo della derivata della funzione $\log x$.

1.2 Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{1+xe^{-x}}$$

☐ vale 0;

☒ non esiste;

☐ vale $+\infty$;

☐ vale 1;

1.3 Se $f : (0,1) \to \mathbf{R}$ è derivabile e $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = +\infty$, allora certamente

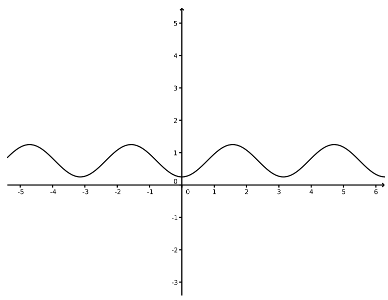
☐ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$;

☐ $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ è finito;

☐ $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ non esiste;

☒ nessuna delle risposte precedenti;

1.4 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

☐ ha esattamente un flesso;

☒ è convessa;

☐ è concava;

☐ cambia di concavità più di 5 volte;

1.5 L'insieme
$$\{x \in \mathbf{Q}: \ x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$$

☒ ha estremo superiore 2, che è anche massimo;

☐ ha estremo superiore $-\infty$ perché l'insieme è vuoto;

☐ ha estremo superiore 2, che non è un massimo;

☐ non ammette estremo superiore perché $\mathbf{Q}$ non è completo;

1.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sin(x))}{1-\cos(x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \sqrt{x^2+1} + \sin(x^3)}{e^{x^2} + 3x + 2}$$

1.7 Si studi la funzione
$$f(x) = \frac{\log x - 1}{\log^2 x}$$
e se ne tracci un grafico che ne rappresenti l'andamento.

1.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}(1+\sin^2(1/x^2)) & \textit{se } x > 0, \\ 0 & \textit{se } x = 0, \\ -\sqrt{|x|}(1+\sin^2(1/x^2)) & \textit{se } x < 0. \end{cases}$$

Si disegni un grafico qualitativo della funzione e si dimostri che, nell'origine, essa ammette retta tangente *verticale*. Si discuta brevemente la natura di questo punto notevole alla luce delle diverse possibili definizioni di "flesso a tangente verticale".

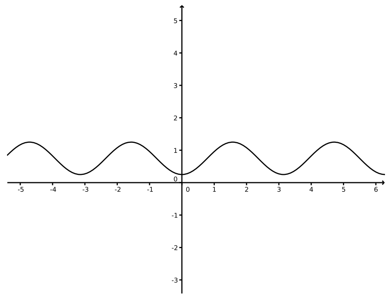
ATTENZIONE: Tempo a disposizione 2 ore. Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 3/12/2012
Tipologia B

2.1 La seguente figura mostra la derivata terza di una certa funzione f tale che $f''(0) = 0$:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☒ ha esattamente un flesso;
- ☐ cambia di concavità più di 5 volte;
- ☐ è concava;
- ☐ è convessa;

2.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin(x^2))}{1-\cos(2x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+\sqrt{x^2+1}+\sin(x^3)}{e^{x^2}+3x+2}$$

2.7 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\log x - 2}{\log^2 x}$$

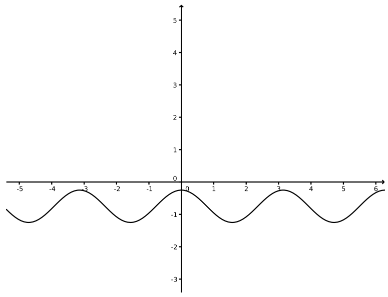
e se ne tracci un grafico che ne rappresenti l'andamento.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 3/12/2012
Tipologia C

3.1 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f :



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ ha esattamente un flesso;
- ☒ è concava;
- ☐ cambia di concavità più di 5 volte;
- ☐ è convessa;

3.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin(x^3))}{1-\cos(3x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+\sqrt{x^2+1}+\sin(x^3)}{e^{x^2}+3x+2}$$

3.7 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\log x - 3}{\log^2 x}$$

e se ne tracci un grafico che ne rappresenti l'andamento.

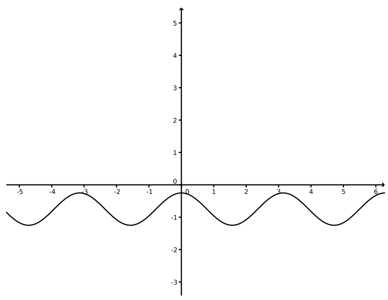
Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 3/12/2012

Tipologia D

4.1 La seguente figura mostra la derivata terza di una certa funzione f tale che $f''(0) = 0$:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ è convessa;
- ☒ ha esattamente un flesso;
- ☐ è concava;
- ☐ cambia di concavità più di 5 volte;

4.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin(x^2))}{1-\cos(4x)}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x + \sqrt{x^2+1} + \sin(x^3)}{e^{x^2} + 3x + 2}$$

4.7 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\log x - 4}{\log^2 x}$$

e se ne tracci un grafico che ne rappresenti l'andamento.

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Calcoliamo il primo limite: usando i limiti fondamentali si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sin(x))}{1-\cos(x)} =$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sin(x))}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{1-\cos(x)} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot +\infty = +\infty.$$

Il calcolo da fare nei compiti di tipologia B,C,D era del tutto analogo (ed i risultati erano, rispettivamente, $\frac{1}{2}$, 0 e $\frac{1}{8}$.

Abbiamo poi, dividendo numeratore e denominatore per e^x:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \sqrt{x^2+1} + \sin(x^3)}{e^{x^2} + 3x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{\sqrt{x^2+1}}{e^x} + \frac{\sin(x^3)}{e^x}}{e^{x^2-x} + 3\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}} = 0.$$

Questo limite era lo stesso nelle varie versioni del compito.

7 La funzione data esiste per $x > 0$, $x \neq 1$. Si vede subito che ha limite 0 per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$, mentre ha limite $-\infty$ per $x \to 1$. È inoltre negativa in $(0,1) \cup (1,e)$, positiva in $(e,+\infty)$. Abbiamo poi

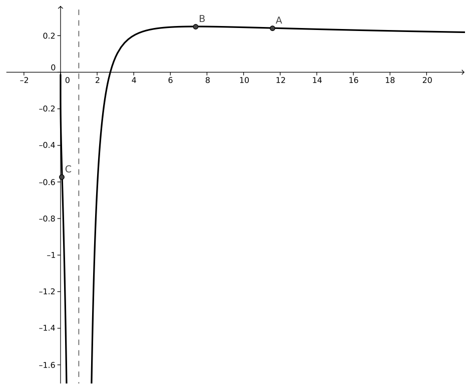
$$f'(x) = \frac{2 - \log x}{x \log^3 x},$$

da cui (studiando il segno di questa espressione) si ricava che f è decrescente sugli intervalli $(0,1)$ e $(e^2,+\infty)$, mentre è crescente sull'intervallo $(1,e^2)$. Abbiamo poi

$$f''(x) = \frac{\log^2 x - 6}{x^2 \log^4 x},$$

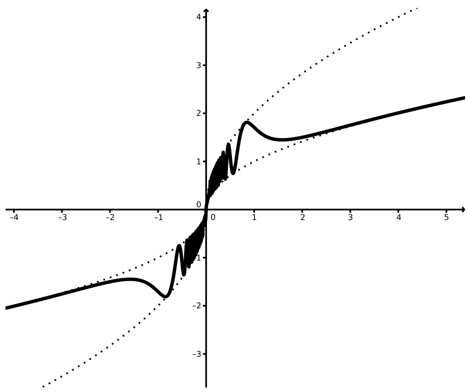
per cui abbiamo due flessi in $e^{-\sqrt{6}}$ e in $e^{\sqrt{6}}$. Altro fatto interessante è che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$: la tangente al grafico della funzione prolungata per continuità nell'origine è verticale.

Le informazioni ottenute portano a disegnare il seguente grafico:



Nelle altre versioni del compito il grafico era qualitativamente molto simile (con una diversa localizzazione dello zero, del punto di massimo e dei due flessi).

8 La funzione in esame è dispari, per cui è sufficiente studiarla per $x \geq 0$. Essa è continua in 0 in quanto (per $x \geq 0$) si ha $\sqrt{x} \leq f(x) \leq 2\sqrt{x}$: più precisamente, in ogni intorno destro di 0 la funzione $f(x)$ oscilla infinite volte tra queste due funzioni. Questa osservazione consente anche di disegnare un grafico qualitativo simile a questo:



Dal grafico si intuisce che la retta tangente nell'origine esiste ed è l'asse delle y, anche se f *non è crescente in nessun intorno di* 0!

Per dimostrare in modo rigoroso che è effettivamente così, avendo già notato che f è continua in 0, basta osservare che il limite del rapporto incrementale è $+\infty$ in quanto

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \geq \frac{1}{\sqrt{h}} \to +\infty \quad \textit{per } h \to 0^+ :$$

la funzione in esame ha "derivata infinita" nell'origine!

L'origine è un punto di flesso a tangente verticale se per flesso intendiamo un punto in cui "la retta tangente attraversa il grafico", oppure un punto per il quale non c'è un intorno completo in cui la funzione è concava o convessa. Non lo è invece se per noi un punto di flesso deve essere caratterizzato dal fatto che f è convessa in un intorno sinistro del punto e concava in un intorno destro (o concava a sinistra e convessa a destra)...