Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 17/2/2012
Tipologia A

1.1 Si enunci il teorema fondamentale del calcolo integrale.

1.2 Sia $\{a_n\}$ una successione reale tale che $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Consideriamo il raggio di convergenza r della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Allora

- ☒ si ha di sicuro $r \geq 1$;
- ☐ si ha di sicuro $r = 1$;
- ☐ si ha di sicuro $r = 0$;
- ☐ si ha di sicuro $r = +\infty$;

1.3 Il limite $\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} \frac{\sin x}{x}$

- ☐ non esiste;
- ☐ vale 1;
- ☒ vale $-\frac{2}{3\pi}$;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti;

1.4 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile due volte tale che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Allora di sicuro

- ☐ f non può avere punti di minimo assoluto;
- ☐ esiste un unico punto di minimo assoluto per f;
- ☒ se x_0 è tale che $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è di minimo assoluto per f;
- ☐ tutti i punti sono di minimo assoluto per f;

1.5 Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione limitata. Allora di sicuro

- ☒ l'integrale superiore di f è maggiore o uguale all'integrale inferiore di f;
- ☐ l'integrale superiore di f è strettamente maggiore dell'integrale inferiore di f;
- ☐ f è integrabile secondo Riemann;
- ☐ f ammette limite finito in ogni punto di $[a, b]$;

1.6 Si calcoli, se esiste, almeno uno dei limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \arctan x - 2\sin x}{\log(1 + x^5)}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^5 \cos x + x^4 + e^{-x}}{\sqrt{4 + x^{10}}}.$$

1.7 Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \sin 10x & se\ x > 0, \\ 10x & altrimenti. \end{cases}$$

Se ne studi la continuità e la derivabilità in 0. Si studi poi l'andamento della funzione f e se ne disegni il grafico (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

1.8 Si studi la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\, dx.$$

1.9 Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n}) \right) x^n.$$

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

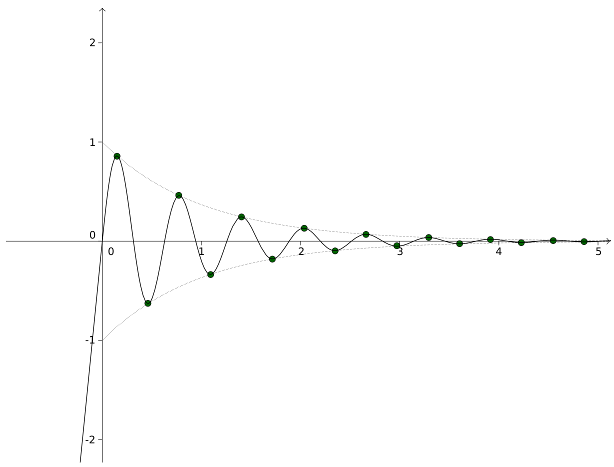
6 Per calcolare il primo limite basta usare gli sviluppi di Taylor elementari: si vede subito che il denominatore è $\frac{11}{60}x^5 + o(x^5)$, mentre il denominatore è $x^5 + o(x^5)$: il limite richiesto vale allora $\frac{11}{60}$.

Il secondo limite invece non esiste: dividendo numeratore e denominatore per x^5 la frazione diventa

$$\frac{\cos x + \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x^5}}{\sqrt{\frac{4}{x^{10}} + 1}}.$$

Il denominatore tende a 1, mentre il numeratore oscilla infinite volte tra $+1$ e -1.

7 Si vede subito che la funzione data è continua in 0. Inoltre, per $x > 0$ abbiamo $f'(x) = 10e^{-x}\cos 10x - e^{-x}\sin 10x$, mentre per $x < 0$ vale $f'(x) = 10$. Queste due funzioni tendono allo stesso limite 10 per $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$ rispettivamente: dunque esiste $f'(0) = 10$. È altrettanto evidente che $f(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$ (la funzione oscilla tra i due esponenziali $\pm e^{-x}$. Inoltre f è crescente per $x < 0$. Per $x > 0$, la derivata si annulla nei punti tali che $\tan 10x = 10$, cioè nei punti $x_k = \frac{1}{10}\arctan 10 + k\frac{\pi}{10}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$: questi punti sono alternativamente di massimo e di minimo relativo. In conclusione, l'aspetto del grafico di f è il seguente:



8 L'integranda diverge per $x \to \pi/2$: dobbiamo studiare il suo andamento in un intorno di quel punto. Si ha

$$\sqrt{\tan x} = \sqrt{\frac{\cos(\pi/2 - x)}{\sin(\pi/2 - x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{(\pi/2 - x)}} \qquad \textit{per } x \to \pi/2.$$

Dunque la funzione data è integrabile. In alternativa, si poteva cambiare variabile ponendo $y = \pi/2 - x$, per poi valutare il comportamento asintotico dell'integranda in 0.

9 Grazie allo sviluppo di Taylor del logaritmo abbiamo $\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{2n^2}$: la nostra serie di potenze si comporta come $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n^2}$. Il raggio di convergenza è 1, e la serie data converge assolutamente per $x = \pm 1$. L'insieme di convergenza è quindi l'intervallo $[-1, 1]$.