Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 3/2/2012

Tipologia A

1.1 Si dia la definizione di raggio di convergenza di una serie di potenze. Si descriva la relazione tra questo parametro e l'insieme di convergenza della serie stessa.

1.2 Si consideri la funzione $F(x) = \int_0^x \sqrt{|t|}\, dt$. Possiamo dire che

- ☐ F non è né derivabile né continua in 0;
- ☐ F non è derivabile ma è continua in 0;
- ☒ F è derivabile in 0 e $F'(0) = 0$;
- ☐ F è derivabile in 0, con $F'(0) = +\infty$;

1.3 Sia $f : (0, 1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che l'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\, dx$ esista finito. Allora di sicuro

- ☒ la funzione $F(x) = \int_x^1 f(t)\, dt$ è continua (a destra) in 0;
- ☐ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$;
- ☐ $f(x) \geq 0$ in $(0, 1]$;
- ☐ $\int_0^1 |f(x)|\, dx < +\infty$;

1.4 Se $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^3}$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha a_n$

- ☒ converge sicuramente per $\alpha < 2$, ma potrebbe convergere anche per qualche $\alpha \geq 2$;
- ☐ non converge per nessun α reale;
- ☐ converge se e soltanto se $\alpha < 2$;
- ☐ converge certamente per ogni α reale;

1.5 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile infinite volte, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ la sua serie di Taylor centrata in 0. Allora

- ☒ la serie potrebbe convergere ad $f(x)$ solo per $x = 0$;
- ☐ la serie potrebbe non convergere ad $f(x)$ per nessun x;
- ☐ la serie converge di sicuro ad $f(x)$ nel suo intervallo di convergenza;
- ☐ la serie converge di sicuro ad $f(x)$ per ogni x;

1.6 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2 + \log^2(1+x)}{\sin(\frac{1}{2}x)(1 - \cos(\frac{2}{3}x))}.$$

1.7 Si calcoli l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}\, dx.$$

1.8 Si studi la convergenza di almeno uno tra il seguente integrale improprio e la seguente serie

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left(\log(1 + \frac{1}{x+1})\right)^{1/2}}{\sqrt{\log(1+x)}}\, dx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin(\frac{1}{n^{1/2}}) 2^{-n} x^n.$$

1.9(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Sia $f : [-1, 2] \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Si provi che

$$\lim_{t \to 0} \int_0^1 |f(x+t) - f(x)|\, dx = 0.$$

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 3/2/2012

ESERCIZI DI RECUPERO DELLA PRIMA PROVETTA

REGOLE: *Le soluzioni degli esercizi di recupero devono essere consegnate SEPARATAMENTE da quelle degli esercizi relativi alla seconda parta del corso, su fogli completi di nome e numero di matricola. La prima provetta si considera annullata, qualunque ne sia stato l'esito, per chi consegna le soluzioni degli esercizi di recupero.*

RECUPERO.1 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(e^x-1)}{\sin^2 x}.$$

RECUPERO.2 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{4x}+e^{x^2}+\cos(e^x)}{e^{x^2+\log x}}.$$

RECUPERO.3 Si consideri la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = x-(1+x)\log(1+x):$$

se ne trovi il dominio e si studino inf e sup di f su tale insieme, precisando se si tratta di massimo e/o di minimo.

Utilizzando i risultati della prima parte dell'esercizio, si studi la funzione

$$g(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

e se ne disegni un grafico qualitativo. Non si richiede lo studio della convessità.

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Il limite può essere calcolato facilmente usando la formula di Taylor. Infatti, usando gli sviluppi di seno, coseno e logaritmo si vede subito che il numeratore è $2-x^3+o(x^3)-2+(x-x^2/2+o(x^2))^2 = -x^3+o(x^3)$, mentre il denominatore è $\frac{x}{2}\frac{(\frac{2}{3}x)^2}{2}+o(x^3) = \frac{x^3}{9}+o(x^3)$. Il limite richiesto vale quindi -9. Nelle altre versioni del compito cambiano solo i fattori numerici a denominatore: per il resto, il conto da fare è identico.

7 Con la sostituzione $t = 1 + \cos^2 x$ si vede subito che una primitiva dell'integranda è $-\sqrt{1+\cos^2 x}$. L'integrale richiesto vale allora $\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos^2(1)}$. Nelle altre versioni del compito cambia soltanto l'estremo superiore dell'intervallo di integrazione!

8 Per studiare l'integrale improprio, conviene suddividere la semiretta di integrazione in $[0,1]$ e $[1,+\infty)$. Su $[0,1]$ l'integrale converge, perché l'integranda è asintoticamente equivalente a $k/sqrtx$ (con $k = \sqrt{\log(2)}$). Invece su $[1,+\infty)$ l'integrale diverge, perché per $x \to +\infty$ l'integranda è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{x^{1/2}(\log x)^{1/2}}$, espressione il cui integrale improprio diverge (per esempio, per x abbastanza grande si minora con $1/x$). In conclusione, l'integrale dato diverge a $+\infty$.

Le altre versioni del compito si studiano allo stesso modo: cambia solo l'esponente del numeratore, per cui in due casi l'integrale improprio converge!

9 Usiamo l'uniforme continuità della funzione f: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x, y \in [-1,2]$, $|x-y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. In particolare, se $x \in [0,1]$ e $t \in (-\delta, \delta)$ abbiamo $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ e quindi $\int_0^1 |f(x+t) - f(x)|\, dx < \varepsilon$. Ma questo è quel che volevamo dimostrare!

RECUPERO.1 Possiamo riscrivere la funzione di cui vogliamo calcolare il limite come segue:

$$\frac{1-\cos(e^x-1)}{(e^x-1)^2} \cdot \frac{(e^x-1)^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}.$$

Usando i limiti fondamentali vediamo che queste 3 frazioni tendono nell'ordine a $1/2$, 1 e 1: il limite richiesto vale $1/2$.

Questo limite si poteva calcolare con estrema facilità anche usando la formula di Taylor.

RECUPERO.2 Spezziamo la frazione come somma: la funzione di cui si chiede il limite è

$$e^{4x-x^2-\log x} + e^{-logx} + \frac{\cos(e^2)}{e^{x^2+\log x}}.$$

Tutti e tre gli addendi tendono a 0 per $x \to +\infty$ (si noti che il terzo termine è il rapporto tra una funzione limitata ed una che tende a $+\infty$): il limite vale 0.

RECUPERO.3 La funzione f è definita per $x > -1$. Per $x \to +\infty$ essa tende a $-\infty$ per $x \to -1^+$ essa tende a -1. Inoltre si ha $f'(x) = -\log(1+x)$, che è positiva in $(-1,0)$ e negativa in $(0,+\infty)$: $x = 0$ è punto di massimo assoluto. Siccome $f(0) = 0$, se ne deduce che $\sup f = \max f = 0$, mentre $\inf f = -\infty$.

La funzione g è definita per $x > -1$, $x \neq 0$. Per $x \to -1^+$ essa tende a $+\infty$, tende a 1 per $x \to 0$ e a 0 per $x \to +\infty$. In particolare, G è prolungabile ad una funzione continua in $x = 0$. Usando la definizione di derivata (o facendo il limite della derivata di g), si vede che la funzione estesa in questo modo è anche derivabile con derivata $-1/2$.

Abbiamo poi $g'(x) = \frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)}$: grazie al risultato della prima parte dell'esercizio, questa quantità è negativa. La funzione g è quindi decrescente in tutto il suo dominio. Con tutte queste informazioni, è immediato tracciare un grafico che mostra l'andamento di g.