Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 2/12/2011

Tipologia A

1.1 Si enunci il teorema dei valori intermedi e se ne citi almeno un'applicazione significativa.

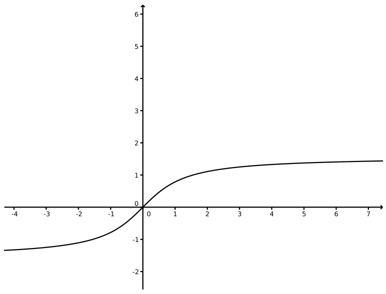
1.2 Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato. Sia poi $-A = \{-a : a \in A\}$. Allora di sicuro

- ☒ $\inf -A = -\sup A$;
- ☐ $\sup -A = -\sup A$;
- ☐ $\inf -A = -\inf A$;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti;

1.3 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile per $x \neq 0$ tale che $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$. Allora

- ☐ f può essere derivabile in $x = 0$;
- ☒ f può essere continua in $x = 0$;
- ☐ f è certamente continua in $x = 0$;
- ☐ f è crescente in un intorno di 0;

1.4 La seguente figura mostra la derivata prima di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☒ è convessa ma non crescente;
- ☐ è positiva;
- ☐ ha esattamente un flesso;
- ☐ è crescente;

1.5 Il limite $\lim_{x\to+\infty} x\arctan(1/x)$

- $\square$ vale $+\infty$;
- $\square$ non esiste;
- $\boxtimes$ vale 1;
- $\square$ vale 0;

1.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)-2x}{\sin(x^3)}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{x^2})}{\sin^2(e^{1/x}-1)}.$$

1.7 Si consideri la funzione $f(x) = |x|^{-\log|x|}$ e se ne tracci il grafico. Si studino in particolare la continuità e la derivabilità della funzione in eventuali punti "dubbi", e si dica anche se la funzione f può essere estesa ad una funzione continua e/o derivabile definita in $x = 0$.

1.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Una funzione derivabile e convessa si dice *strettamente convessa* se il suo grafico non contiene segmenti (o, equivalentemente, se il grafico della funzione è strettamente al di sopra delle rette tangenti al grafico stesso nei punti diversi da quello di tangenza).

Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, strettamente convessa e tale che $f(a) = f(b)$. Si dimostri che f ammette uno ed un solo punto di minimo assoluto x_0. Dove viene assunto il massimo di f?

Sia poi $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione tale che $g(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ e $g(x_0) = f(x_0)$. È vero che x_0 è un punto di minimo assoluto anche per g? Possiamo dire qualcosa sugli eventuali punti di massimo di g?

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 2/12/2011
Tipologia B

2.1 Si enunci il teorema dei valori intermedi e se ne citi almeno un'applicazione significativa.

2.2 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile per $x \neq 0$ tale che $\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$. Allora

☐ f può essere derivabile in $x = 0$;

☐ f è crescente in un intorno di 0;

☐ f è certamente continua in $x = 0$;

☒ f può essere continua in $x = 0$;

2.3 Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato. Sia poi $-A = \{-a : \ a \in A\}$. Allora di sicuro

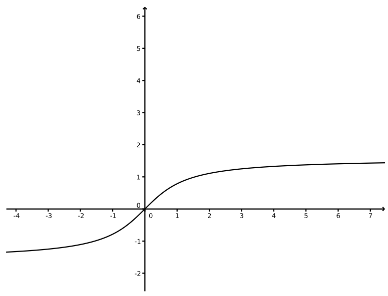
☒ $\inf\ -A = -\sup A$;

☐ $\sup\ -A = -\sup A$;

☐ $\inf\ -A = -\inf A$;

☐ nessuna delle risposte precedenti;

2.4 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

☒ ha esattamente un flesso;

☐ è crescente;

☐ è convessa ma non necessariamente crescente;

☐ è positiva;

2.5 Il limite $\lim_{x\to+\infty} x\arctan(1/x)$

- ☒ vale 1;
- ☐ non esiste;
- ☐ vale 0;
- ☐ vale $+\infty$;

2.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)-3x}{\sin(x^3)}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+\frac{3}{x^2})}{\sin^2(e^{1/x}-1)}.$$

2.7 Si consideri la funzione $f(x) = |x|^{-|\log|x||}$ e se ne tracci il grafico. Si studino in particolare la continuità e la derivabilità della funzione in eventuali punti "dubbi", e si dica anche se la funzione f può essere estesa ad una funzione continua e/o derivabile definita in $x = 0$.

2.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Una funzione derivabile e convessa si dice *strettamente convessa* se il suo grafico non contiene segmenti (o, equivalentemente, se il grafico della funzione è strettamente al di sopra delle rette tangenti al grafico stesso nei punti diversi da quello di tangenza).

Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, strettamente convessa e tale che $f(a) = f(b)$. Si dimostri che f ammette uno ed un solo punto di minimo assoluto x_0. Dove viene assunto il massimo di f?

Sia poi $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione tale che $g(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ e $g(x_0) = f(x_0)$. È vero che x_0 è un punto di minimo assoluto anche per g? Possiamo dire qualcosa sugli eventuali punti di massimo di g?

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 2/12/2011
Tipologia C

3.1 Si enunci il teorema dei valori intermedi e se ne citi almeno un'applicazione significativa.

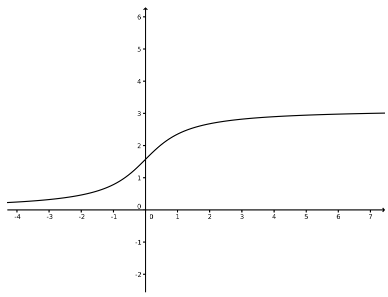
3.2 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile per $x \neq 0$ tale che $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$. Allora

- ⊠ f può essere continua in $x = 0$;
- □ f è certamente continua in $x = 0$;
- □ f è crescente in un intorno di 0;
- □ f può essere derivabile in $x = 0$;

3.3 Il limite $\lim_{x\to+\infty} x \arctan(1/x)$

- ⊠ vale 1;
- □ non esiste;
- □ vale 0;
- □ vale $+\infty$;

3.4 La seguente figura mostra la derivata prima di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- □ è positiva;
- ⊠ è crescente;
- □ è convessa ma non necessariamente crescente;
- □ ha esattamente un flesso;

3.5 Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato. Sia poi $-A = \{-a : \; a \in A\}$. Allora di sicuro

☐ $\sup \; -A = -\sup A$;

☒ $\inf \; -A = -\sup A$;

☐ $\inf \; -A = -\inf A$;

☐ nessuna delle risposte precedenti;

3.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(4x) - 4x}{\sin(x^3)}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1 + \frac{2}{x^2})}{\sin^2(e^{1/x} - 1)}.$$

3.7 Si consideri la funzione $f(x) = |x|^{-\log |x|}$ e se ne tracci il grafico. Si studino in particolare la continuità e la derivabilità della funzione in eventuali punti “dubbi”, e si dica anche se la funzione f può essere estesa ad una funzione continua e/o derivabile definita in $x = 0$.

3.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Una funzione derivabile e convessa si dice *strettamente convessa* se il suo grafico non contiene segmenti (o, equivalentemente, se il grafico della funzione è strettamente al di sopra delle rette tangenti al grafico stesso nei punti diversi da quello di tangenza).

Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, strettamente convessa e tale che $f(a) = f(b)$. Si dimostri che f ammette uno ed un solo punto di minimo assoluto x_0. Dove viene assunto il massimo di f?

Sia poi $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione tale che $g(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ e $g(x_0) = f(x_0)$. È vero che x_0 è un punto di minimo assoluto anche per g? Possiamo dire qualcosa sugli eventuali punti di massimo di g?

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 2/12/2011
Tipologia D

4.1 Si enunci il teorema dei valori intermedi e se ne citi almeno un'applicazione significativa.

4.2 Il limite $\lim_{x\to+\infty} x\arctan(1/x)$

☐ non esiste;

☐ vale $+\infty$;

☒ vale 1;

☐ vale 0;

4.3 Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato. Sia poi $-A = \{-a :\ a \in A\}$. Allora di sicuro

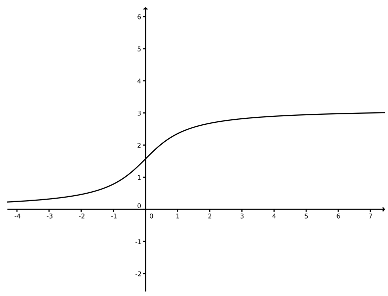
☒ $\inf\ -A = -\sup A$;

☐ $\inf\ -A = -\inf A$;

☐ $\sup\ -A = -\sup A$;

☐ nessuna delle risposte precedenti;

4.4 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

☒ è convessa ma non necessariamente crescente;

☐ è positiva;

☐ è crescente;

☐ ha esattamente un flesso;

4.5 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile per $x \neq 0$ tale che $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$. Allora

- ☐ f può essere derivabile in $x = 0$;
- ☒ f può essere continua in $x = 0$;
- ☐ f è certamente continua in $x = 0$;
- ☐ f è crescente in un intorno di 0;

4.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x) - 5x}{\sin(x^3)}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1 + \frac{6}{x^2})}{\sin^2(e^{1/x} - 1)}.$$

4.7 Si consideri la funzione $f(x) = |x|^{-|\log|x||}$ e se ne tracci il grafico. Si studino in particolare la continuità e la derivabilità della funzione in eventuali punti "dubbi", e si dica anche se la funzione f può essere estesa ad una funzione continua e/o derivabile definita in $x = 0$.

4.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Una funzione derivabile e convessa si dice *strettamente convessa* se il suo grafico non contiene segmenti (o, equivalentemente, se il grafico della funzione è strettamente al di sopra delle rette tangenti al grafico stesso nei punti diversi da quello di tangenza).

Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, strettamente convessa e tale che $f(a) = f(b)$. Si dimostri che f ammette uno ed un solo punto di minimo assoluto x_0. Dove viene assunto il massimo di f?

Sia poi $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione tale che $g(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ e $g(x_0) = f(x_0)$. È vero che x_0 è un punto di minimo assoluto anche per g? Possiamo dire qualcosa sugli eventuali punti di massimo di g?

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Il primo limite si calcola facilmente usando la regola di l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)-2x}{\sin(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\cos^2(2x)}-2}{\cos(x^3)\,3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{8\sin^2(2x)}{3\,(2x)^2}=\frac{8}{3}.$$

Il secondo limite si calcola per esempio usando i limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{x^2})}{\sin^2(e^{1/x}-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}}\,\frac{\sin^2(e^{1/x}-1)}{(e^{1/x}-1)^2}\,\left(\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}\right)^2=1.$$

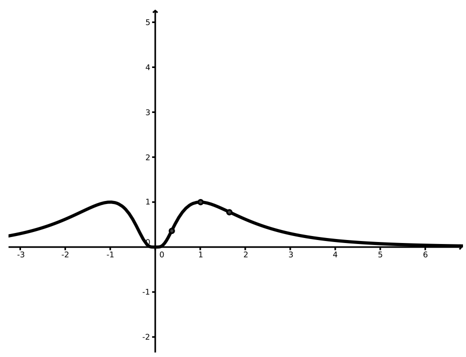
Entrambi i limiti, ovviamente, potevano essere calcolati anche con la formula di Taylor. Nei compiti delle tipologie B,C,D il valore numerico dei limiti era diverso, ma non il procedimento per calcolarli!

7 La funzione dei compiti di tipologia A e C è definita per $x\neq 0$ ed è pari: basta quindi studiarla per $x>0$. In tale semiretta la funzione può essere riscritta $f(x)=e^{-\log^2 x}$, ovunque positiva e derivabile. Inoltre abbiamo che $f(x)\to 0$ per $x\to+\infty$ e per $x\to 0^+$: se ne deduce in particolare che la funzione può essere estesa ad una funzione continua ponenendo $f(0)=0$.

La derivata prima è $f'(x)=-\frac{2\log x}{x}e^{-\log^2 x}$, per cui f è crescente in $(0,1)$, decrescente in $(1,+\infty)$: $x=1$ è punto di massimo (assoluto) per f. Inoltre $f'(x)\to 0$ per $x\to 0^+$: la funzione estesa nell'origine ponendo $f(0)=0$ è derivabile con derivata nulla.

Infine, la derivata seconda è $f''(x)=\frac{e^{-\log^2 x}}{x^2}(4\log^2 x+2\log x-2)$, per cui la funzione è convessa negli intervalli $(0,e^{-1})$ e $(e^{1/2},+\infty$, mentre è concava in $(e^{-1},e^{1/2})$.

Riassumendo, possiamo disegnare il grafico seguente:



Vediamo la funzione dei compiti di tipologia B e D: è ancora pari, positiva, definita per $x\neq 0$. Per $x>0$, tenendo conto del modulo presente nell'esponente abbiamo

$$f(x)=\begin{cases} e^{\log^2 x} & 0<x\leq 1,\\ e^{-\log^2 x} & x>1.\end{cases}$$

Abbiamo quindi che $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$: f non è estendibile ad una funzione continua definita in $x = 0$. Invece, è evidentemente continua in $x = 1$ (la derivabilità è da valutare...) e $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$.

Abbiamo poi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2\log x}{x} e^{\log^2 x} & 0 < x < 1, \\ -\frac{2\log x}{x} e^{-\log^2 x} & x > 1, \end{cases}$$

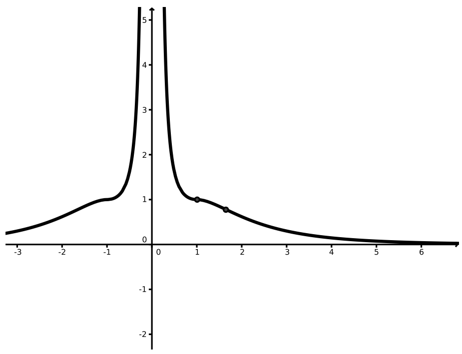
da cui si vede subito che f è decrescente sull'intera semiretta $x > 0$. Si ha poi $f'(x) \to 0$ per $x \to 1$, per cui f è derivabile anche in $x = 1$ con derivata nulla.

Calcoliamo per finire la derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^{\log^2 x}}{x^2}(4\log^2(x) - 2\log x + 2) & 0 < x < 1, \\ \frac{e^{-\log^2 x}}{x^2}(4\log^2(x) + 2\log x - 2) & x > 1. \end{cases}$$

Ne deduciamo che f è convessa in $(0, 1)$ e in $(e^{1/2}, +\infty)$, concava in $(1, e^{1/2})$: in particolare, $x = 1$ è un punto di flesso a tangente orizzontale.

Il grafico è allora il seguente:



8 Osserviamo che la derivata di una funzione derivabile e strettamente convessa è *strettamente crescente*: se $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, possiamo scrivere le disuguaglianze

$$\begin{aligned} f(x_2) &> f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) \\ f(x_1) &> f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2) \end{aligned}$$

Sommando membro a membro e semplificando ricaviamo subito che $f'(x_2) > f'(x_1)$.

Per il teorema di Rolle, $f'(x)$ deve annullarsi in un punto x_0 di (a, b): dalla stretta crescenza di f' si deduce che tale punto è unico e che $f'(x) < 0$ in $[a, x_0)$, $f'(x) > 0$ in $(x_0, b]$: x_0 è il punto di minimo assoluto cercato. Il massimo assoluto è assunto evidentemente agli estremi!

Il punto x_0 è di minimo assoluto anche per g: per ogni $x \in [a, b]$ abbiamo infatti $g(x) \geq f(x) \geq f(x_0) = g(x_0)$. Non possiamo invece dire nulla su eventuali punti di massimo di g: per esempio, g potrebbe essere una funzione discontinua con estremo superiore $+\infty$!