Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 29/11/2010

Tipologia A

1.1 Si enunci il teorema di Bolzano-Weierstrass.

1.2 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua. Allora di sicuro

☐ f non è crescente in alcun intorno di x_0;

☐ f è strettamente crescente in un intorno di $x_0 \;\Leftrightarrow\; f'(x_0) > 0$;

☒ se $f'(x_0) > 0$, allora f è strettamente crescente in un intorno di x_0, mentre il viceversa può non valere;

☐ se f è strettamente crescente in un intorno di x_0 allora $f'(x_0) > 0$, mentre il viceversa può non valere;

1.3 Il limite $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/x}$

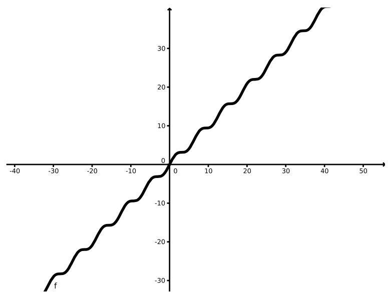
☐ non esiste;

☐ vale $+\infty$;

☐ vale 0;

☒ vale 1;

1.4 La seguente figura mostra la derivata prima di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

☐ ha esattamente un flesso;

☒ è convessa;

☐ è concava;

☐ è crescente;

1.5 Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$. Allora certamente

- ☐ $\inf\{a_n :\ n \in \mathbf{N}\} = 3$;
- ☐ $\sup\{a_n :\ n \in \mathbf{N}\} = 3$;
- ☒ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che $\sup\{a_n :\ n \in \mathbf{N},\ n \geq \overline{n}\} \leq 4$;
- ☐ $\inf\{a_n :\ n \in \mathbf{N}\} \geq 2$;

1.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\Big(\cos(2x)\Big)^{\frac{2}{x^2}} \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 \arctan\left(\frac{5}{x}\right) - 5x^2.$$

1.7 Si consideri la funzione $f(x) = (1+\cos x)\log(1+\cos x)$.

- Se ne determini il dominio e le eventuali simmetrie e periodicità.
- Si dica se la funzione è prolungabile ad una funzione continua e/o derivabile nel punto $x = \pi$.
- Si studi la crescenza e la decrescenza della funzione e se ne determinino gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e/o assoluto.
- Si disegni il grafico di f, trascurando lo studio della concavità e della convessità.

1.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Siano $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ due successioni reali, con a_n iniettiva, $\{a_n\}_n \subset [0,1]$, $b_n \neq 0$ per ogni n e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Si definisca una funzione $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} b_n & \textit{se } x = a_n \textit{ per qualche } n, \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Mostrare che f è discontinua in tutti i punti della successione a_n, continua in tutti gli altri *[Sugg.: si dia per buona l'informazione che* $[0,1] \setminus \{a_n :\ n = 1,2,3\ldots\}$ *è un sottinsieme denso di* $[0,1]$. *Si noti anche che la successione* a_n *potrebbe essere a sua volta piuttosto bruttina: per esempio, i suoi punti potrebbero essere a loro volta densi in* $[0,1]$.*]*

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 29/11/2010
Tipologia B

2.1 Si enunci il teorema di Bolzano-Weierstrass.

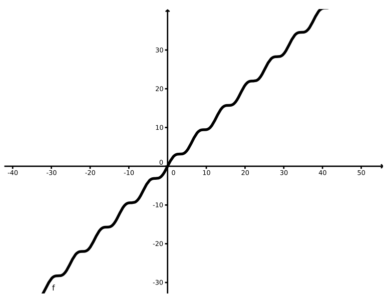
2.2 Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$. Allora certamente

- ☐ $\sup\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\} = 3$;
- ☐ $\inf\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\} = 3$;
- ☐ $\inf\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\} \geq 2$;
- ☒ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che $\sup\{a_n : \ n \in \mathbf{N}, \ n \geq \overline{n}\} \leq 4$;

2.3 Il limite $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$

- ☐ vale 0;
- ☒ vale 1;
- ☐ vale $+\infty$;
- ☐ non esiste;

2.4 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☒ ha esattamente un flesso;
- ☐ è crescente;
- ☐ è convessa;
- ☐ è concava;

2.5 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua. Allora di sicuro

- $\square$ f non è crescente in alcun intorno di x_0;
- $\boxtimes$ se $f'(x_0) > 0$, allora f è strettamente crescente in un intorno di x_0, mentre il viceversa può non valere;
- $\square$ f è strettamente crescente in un intorno di $x_0 \iff f'(x_0) > 0$;
- $\square$ se f è strettamente crescente in un intorno di x_0 allora $f'(x_0) > 0$, mentre il viceversa può non valere;

2.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos(\frac{1}{2}x) \right)^{\frac{3}{x^2}} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 \arctan(\frac{4}{x}) - 4x^2.$$

2.7 Si consideri la funzione $f(x) = (1 - \cos x)\log(1 - \cos x)$.

- Se ne determini il dominio e le eventuali simmetrie e periodicità.
- Si dica se la funzione è prolungabile ad una funzione continua e/o derivabile nel punto $x = \pi$.
- Si studi la crescenza e la decrescenza della funzione e se ne determinino gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e/o assoluto.
- Si disegni il grafico di f, trascurando lo studio della concavità e della convessità.

2.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Siano $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ due successioni reali, con a_n iniettiva, $\{a_n\}_n \subset [0,1]$, $b_n \neq 0$ per ogni n e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Si definisca una funzione $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} b_n & \textit{se } x = a_n \textit{ per qualche } n, \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Mostrare che f è discontinua in tutti i punti della successione a_n, continua in tutti gli altri *[Sugg.: si dia per buona l'informazione che* $[0,1] \setminus \{a_n : n = 1,2,3\ldots\}$ *è un sottinsieme denso di* $[0,1]$*. Si noti anche che la successione* a_n *potrebbe essere a sua volta piuttosto bruttina: per esempio, i suoi punti potrebbero essere a loro volta densi in* $[0,1]$*.]*

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 29/11/2010
Tipologia C

3.1 Si enunci il teorema di Bolzano-Weierstrass.

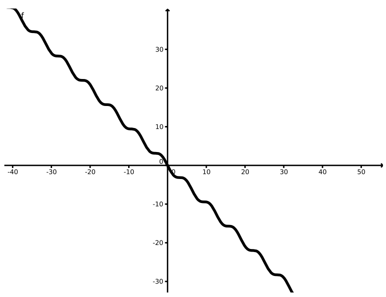
3.2 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua. Allora di sicuro

- ☐ f è strettamente crescente in un intorno di $x_0 \iff f'(x_0) > 0$;
- ☐ f non è crescente in alcun intorno di x_0;
- ☒ se $f'(x_0) > 0$, allora f è strettamente crescente in un intorno di x_0, mentre il viceversa può non valere;
- ☐ se f è strettamente crescente in un intorno di x_0 allora $f'(x_0) > 0$, mentre il viceversa può non valere;

3.3 Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3$. Allora certamente

- ☒ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che $\sup\{a_n : \ n \in \mathbf{N}, \ n \geq \overline{n}\} \leq 4$;
- ☐ $\sup\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\} = 3$;
- ☐ $\inf\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\} \geq 2$;
- ☐ $\inf\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\} = 3$;

3.4 La seguente figura mostra la derivata prima di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ è crescente;
- ☐ è convessa;
- ☐ ha esattamente un flesso;
- ☒ è concava;

3.5 Il limite $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$

☐ vale 0;

☐ non esiste;

☐ vale $+\infty$;

☒ vale 1;

3.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(\frac{2}{3}x)\right)^{\frac{4}{x^2}} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3\arctan(\frac{3}{x}) - 3x^2.$$

3.7 Si consideri la funzione $f(x) = (1+\cos x)\log(1+\cos x)$.

- Se ne determini il dominio e le eventuali simmetrie e periodicità.
- Si dica se la funzione è prolungabile ad una funzione continua e/o derivabile nel punto $x = \pi$.
- Si studi la crescenza e la decrescenza della funzione e se ne determinino gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e/o assoluto.
- Si disegni il grafico di f, trascurando lo studio della concavità e della convessità.

3.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Siano $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ due successioni reali, con a_n iniettiva, $\{a_n\}_n \subset [0,1]$, $b_n \neq 0$ per ogni n e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Si definisca una funzione $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} b_n & \textit{se } x = a_n \textit{ per qualche } n, \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Mostrare che f è discontinua in tutti i punti della successione a_n, continua in tutti gli altri *[Sugg.: si dia per buona l'informazione che* $[0,1] \setminus \{a_n : \ n = 1,2,3\ldots\}$ *è un sottinsieme denso di* $[0,1]$*. Si noti anche che la successione* a_n *potrebbe essere a sua volta piuttosto bruttina: per esempio, i suoi punti potrebbero essere a loro volta densi in* $[0,1]$*.]*

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 29/11/2010
Tipologia D

4.1 Si enunci il teorema di Bolzano-Weierstrass.

4.2 Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$. Allora certamente

$\square$ $\sup\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\} = 3$;

$\boxtimes$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che $\sup\{a_n : \ n \in \mathbf{N}, \ n \geq \overline{n}\} \leq 4$;

$\square$ $\inf\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\} \geq 2$;

$\square$ $\inf\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\} = 3$;

4.3 Il limite $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$

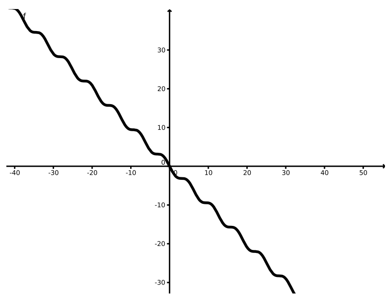
$\square$ vale $+\infty$;

$\boxtimes$ vale 1;

$\square$ non esiste;

$\square$ vale 0;

4.4 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

$\square$ è concava;

$\square$ è convessa;

$\boxtimes$ ha esattamente un flesso;

$\square$ è crescente;

4.5 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua. Allora di sicuro

- ☒ se $f'(x_0) > 0$, allora f è strettamente crescente in un intorno di x_0, mentre il viceversa può non valere;
- ☐ f non è crescente in alcun intorno di x_0;
- ☐ se f è strettamente crescente in un intorno di x_0 allora $f'(x_0) > 0$, mentre il viceversa può non valere;
- ☐ f è strettamente crescente in un intorno di x_0 $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) > 0$;

4.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \Big(\cos(3x) \Big)^{\frac{5}{x^2}} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 \arctan(\frac{2}{x}) - 2x^2.$$

4.7 Si consideri la funzione $f(x) = (1 - \cos x) \log(1 - \cos x)$.

- Se ne determini il dominio e le eventuali simmetrie e periodicità.
- Si dica se la funzione è prolungabile ad una funzione continua e/o derivabile nel punto $x = \pi$.
- Si studi la crescenza e la decrescenza della funzione e se ne determinino gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e/o assoluto.
- Si disegni il grafico di f, trascurando lo studio della concavità e della convessità.

4.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Siano $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ due successioni reali, con a_n iniettiva, $\{a_n\}_n \subset [0, 1]$, $b_n \neq 0$ per ogni n e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Si definisca una funzione $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} b_n & \textit{se } x = a_n \textit{ per qualche } n, \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Mostrare che f è discontinua in tutti i punti della successione a_n, continua in tutti gli altri *[Sugg.: si dia per buona l'informazione che* $[0, 1] \setminus \{a_n : \ n = 1, 2, 3 \ldots\}$ *è un sottinsieme denso di* $[0, 1]$*. Si noti anche che la successione* a_n *potrebbe essere a sua volta piuttosto bruttina: per esempio, i suoi punti potrebbero essere a loro volta densi in* $[0, 1]$*.]*

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Scriviamo la funzione che compare nel primo limite come $e^{\frac{2\log(\cos 2x)}{x^2}}$: ci basta calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(\cos 2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-4\sin 2x}{\cos 2x}}{2x} = -4 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = -4,$$

dove abbiamo fatto uso del teorema di l'Hôpital. Il limite richiesto vale dunque e^{-4}.

Per il secondo limite, moltiplichiamo e dividiamo per $1/x^3$ ed applichiamo il teorema di l'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(5/x) - 5/x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\frac{-5}{x^2}}{1+\frac{25}{x^2}} + \frac{5}{x^2}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-125x^4}{3x^2(25+x^2)} = -125/3.$$

Nelle prove delle tipologie B,C,D il procedimento per calcolare i limiti è sostanzialmente identico: cambiano solo i risultati numerici a causa dei diversi valori di alcuni coefficienti.

7 La funzione data è pari e 2π-periodica, per cui ci basterà studiarla in un intervallo lungo 2π. Per sfruttare la sua parità, studiamola in $(-\pi, \pi)$ (dunque, in realtà, basta studiarla in $[0, \pi)$ e poi riflettere il grafico ottenuto attraverso l'asse delle y).

Per studiare la prolungabilità della funzione in $x = \pi$, facciamo il limite di $f(x)$ per $x \to \pi$: usando la regola di l'Hôpital si vede facilmente che esso vale 0. Dunque ponendo $f(\pi) = 0$ la nostra funzione risulta continua anche in tale punto.

Per studiare la derivabilità, osserviamo che per $x \neq \pi$ si ha

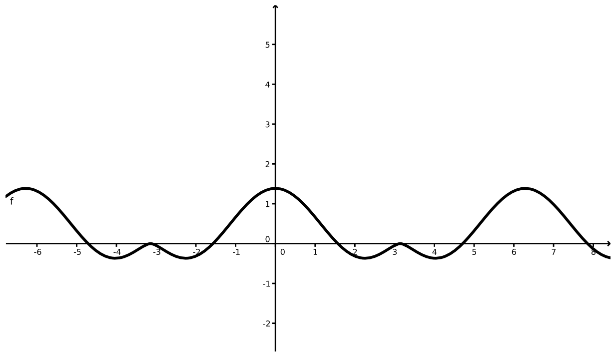
$$f'(x) = -\sin x\ (\log(1+\cos x) + 1).$$

Anche in questo caso, usando l'Hôpital si vede che $f'(x) \to 0$ per $x \to \pi$: la funzione prolungata è quindi derivabile con derivata 0.

Studiamo poi la crescenza/decrescenza della funzione in $[0, \pi)$: la derivata prima si annulla in $x = 0$ e in $x = x_1 := \arccos(e^{-1} - 1)$ (e anche per $x = \pi$ se prolunghiamo la funzione come suggerito nel precedente punto dell'esercizio). La funzione è poi decrescente in $[0, x_1]$, crescente in $[x_1, \pi)$. Visto che è pari, sarà poi crescente in $[-x_1, 0]$ e decrescente in $(-\pi, -x_1]$. Ne concludiamo che $x = 0$ è un punto di massimo, $x = x_1$ un punto di minimo (e $x = \pi$ un punto di massimo per la funzione prolungata).

Osserviamo infine che la funzione è maggiore o uguale a 0 in $[0, \pi/2]$, minore o uguale a 0 in $[\pi/2, \pi)$.

Il grafico richiesto è quindi come in figura:



Questa stessa funzione compariva anche nei compiti di tipologia C. Nei compiti di tipologia B e D, la funzione aveva un grafico identico, traslato di π lungo l'asse delle x.

8 La funzione f è chiaramente discontinua nei punti della successione a_n: si ha $f(a_n) \neq 0$, mentre in ogni intorno di a_n esistono punti di $[0,1] \setminus \{a_n : \ n \in \mathbf{N}\}$, dove la funzione vale 0.

Viceversa, sia $\overline{x} \in [0,1] \setminus \{a_n\}$, $\varepsilon > 0$. Per ipotesi $b_n \to 0$: esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu$ vale $|b_n| \leq \varepsilon$.

Se scegliamo δ sufficientemente piccolo, l'intervallo $(\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta)$ non conterrà nessuno dei punti $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$ (che sono in numero finito e distinti da $\overline{x}$): ne segue che $|f(x)| < \varepsilon$ per ogni x in tale intervallo. Per l'arbitrarietà di ε, questa è proprio la continuità di f in $\overline{x}$ (si noti infatti che $f(\overline{x}) = 0$).