Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 18/2/2011

1. Si enunci almeno una versione dell'assioma di completezza di $\mathbf{R}$, definendo succintamente gli oggetti introdotti.

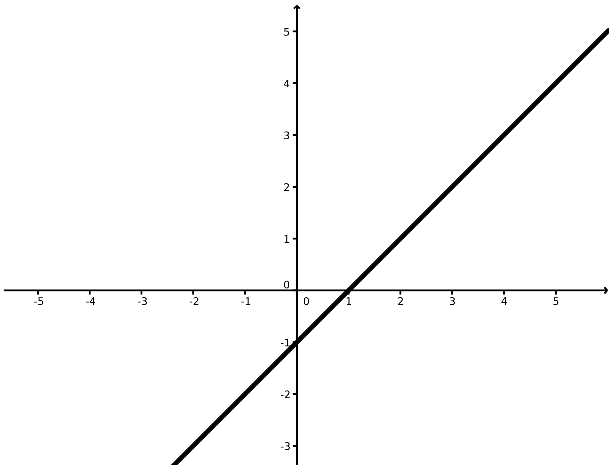
2. Il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\log(1+x)}$

- ☐ vale 1;
- ☒ vale 0;
- ☐ vale $+\infty$;
- ☐ non esiste;

3. Sia $f(x) = e^{-x^2}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ la funzione integrale di f. Allora

- ☐ $F(x)$ non esiste perché l'integrale non è esprimibile in termini di funzioni elementari;
- ☒ $F(x)$ è derivabile infinite volte;
- ☐ $F(x)$ non è continua;
- ☐ $F(x)$ è continua ma non derivabile;

5. Il grafico seguente rappresenta la derivata prima di una certa funznione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.



Allora di sicuro

- ☐ f è crescente;
- ☐ f ha esattamente un punto di flesso;
- ☒ f è convessa;
- ☐ f si annulla in almeno un punto;

4. Il limite $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+5})^{n+3}$

☒ vale e;

☐ vale e^3;

☐ vale e^2;

☐ nessuna delle risposte precedenti;

6. Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x+\frac{1}{2}\sin^2 x-1-x}{\log(1+3\sin^3 x)}.$$

7. Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx$$

e se ne calcoli se possibile il valore esatto (ammesso che esista...).

8. Si consideri la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \textit{se } x<0,\\ x^4 & \textit{se } 0\le x<1,\\ 1+\log(4x-3) & \textit{se } x\ge 1.\end{cases}$$

Si studi la funzione trovando in particolare in quali punti è continua, derivabile, derivabile due volte, e in quali intervalli è crescente, decrescente, concava o convessa... Si disegni infine un grafico il più accurato possibile di f.

9. Si studi, al variare del parametro x, la convergenza di almeno una della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tan(\frac{1}{n})(\tan x)^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{e^n}\right)[x]^n,$$

dove $[x]$ indica come al solito la parte intera di x.

Soluzioni:

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Usando gli sviluppi di Taylor si vede subito che il numeratore è $-x^3/6+o(x^3)$, mentre il denominatore è $3x^3+o(x^3)$: il limite richiesto vale dunque $-1/18$.

7 La funzione integranda è continua e limitata sull'intervallo aperto (infatti tende a $\pi/2$ per $x \to 0^+$. L'integrale è quindi convergente per il criterio del confronto (con la costante $\pi/2$).

È però possibile calcolare direttamente l'integrale calcolando una primitiva: si ponga $t = \sqrt(x)$ e si integri per parti. Si trova

$$\int \arctan(1/\sqrt{x})\, dx = x \arctan(1/\sqrt{x}) + \sqrt{x} - \arctan\sqrt{x},$$

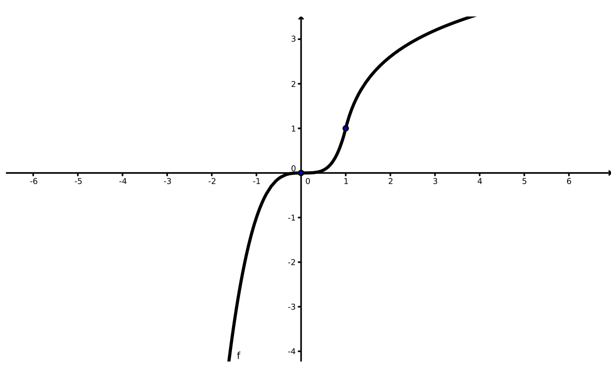
da cui si deduce che l'integrale richiesto vale 1.

8 La funzione è definita a pezzi: occorre controllare quindi la continuità e la derivabilità nei punti di raccordo $x = 0$ e $x = 1$. In $x = 0$ il limite destro ed il limite sinistro sono nulli, per cui la funzione è continua. Analogamente, in $x = 1$ il limite destro ed il limite sinistro valgono entrambi 1 e la funzione è continua.

La derivata è $3x^2$ per $x < 0$, $4x^3$ per $0 < x < 1$ e $4/(4x-3)$ per $x > 1$: anche in questo caso, limite destro e sinistro coincidono in $x = 0$ e $x = 1$, per cui la funzione è derivabile anche in questi punti. Poichè la derivata prima è sempre positiva, la funzione è ovunque crescente.

La derivata seconda è $6x$ per $x < 0$, $12x^2$ per $0 < x < 1$ e $-16/(4x-3)^2$ per $x > 1$: in questo caso, i limiti destro e sinistro coincidono in $x = 0$ ma non in $x = 1$. La funzione data ammette dunque derivata seconda in tutti i punti tranne in $x = 1$. Dal segno della derivata seconda, si vede subito che f è concava per $x < 0$ e per $x > 1$, mentre è convessa per $0 < x < 1$: $x = 0$ e $x = 1$ sono punti di flesso (il primo dei quali a tangente orizzontale).

I limiti a $\pm\infty$ sono rispettivamente $\pm\infty$, per cui il grafico della funzione è come in figura:



9 La prima serie è di potenze nella variabile $y = \tan x$: il suo raggio di convergenza si trova facilmente con il criterio del rapporto e vale 1. La serie non converge per $y = 1$ (è asintoticamente equivalente alla serie armonica), mentre converge per $y = -1$ grazie al criterio di Leibniz. Dunque l'insieme di convergenza è $-1 \leq y < 1$, che in termini della variabile x diventa $-\pi/4 + k\pi \leq x < \pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Anche la seconda serie è di potenze nella variabile $y = [x]$: il raggio di convergenza è e, come si deduce per esempio dal criterio del rapporto. Negli estremi non si ha convergenza perché il termine generale della serie non tende a 0. Dunque la condizione è $-e < y < e$, cioè $-e < [x] < e$, ossia $-2 \leq x < 3$.