

**NOTE SUL SEMINARIO
DEL PROF. VLADIMIR V. GONCHAROV
PER IL CORSO DI ANALISI FUNZIONALE
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA APPLICATA**

ANTONIO MARIGONDA

SOMMARIO. Il giorno 15 Novembre 2010, il prof Vladimir V. Goncharov dell'Università di Évora, Portogallo, ha tenuto un seminario presso l'Università di Verona da titolo *Some dual characteristics of convex sets in a Hilbert space and their applications to a time optimal control problem with a constant dynamics*. Queste note sono state pensate per fornire agli studenti presenti un'introduzione a livello informale e necessariamente molto parziale, ad alcuni strumenti presentati nel seminario.

La maggior parte del materiale che verrà presentato riguarderà, per semplicità di esposizione, gli spazi di dimensione finita, tuttavia molti dei risultati possono essere facilmente adattati al caso Hilbertiano.

Si rimanda alla bibliografia per un'introduzione maggiormente accurata all'Analisi Convessa e ai suoi metodi.

1. INSIEMI CONVESSI

Definizione 1. Sia X uno spazio vettoriale reale o complesso, $F \subseteq X$ un insieme non vuoto. Diremo che F è *convesso* se per ogni $\lambda \in [0, 1]$, $x, y \in F$ si ha $\lambda x + (1 - \lambda)y \in F$. È immediato provare che intersezioni arbitrarie di convessi sono convesse, quindi dato un insieme non vuoto S , è possibile considerare l'intersezione di tutti i sottoinsiemi convessi che lo contengono. Tale intersezione, detta $\text{co}(S)$ è il più piccolo, nel senso dell'inclusione, insieme convesso contenente S e prende il nome di *convessificato* di S . Si ha:

$$\text{co}(S) := \left\{ \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j : n \in \mathbb{N}, \lambda_j \in [0, 1], x_j \in S \text{ for all } 0 \leq j \leq n, \sum_{j=0}^n \lambda_j = 1 \right\},$$

insieme di tutte le combinazioni convesse *finite* di elementi di S .

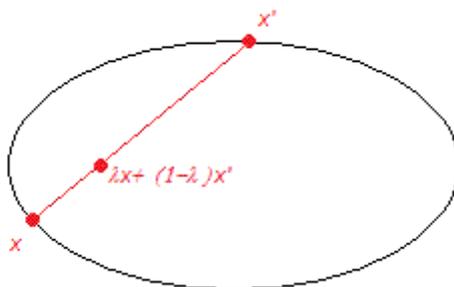


FIGURA 1. Un insieme convesso

Definizione 2. Sia H spazio di Hilbert, $F \subseteq H$ non vuoto. Definiamo la *funzione di supporto* $\sigma_F : H \rightarrow \mathbb{R}$ all'insieme F ponendo $\sigma_F(q) = \sup_{p \in F} \langle p, q \rangle_H$.

Osservazione 1. Sia $q \neq 0$. Osserviamo che dalla definizione si ha $\langle q, p \rangle \leq \sigma_F(q)$ per ogni $p \in F$, ovvero

$$F \subseteq \{p : \langle q, p \rangle \leq \sigma_F(q)\} = \left\{ p : \left\langle \frac{q}{\|q\|}, p \right\rangle \leq \sigma_F \left(\frac{q}{\|q\|} \right) \right\}$$

Se supponiamo $\|q\| = 1$, la relazione precedente diviene:

$$F \subseteq \{p : \langle q, p \rangle \leq \sigma_F(q)\}$$

per ogni $q \in H$, $\|q\| = 1$, l'insieme $\{p : \langle q, p \rangle = \sigma_F(q)\}$ è un iperpiano chiuso di H (iperpiano per la linearità e chiuso per la continuità del prodotto scalare $p \mapsto \langle q, p \rangle$). Quindi dato $q \in H$, $q \neq 0$, consideriamo gli iperpiani $H(q, \alpha) := \{p : \langle q, p \rangle = \alpha\}$ e i semispazi $H^-(q, \alpha) = \{p : \langle q, p \rangle \leq \alpha\}$. $H(q, \alpha)$ è la frontiera di $H^-(q, \alpha)$. Dato un punto di $\bar{p} \in H(q, \alpha)$, si ha $\bar{p} + \lambda q \notin H^-(q, \alpha)$ per ogni $\lambda > 0$. Quindi $H^-(q, \alpha)$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, è la famiglia di semispazi che ha per normale *esterna unitaria* $q/\|q\|$. Supponiamo $\sigma_F(q) < +\infty$. Tra tutti questi semispazi, ve n'è uno, che contiene interamente F e tale per cui esiste almeno una successione di elementi $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$ che converga ad un elemento $p \in \bar{F}$ che appartenga alla frontiera del semispazio stesso. Il valore di α per cui questo accade (naturalmente dipende da q) è proprio $\sigma_F(q)$.

Se F è chiuso convesso non vuoto, allora $H^-(q, \sigma_F(q))$ è un semispazio che ha per normale esterna q , contiene interamente F e tale per cui la frontiera $H^-(q, \sigma_F(q))$ tocca F in almeno un punto \bar{p} e prende il nome di *iperpiano di supporto* a F .

Definizione 3. Un insieme si dice *strettamente convesso* se ogni iperpiano di supporto interseca l'insieme in un unico punto.

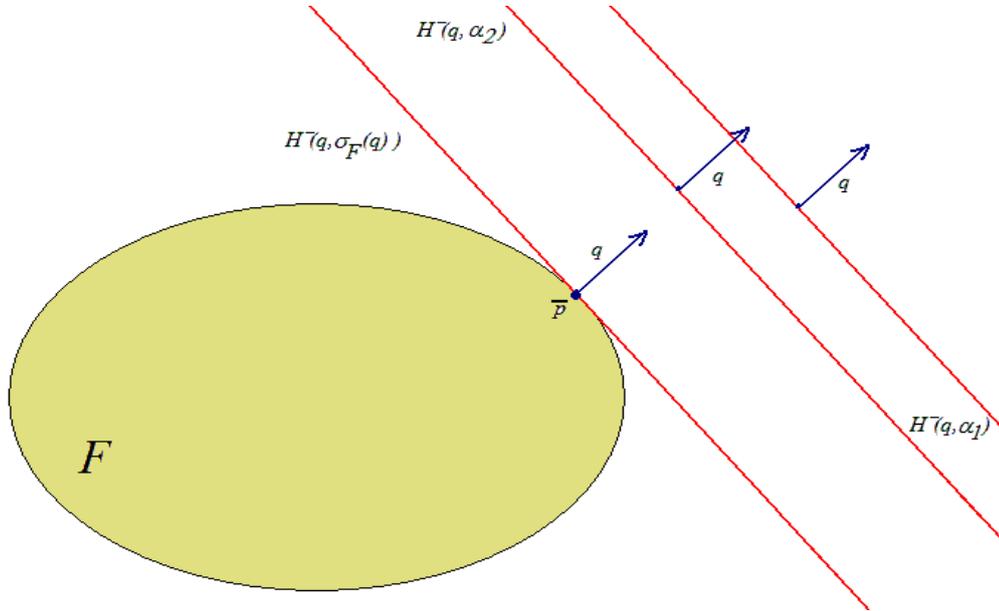


FIGURA 2. La funzione di supporto

Osservazione 2. In Figura 1 si ha $\sigma_F(q) < \alpha_2 < \alpha_1$, quindi si hanno le inclusioni dei semipiani $H^-(q, \sigma_F(q)) \subseteq H^-(q, \alpha_2) \subseteq H^-(q, \alpha_1)$. Inoltre $F \subseteq H^-(q, \sigma_F(q))$, si ha $F \cap \partial H^-(q, \sigma_F(q)) \supseteq \{\bar{p}\}$ (nel caso strettamente convesso si ha l'uguaglianza), e la normale esterna a $H^-(q, \cdot)$ è q .

Definizione 4. Sia H spazio di Hilbert, $F \subseteq H$. Definiamo la *gauge function* o *funzione di calibratura* o *funzione di Minkowski* ponendo

$$\rho_F(q) := \inf\{\lambda > 0 : q/t \in F \text{ per ogni } t \geq \lambda\},$$

(con la convenzione $\inf(\emptyset) = +\infty$). Se F è convesso chiuso non vuoto con $0 \in \text{int}(F)$ si ha

$$\rho_F(q) := \inf\{\lambda > 0 : q/\lambda \in F\} < +\infty$$

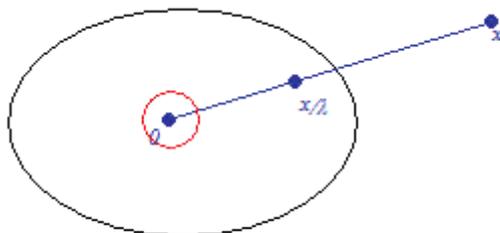


FIGURA 3. La funzione di Minkowski

Osservazione 3. Possiamo pensare alla funzione di Minkowski come ad una specie di misura della distanza di un punto q dalla frontiera di F : poiché $0 \in \text{int}(F)$, F contiene una palla centrata nell'origine, quindi senz'altro per $\lambda > 0$ sufficientemente grande si ha $q/\lambda \in F$ perché man mano che λ cresce, q/λ tende a zero. Pertanto più q è lontano da F , maggiore sarà il valore di $\rho_F(q)$. Se viceversa q è vicino all'origine, possiamo dilatare q , quindi moltiplicarlo per $1/\lambda > 1$ rimanendo dentro ad F . Preciseremo in seguito questa nozione.

Definizione 5. Sia X uno spazio vettoriale. Una *seminorma* su X è una funzione $p : X \rightarrow [0, +\infty[$ tale per cui $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ e $p(x + x') \leq p(x) + p(x')$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $x, x' \in X$. Una seminorma soddisfa sempre $p(0) = 0$, tuttavia non è detto che se $p(x) = 0$ si abbia $x = 0$. Se quest'ultima proprietà è vera allora p è una norma.

Definizione 6. X spazio vettoriale, $E \subseteq X$ si dice *assorbente* se $0 \in E$ e per ogni $x \in X$ esiste $R > 0$ tale per cui $\mu x \in E$ per ogni $\mu \in]0, R[$. In altre parole, preso un elemento di X , possiamo riscalarlo in modo tale che il segmento congiungente il riscalato e l'origine sia contenuto in E .

Un insieme si dice *bilanciato* se per ogni $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < 1$ si ha $\alpha x \in E$.

Osservazione 4. Nella Figura 4 osserviamo che:

- (1) L'insieme C è convesso e contiene 0, ma non è assorbente perché $\lambda y \in C$ solo se $\lambda = 0$, inoltre $-y \in C$ ma posto $\alpha = -1$ si ha $|\alpha| = 1$ però $\alpha y \notin C$, quindi non è bilanciato.
- (2) L'insieme C' non è convesso, però è assorbente (si vedano i punti x, x'). Tuttavia non è bilanciato $y \in C$ ma $-y \notin C$.

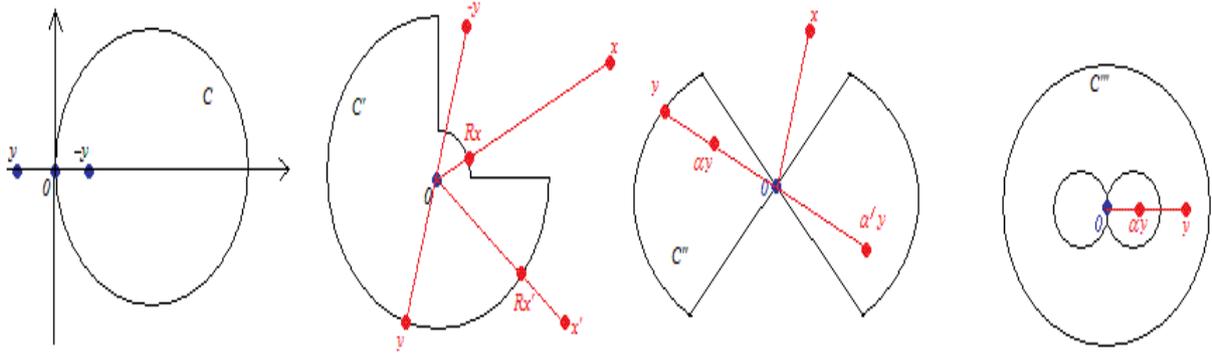


FIGURA 4. Insiemi convessi, assorbenti, bilanciati

- (3) L'insieme C''' non è né convesso, né assorbente perché $\lambda x \in C$ solo se $\lambda = 0$, tuttavia esso è bilanciato (si vedano i punti y , αy e $\alpha' y$).
- (4) L'insieme C''' è simmetrico rispetto all'origine, ma non è convesso, né è assorbente, né bilanciato perché $0 \in C'''$ tuttavia $\alpha y \notin C$.

Sussiste la seguente:

Proposizione 1. *Sia $F \subset X$ radiale, bilanciato e convesso. Allora ρ_F è una seminorma su X . Se F è limitato, allora ρ_F è una norma. Viceversa, se p è seminorma su X , allora $p = \rho_F$ dove $F := \{x \in X : p(x) < 1\}$.*

Teorema 1 (Proiezione su un chiuso convesso). *Sia H spazio di Hilbert, K sottinsieme di H chiuso convesso non vuoto. Allora per ogni $x \in H$ esiste un unico $y \in K$ tale che*

$$\|x - y\|_H = \inf_{z \in K} \{\|x - z\|_H\}.$$

In altre parole esiste un solo elemento di K che realizzi la distanza di x da K , tale elemento verrà indicato con $\pi_K(x)$ e chiamato la proiezione (ortogonale) di x su K . Dato $x \in H$, vale la seguente caratterizzazione:

$$\{\pi_K(x)\} = \{y \in K : \operatorname{Re}\langle x - y, z - y \rangle_H \leq 0 \text{ per ogni } z \in K\}.$$

La mappa $x \mapsto \pi_K(x)$ è Lipschitziana di costante 1.

Dimostrazione. Posto $d = \inf_{z \in K} \{\|x - z\|_H\}$, sia $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in K tale che $\|x - y_n\|_H \leq d + 1/n$ per $n \in \mathbb{N}$. Proviamo che $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy. Per l'identità del parallelogramma si ha:

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|_H^2 &= \|(x - y_n) - (x - y_m)\|_H^2 \\ &= 2\|x - y_n\|_H^2 + 2\|x - y_m\|_H^2 - \|2x - (y_n + y_m)\|_H^2 \\ &= 2\|x - y_n\|_H^2 + 2\|x - y_m\|_H^2 - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|_H^2 \\ &\leq 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 \end{aligned}$$

ricordando che, per convessità, $\frac{y_n + y_m}{2} \in K$. L'ultimo termine tende a 0 per $m, n \rightarrow \infty$, pertanto la successione è di Cauchy. Essendo H di Hilbert e K chiuso, si ha $y_n \rightarrow y \in K$ e

$\|x - y\|_H = \lim \|x - y_n\|_H \leq \lim(d + 1/n) = d$. Per l'unicità, supponiamo di avere $y, w \in K$ tali che $d = \|x - y\|_H = \|x - w\|_H$. Si ha $(y + w)/2 \in K$ per convessità, quindi:

$$\|y - w\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - w\|^2 - 4\left\|x - \frac{y + w}{2}\right\|_H^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0,$$

pertanto $y = w$.

Proviamo ora la caratterizzazione mediante il prodotto scalare.

Sia $y \in K$ soddisfacente a $\text{Re}(\langle x - y, y - z \rangle_H) \leq 0$ per ogni $z \in K$. Si ha:

$$0 \leq \|x - z\|_H^2 = \|x - y + y - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 - 2\text{Re}(\langle x - y, z - y \rangle_H),$$

perciò:

$$\|x - z\|^2 - \|x - y\|^2 \geq \|y - z\|^2 - 2\text{Re}(\langle x - y, z - y \rangle_H) \geq 0.$$

Viceversa, supponiamo che y sia la proiezione di x su K . Per convessità, per ogni $t \in [0, 1]$ e per ogni $z \in K$, si ha $tz + (1 - t)y \in K$, quindi:

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - (tz + (1 - t)y)\|^2 = \|x - y + t(y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + t^2\|y - z\|^2 - 2t\text{Re}(\langle x - y, z - y \rangle_H)$$

Quindi si ha:

$$\text{Re}(\langle x - y, z - y \rangle_H) \leq \frac{t}{2}\|y - z\|^2,$$

al limite per $t \rightarrow 0^+$ si ottiene quanto voluto.

Siano $x_1, x_2 \in H$, $y_1 = \pi_K(x_1)$, $y_2 = \pi_K(x_2)$. Dalla caratterizzazione con il prodotto scalare, si ottengono:

$$\langle x_1 - y_1, y_2 - y_1 \rangle \leq 0, \quad \langle x_2 - y_2, y_1 - y_2 \rangle \leq 0.$$

Sommando si ha:

$$0 \geq \langle x_1 - y_1 + y_2 - x_2, y_2 - y_1 \rangle = \langle x_1 - x_2, y_2 - y_1 \rangle + \langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle = \langle x_1 - x_2, y_2 - y_1 \rangle + \|y_2 - y_1\|^2$$

da cui

$$\|\pi_K(x_1) - \pi_K(x_2)\| \cdot \|x_1 - x_2\| \geq \|\pi_K(x_1) - \pi_K(x_2)\|^2.$$

Segue la tesi. \square

Corollario 1. *In uno spazio di Hilbert ogni chiuso convesso non vuoto ammette un elemento di norma minima.*

Dimostrazione. L'elemento di norma minima è la proiezione di 0 sull'insieme. \square

Osservazione 5. Osserviamo dalla Figura 5 i seguenti fatti:

- (1) La proiezione del punto x su K è il punto y , ovvero $y = \pi_K(x)$, infatti il prodotto scalare (in questo caso siamo sui reali) del vettore $x - y$ con i vettori $z - y$, $z' - y$ e $z'' - y$ è sempre negativo (l'angolo da essi formato è ottuso).
- (2) Il punto x' , che appartiene al segmento congiungente x e $y = \pi_K(x)$ si proietta ancora su y , ossia posto $y' = \pi_K(x')$ si ha $y = y'$.
- (3) In generale, se x' appartiene alla semiretta con origine $y = \pi_K(x)$ e passante per x , allora $\pi_K(x') = \pi_K(x)$.
- (4) Il punto x'' non può avere proiezione sul punto z''_n , altrimenti si avrebbe $\langle x'' - z''_n, y'' - z''_n \rangle > 0$ e analogamente non può avere proiezione sul punto z'_n , altrimenti si avrebbe $\langle x'' - z'_n, y'' - z'_n \rangle > 0$.

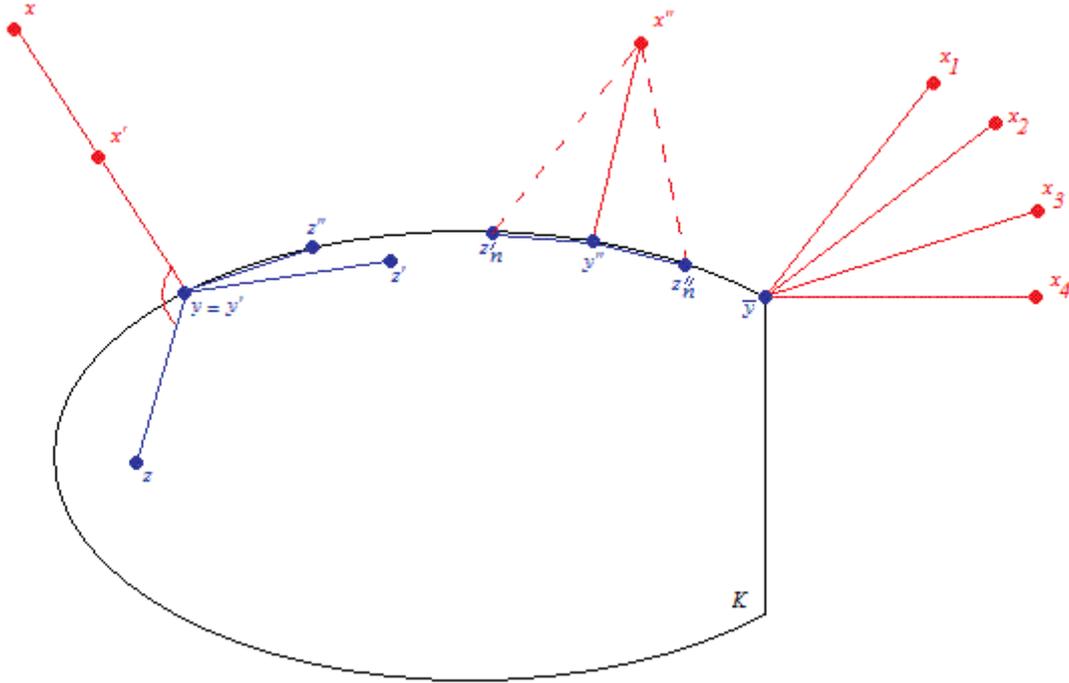


FIGURA 5. Proiezione su chiusi e convessi

- (5) Indicata con $y'' = \pi_K(x'')$, osserviamo che se il convesso ha frontiera regolare C^1 vicino a y'' , il segmento $x'' - y''$ è normale nel senso usuale a K , infatti se $z'_n, z''_n \rightarrow y$, con $z'_n, z''_n \in \partial K$, si ha che

$$\begin{cases} \langle x'' - y'', z'_n - y'' \rangle \leq 0, \\ \langle x'' - y'', z''_n - y'' \rangle \leq 0, \end{cases} \implies \begin{cases} \langle x'' - y'', \frac{z'_n - y''}{|z'_n - y''|} \rangle \leq 0, \\ \langle x'' - y'', \frac{z''_n - y''}{|z''_n - y''|} \rangle \leq 0, \end{cases}$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si ha che (a meno di sottosuccessioni):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z'_n - y''}{|z'_n - y''|} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z''_n - y''}{|z''_n - y''|} =: v$$

dove v è un vettore di norma 1 che genera il piano tangente. Inoltre si ha

$$\begin{cases} \langle x'' - y'', v \rangle \leq 0, \\ \langle x'' - y'', -v \rangle \leq 0, \end{cases}$$

e quindi $\langle x'' - y'', v \rangle = 0$, ossia $x'' - y'' \perp v$,

- (6) Ogni punto possiede un'unica proiezione su K , però più punti, anche non giacenti sulla stessa semiretta, possono proiettarsi su K : i punti x_i , $i = 1, \dots, 4$ si proiettano tutti su \bar{y} .

Teorema 2 (Mazur). *Sia X spazio normato, E insieme totalmente limitato. Allora $H := \text{co}(E)$ è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$, $U = B(0, \varepsilon)$. Poniamo $V = B(0, \varepsilon/2)$. Esiste un insieme finito E_1 tale per cui $E \subseteq E_1 + V$. Sia $H_1 = \text{co}(E_1)$. Se $E_1 = \{e_1, \dots, e_m\}$, consideriamo l'insieme

$$S := \left\{ (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m : t_i \geq 0 \text{ per ogni } i = 1 \dots m, \sum_{i=1}^m t_i = 1 \right\},$$

(simpleso m -dimensionale) e la mappa $\sigma : S \rightarrow H_1$, $\sigma(t_1, \dots, t_m) = \sum_{i=1}^m t_i e_i$. La mappa σ è continua e suriettiva, poiché S è compatto anche H_1 è compatto. Dato $x \in H$, si ha che $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ con $\alpha_i \in [0, 1]$, $x_i \in E$ per $i = 1 \dots n$ e $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Per definizione di E_1 , esistono elementi $y_i \in E_1$ tali per cui $x_i - y_i \in V$ per $i = 1, \dots, n$. Decomponiamo x nella somma $x = x' + x''$ con $x' = \sum \alpha_i y_i \in H_1$ e $x'' = \sum \alpha_i (x_i - y_i)$. Per convessità si ha che $x'' \in V$, pertanto $E \subseteq H_1 + V$. Per compattezza, esiste un insieme finito F tale che $H_1 \subseteq F + V$, da cui $E \subseteq F + V + V \subseteq F + U$. Per l'arbitrarietà di U la dimostrazione è conclusa. \square

Osservazione 6. Il teorema precedente è valido nel contesto molto più generale degli *spazi localmente convessi*: se X è uno spazio localmente convesso, prendiamo come U un intorno di 0 in X e come V un intorno convesso di 0 tale che $V + V \subseteq U$. Il seguito della dimostrazione è identico.

Corollario 2. *Se X è di Banach ed E è compatto, allora \bar{H} è compatto, perché in uno spazio di Banach i compatti sono gli insiemi chiusi e totalmente limitati.*

Definizione 7. Sia $F \subseteq H$ un convesso chiuso, $x \in F$. Definiamo il *cono normale* (nel senso dell'analisi convessa) a F in x ponendo:

$$N_F(x) := \{v \in H : \langle v, z - x \rangle \leq 0 \text{ per ogni } z \in F\}.$$

Tale insieme è chiuso e convesso. Inoltre $0 \in N_F(x)$ per ogni $x \in F$, e per ogni $\lambda \geq 0$, se $v \in N_F(x)$ allora $\lambda v \in N_F(x)$.

Osservazione 7. Osserviamo dalla Figura 5 i seguenti fatti:

- (1) È facile mostrare che se F è un sottinsieme con frontiera di classe C^1 in \mathbb{R}^n si ha che la nozione di normale nel senso dell'analisi convessa coincide con quella usuale (ovvero nel senso di Fréchet).
- (2) Nel punto y , il cono normale è la semiretta con origine in y passante per x (e per x').
- (3) Nel punto z , interno al convesso, il cono normale si riduce alla sola origine, infatti se v è elemento del cono, sia q sufficientemente vicino a z in modo tale che $q + z$ e $-q + z$ appartengano a K (possibile perché z è interno). Allora si ha $\langle v, (\pm q + z) - z \rangle \leq 0$ da cui $\langle v, q \rangle = 0$ per ogni q di una palla centrata nell'origine di raggio sufficientemente piccolo. Ciò implica $v = 0$.
- (4) Nel punto \bar{y} il cono non è una semiretta: è costituito dall'unione di tutte le semirette con origine in \bar{y} e passanti per tutti i punti che si proiettano su \bar{y} . In figura, dalla convessificazione delle semirette con origine in \bar{y} e passanti per x_1 e x_4 . In un intorno del punto \bar{y} l'insieme non è C^1 .

Definizione 8. Sia $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Definiamo:

$$\text{epi}(f) := \{(x, \alpha) \in H \times \mathbb{R} : \alpha \geq f(x)\}.$$

Diremo che f è *convessa* se $\text{epi}(f)$ è un sottinsieme convesso di $H \times \mathbb{R}$. Diremo che f è *semicontinua inferiormente* (l.s.c. o s.c.i.) se $\text{epi}(f)$ è chiuso in $H \times \mathbb{R}$. Si ha che f è convessa

se per ogni $x, y \in H$, $\lambda \in [0, 1]$ vale

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Si ha che f è s.c.i. se per ogni $x \in H$ vale

$$f(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} f(y).$$

Il *dominio* di f è l'insieme $\text{dom}(f) := \{x \in H : f(x) < +\infty\}$. f è *propria* se $\text{dom}(f) \neq \emptyset$. Poiché l'intersezione di chiusi è chiusa, e l'intersezione di convessi è convessa, l'estremo superiore puntuale di una famiglia di funzioni convesse s.c.i. è una funzione convessa s.c.i. (il cui epigrafico è l'intersezione degli epigrafici).

Definizione 9. Sia $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa propria semicontinua inferiormente, $x \in H$. Allora

$$\partial f(x) := \{\zeta \in H : (\zeta, -1) \in N_{\text{epi}(f)}(x, f(x))\}$$

è il *sottodifferenziale* (nel senso dell'analisi convessa) di f . Si ha che $\zeta \in \partial f(x)$ se e solo se $f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle$ per ogni $y \in H$. Come in precedenza per gli insiemi, se f è differenziabile in senso classico (secondo Fréchet) in x , allora $\partial f(x) = \{f'(x)\}$. Se K è un insieme convesso, allora $N_K(x) = \partial I_K(x)$ dove I_K (*funzione indicatrice*) è la funzione convessa s.c.i. propria definita da $I_K(y) = 0$ se $y \in K$ e $I_K(y) = +\infty$ se $y \notin K$.

Esercizio 1. Siano $C_1, C_2, C \subset \mathbb{R}^n$ convessi. Si provi che:

- (1) $\sigma_C(\lambda q) = \lambda \sigma_C(q)$ per ogni $\lambda > 0$
- (2) $\sigma_C(q_1 + q_2) \leq \sigma_C(q_1) + \sigma_C(q_2)$
- (3) $p \in \bar{C}$ se e solo se $p \cdot q \leq \sigma_C(q)$ per ogni $q \in \mathbb{R}^n$.
- (4) $p \in \text{int}(C)$ se e solo se $p \cdot q < \sigma_C(q)$ per ogni $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- (5) $\bar{C}_1 \subset \bar{C}_2$ se e solo se $\sigma_{C_1}(p) \leq \sigma_{C_2}(p)$ per ogni $p \in \mathbb{R}^n$, in particolare due convessi chiusi coincidono se e solo se hanno la medesima funzione di supporto.
- (6) se C è convesso e chiuso, allora

$$C = \{p \in \mathbb{R}^n : p(q) \leq \sigma_C(q) \text{ per ogni } q \in \mathbb{R}^n\}$$

- (7) la funzione $\sigma_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa.

Svolgimento.

- (1) si ha $(\lambda p)(q) = \lambda p(q) = p(\lambda q)$ per definizione, da cui la tesi.

- (2) fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $p \in C$ tale per cui $\sigma_C(q_1 + q_2) - \varepsilon \leq p(q_1 + q_2)$. Si ha

$$\sigma_C(q_1 + q_2) - \varepsilon \leq p \cdot (q_1 + q_2) = p \cdot q_1 + p \cdot q_2 \leq \sigma_C(q_1) + \sigma_C(q_2)$$

da cui la tesi per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

- (3) sia $p \in \bar{C}$. Allora esiste una successione $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in C con $p_n \rightarrow p$. Dato $q \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$p \cdot q = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \cdot q$$

perché δ_q è continua. D'altra parte $p_n \in C$ quindi $p_n \cdot q \leq \sigma_C(p)$ e quindi $p \cdot q \leq \sigma_C(p)$. Viceversa supponiamo che valga $p \cdot q \leq \sigma_C(q)$ per ogni $q \in \mathbb{R}^n$. Per assurdo supponiamo che $p \notin \bar{C}$. Ma allora per il teorema di Hahn Banach nella seconda forma geometrica esiste un iperpiano chiuso di equazione $f(x) = \alpha$ che separa il compatto $\{p\}$ dal chiuso \bar{C} in senso stretto, quindi Ovvero esistono $f \in (\mathbb{R}^n)'$, $f \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ tali che

$f(c) + \varepsilon \|f\| \leq \alpha \leq f(q) - \varepsilon \|f\|$ per ogni $c \in \bar{C}$ e quindi per ogni $c \in C$. Sia $q \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x) = q \cdot x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Ciò implica in particolare $\sigma_C(q) < p \cdot q$ assurdo.

- (4) Sia $p \in \text{int}(C)$, $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Fissiamo $0 < \varepsilon < \|q\|$. Sia $\rho > 0$ tale che $B(p, \rho) \subset C$. e $h = q/\|q\|$. Allora:

$$\sigma_C(q) \geq (p + \rho h) \cdot q = p \cdot q + \rho h \cdot q \geq p \cdot q + \rho \|q\| > p \cdot q.$$

Supponiamo ora che $p \cdot q < \sigma_C(q)$ per ogni $q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, e proviamo che $p \in \text{int}(C)$. Dal punto precedente, sappiamo già che $p \in \bar{C}$. Se $p \notin \text{int}(C)$ allora per Hahn-Banach esiste $f \in (\mathbb{R}^n)'$ tale che $f(c) < f(p)$ per ogni $c \in C$, perciò esiste $q \in \mathbb{R}^n$ tale che $c \cdot q < p \cdot q$ per ogni $c \in C$ quindi $\sigma_C(p) \leq p \cdot q$, ma ciò è assurdo.

- (5) la necessità della condizione è ovvia. Proviamo la sufficienza, ovvero che se $\sigma_{C_1}(q) \leq \sigma_{C_2}(q)$ per ogni $q \in \mathbb{R}^n$ si ha $\bar{C}_1 \subset \bar{C}_2$. Supponiamo non sia vero, allora esiste $p \in \bar{C}_1 \setminus \bar{C}_2$ quindi esiste un funzionale continuo $f \in (\mathbb{R}^n)'$, e quindi $q \in \mathbb{R}^n$ che separa in senso stretto il compatto $\{p\}$ dal chiuso \bar{C}_2 , ovvero $\sup_{c \in \bar{C}_2} c \cdot q < p \cdot q$ quindi $\sigma_{C_2}(q) < \sigma_{C_1}(q)$, il che è assurdo.
- (6) ovvio dai precedenti.
- (7) Siano $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $p \in C$ tale che

$$p(tq_1 + (1-t)q_2) \geq \sigma_C(tq_1 + (1-t)q_2) - \varepsilon.$$

Allora

$$\begin{aligned} \sigma_C(tq_1 + (1-t)q_2) - \varepsilon &\leq p \cdot (tq_1 + (1-t)q_2) = tp \cdot q_1 + (1-t)p \cdot q_2 \\ &\leq t\sigma_C(q_1) + (1-t)\sigma_C(q_2). \end{aligned}$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ si conclude.

Esercizio 2. Si provi che se $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione semicontinua inferiormente e soddisfacente

- (1) $w(\lambda q) = \lambda w(q)$ per ogni $\lambda > 0$, $q \in \mathbb{R}^n$,
(2) $w(q_1 + q_2) \leq w(q_1) + w(q_2)$ per ogni $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$,

allora esiste un unico convesso chiuso $C \subset \mathbb{R}^n$ tale che $w = \sigma_C$ e tale convesso è

$$C = \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v \leq w(v) \text{ per ogni } v \in \mathbb{R}^n\}$$

Svolgimento. Proviamo che w è convessa, per ogni $t \in [0, 1]$, $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$w(tq_1 + (1-t)q_2) \leq w(tq_1) + w((1-t)q_2) = tw(q_1) + (1-t)w(q_2)$$

Poiché w non è identicamente $-\infty$, esiste $(q, \alpha) \notin \text{epi}(w)$ e quindi una funzione affine che separa strettamente il compatto $\{(q, \alpha)\}$ dal chiuso $\text{epi}(w)$ (tale insieme è chiuso perché w è s.c.i.). In particolare si ha che esistono $p \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ tali per cui $p \cdot q - r \leq w(q)$ per ogni $q \in \mathbb{R}^n$. Poiché $w(0) = 0$, si ha $r \geq 0$. Per l'omogeneità, sostituendo tq a q si ha anche $p \cdot q - r/t \leq w(q)$. Passando al limite per $t \rightarrow \infty$ si ha $p \cdot q \leq w(q)$ per ogni $q \in \mathbb{R}^n$.

Ciò implica che se $p \cdot q - r \leq w(q)$ per ogni $q \in \mathbb{R}^n$ allora $p \cdot q \leq w(q)$ per ogni $q \in \mathbb{R}^n$, pertanto posto

$$\begin{aligned} A &:= \{(p, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : p \cdot v - r \leq w(v) \forall v \in \mathbb{R}^n\} \\ B &:= \{p \in \mathbb{R}^n : p \cdot v \leq w(v) \forall v \in \mathbb{R}^n\} = C, \end{aligned}$$

vale

$$\sup\{p \cdot q - r : (p, r) \in A\} = \sup\{p \cdot q : p \in B\}.$$

Per definizione si ha $\sigma_C(q) = \sup\{p \cdot q : p \cdot v \leq w(v) \text{ per ogni } v \in \mathbb{R}^n\}$. Rimane da provare che

$$w(q) = \sup\{p \cdot q - r : (p, r) \in A\}.$$

Chiamiamo il membro di destra $\tilde{w}(q)$. Sicuramente $\tilde{w}(\cdot)$ è convessa e semicontinua inferiormente, perché il suo epigrafico è l'intersezione degli epigrafici delle funzioni lineari (dunque convesse, e continue perché siamo in dimensione finita) $\{p \cdot v - r \leq w(v) \text{ per ogni } v \in \mathbb{R}^n\}$. Tale epigrafico è chiuso perché intersezione di chiusi. Si ha inoltre $\tilde{w}(q) \leq w(q)$. Supponiamo per assurdo che la disuguaglianza sia stretta, allora esiste $\tilde{w}(q) < z < w(q)$, in particolare esiste una funzione lineare che separa il punto (q, z) da $\text{epi}(w)$ strettamente, quindi tale per cui $F(q, z) < \alpha < F(\text{epi}(w))$, ed esistono $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ tali per cui $F(x, s) = ax + bs$. Si deve avere $b \neq 0$, altrimenti la disuguaglianza non vale perché $F(q, z) = F(q, w(q))$. Consideriamo la funzione lineare $g(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{\alpha}{b}$. Si ha

$$g(q) = \frac{-aq + \alpha}{b} > z$$

(perché $aq + bz < \alpha$), inoltre per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$g(v) = \frac{-av + \alpha}{b} < w(v)$$

perché $av + bw(v) > \alpha$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Quindi g è una funzione affine che minora w , ma allora $(-a/b, \alpha/b) \in A$, quindi $\tilde{w}(q) \geq g(q) > z$, assurdo perché $\tilde{w}(q) < z$. L'unicità segue dal fatto che due convessi chiusi con la medesima funzione di supporto coincidono.

Esercizio 3. Sia $S \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto. Si provi che $\sigma_S(p) = \sigma_{\overline{\text{co}(S)}}(p)$ per ogni $p \in \mathbb{R}^n$.

Svolgimento. La disuguaglianza $\sigma_S(p) \leq \sigma_{\overline{\text{co}(S)}}(p)$ è ovvia.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste $p \in \overline{\text{co}(S)}$ tale per cui $\sigma_{\overline{\text{co}(S)}}(q) \leq p \cdot q + \varepsilon$. Esiste una successione $\{p_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ di punti di $\text{co}(S)$ tale per cui $p_N \rightarrow p$, e quindi esistono $n_N > 0$, $\alpha_1^N, \dots, \alpha_{n_N}^N$ e $x_1^N, \dots, x_{n_N}^N \in S$ tali per cui

$$p_N = \sum_{j=1}^{n_N} \alpha_j^N x_j^N$$

Per N sufficientemente grande si ha $p \cdot q \leq p_N \cdot q + \varepsilon$, quindi

$$\begin{aligned} \sigma_{\overline{\text{co}(S)}}(q) &\leq p \cdot q + \varepsilon \leq p_N \cdot q + 2\varepsilon \leq \left(\sum_{j=1}^{n_N} \alpha_j^N x_j^N \right) \cdot q + 2\varepsilon = \sum_{j=1}^{n_N} \alpha_j^N x_j^N \cdot q + 2\varepsilon \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_N} \alpha_j^N \sigma_S(q) + 2\varepsilon \leq \sigma_S(q) \sum_{j=1}^{n_N} \alpha_j^N + 2\varepsilon = \sigma_S(q) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Si conclude per l'arbitrarietà di $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Esercizio 4. Sia F chiuso convesso non vuoto di uno spazio di Hilbert (reale) H e siano $p \in H$, $\bar{q} \in F$. Allora $p \in N_F(\bar{q})$ se e solo se $\sigma_F(p) = \langle p, \bar{q} \rangle$.

Svolgimento. Supponiamo $p \in N_F(\bar{q})$. Per definizione di cono normale si ha $\langle p, q - \bar{q} \rangle \leq 0$ per ogni $q \in F$, da cui $\langle p, q \rangle \leq \langle p, \bar{q} \rangle$ per ogni $q \in F$, quindi

$$\sigma_F(p) = \sup_{q \in F} \langle p, q \rangle \leq \langle p, \bar{q} \rangle \leq \sup_{q \in F} \langle p, q \rangle = \sigma_F(p),$$

per cui vale l'uguaglianza.

Supponiamo viceversa che $\sigma_F(p) = \langle p, \bar{q} \rangle$ per qualche $\bar{q} \in F$. Allora si ha

$$\langle p, q \rangle \leq \sigma_F(p) = \sup_{q \in F} \langle p, q \rangle = \langle p, \bar{q} \rangle$$

per ogni $q \in F$ si ricava quindi $\langle p, q - \bar{q} \rangle \leq 0$ per ogni $q \in F$ e quindi per definizione $p \in N_F(\bar{q})$.

Osservazione 8. In Figura 1 si ha $\sigma_F(q) = \langle \bar{p}, q \rangle$ e $q \in N_F(\bar{p})$.

Definizione 10. Sia $F \subseteq H$ un insieme chiuso convesso limitato con $0 \in \text{int}(F)$. Definiamo l'insieme *polare* di F ponendo:

$$F^0 = \{\xi^* \in H : \sigma_F(\xi^*) \leq 1\}$$

Poiché σ_F è convessa, l'insieme F^0 è convesso.

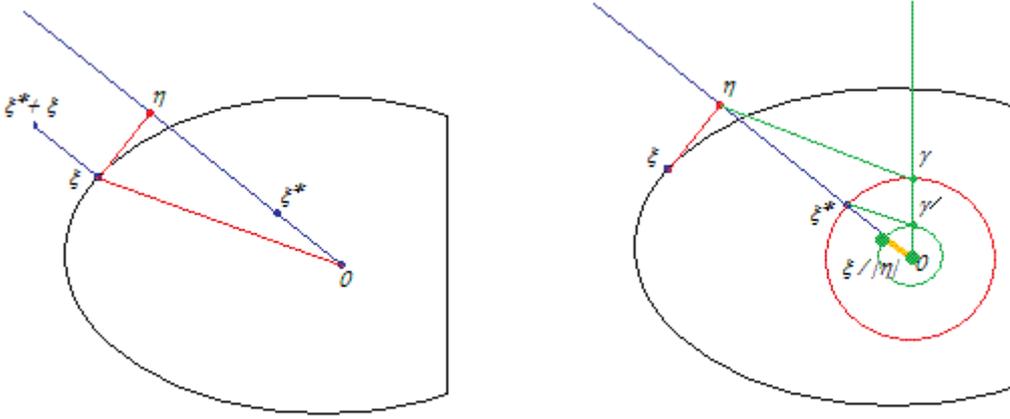


FIGURA 6. Costruzione del polare, parte prima

Osservazione 9. Una strategia per disegnare l'insieme polare può essere la seguente: dato $\xi^* \in H$ con $|\xi^*| = 1$, consideriamo l'insieme $S(\xi^*)$ dei punti $\xi \in F$ tale per cui ξ^* è normale a F in ξ ossia

$$S(\xi^*) = \{\xi \in F : \xi^* \in N_F(\xi)\}.$$

Si ha che $\sigma_F(\xi^*) = \langle \xi^*, \xi \rangle$ se e solo se $\xi \in S$. A questo punto consideriamo la proiezione η di ξ sulla semiretta con origine in 0 parallela e concorde a ξ^* . Si ha quindi che $\rho \xi^* \in F^0$ per ogni $0 \leq \rho \leq 1/|\eta|$. In Figura 6 osserviamo la strategia: a sinistra, dato ξ^* di norma 1, l'insieme dei punti dove ξ^* è normale a F è costituito dal solo punto ξ , quindi $S(\xi^*) = \{\xi\}$. Proiettiamo ξ sulla semiretta con origine in 0 e passante per ξ^* ottenendo η . Nella figura di destra, osserviamo come costruire il segmento congiungente 0 a $\xi^*/|\eta|$. Scegliamo arbitrariamente sulla circonferenza centrata in 0 di raggio 1 un punto $\gamma \neq \pm \xi^*$ e conduciamo attraverso di esso la semiretta con origine in 0 . Consideriamo la retta congiungente η e γ . Tracciamo la parallela a tale retta passante per ξ^* . Essa interseca il segmento congiungente 0 e γ in un punto γ' . Per similitudine dei triangoli di vertici $0, \eta, \gamma$ e $0, \xi^*, \gamma'$ si ha che $|\eta| : |\xi^*| = |\gamma| : |\gamma'|$ da cui per costruzione si ha $|\gamma'| = 1/|\eta|$. A questo punto, si consideri la palla centrata nell'origine e di raggio $|\gamma'|$. Essa interseca la semiretta con origine in 0 e passante per ξ^* in un segmento. Tale segmento

è interamente contenuto in F^0 , e se $\xi_1^* \in F^0$ è parallelo a ξ^* , allora ξ_1^* deve essere un punto di quel segmento.

Esercizio 5. Si provi che se $F = \overline{B(0,1)}$ allora $F^0 = F$.

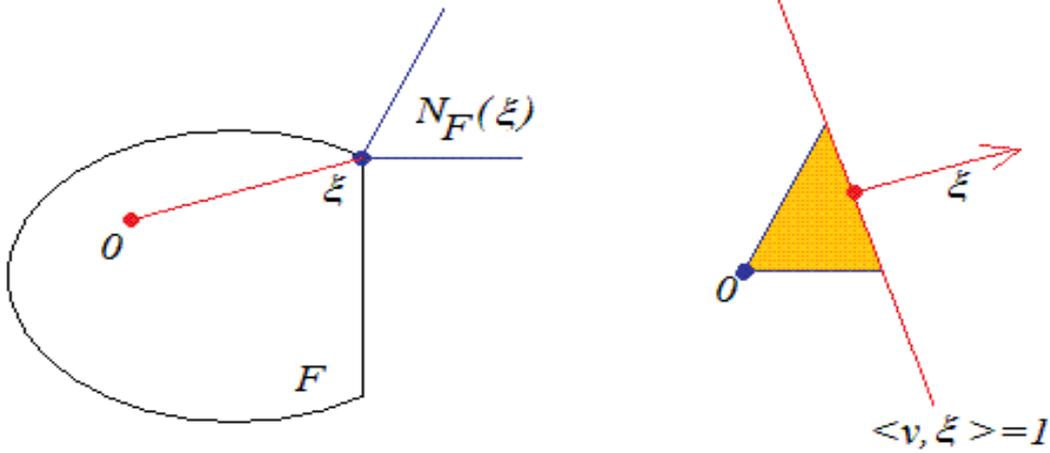


FIGURA 7. Costruzione del polare, parte seconda

Osservazione 10. Supponiamo che l'insieme F non sia regolare. Allora esiste un punto $\xi \in F$ che ammette almeno due iperpiani di supporto distinti: quindi esistono almeno due normali $\xi_1^*, \xi_2^* \in N_F(\xi)$ linearmente indipendenti. Se $\xi^* \in N_F(\xi)$, allora $\tilde{\xi}^* = \xi^*/\sigma_F(\xi^*) \in N_F(\xi)$ e

$$\langle \tilde{\xi}^*, \xi \rangle = 1.$$

Si ha inoltre

$$F^0 \subseteq \{\xi^* : \langle \tilde{\xi}^*, \xi \rangle \leq 1\}.$$

Quindi l'iperpiano $\{v \in H : \langle v, \xi \rangle = 1\}$ interseca F^0 in più di un punto e il semispazio $\{\xi^* : \langle \tilde{\xi}^*, \xi \rangle \leq 1\}$ contiene interamente F^0 . Ma allora $\{v \in H : \langle v, \xi \rangle = 1\}$ è iperpiano di supporto a F^0 cui appartengono punti distinti di F^0 , quindi F^0 non è strettamente convesso. In Figura 7, osserviamo la strategia. Nel punto ξ l'insieme non è regolare, pertanto il cono $N_F(\xi)$ contiene direzioni linearmente indipendenti. Consideriamo l'iperpiano $\{v : \langle v, \xi \rangle = 1\}$ ortogonale a ξ e il semispazio da esso delimitato che abbia ξ come normale esterna. La regione contenuta in $N_F(\xi)$ e in tale semispazio è tutta contenuta nel polare F^0 .

Osservazione 11. Supponiamo che l'insieme F non sia strettamente convesso. In tal caso esiste $\xi^* \in H$ tale che l'iperpiano ortogonale a ξ^* tocca F in due punti distinti $\xi_1, \xi_2 \in F$. I vettori ξ_1, ξ_2 sono linearmente indipendenti: se non lo fossero, si avrebbe $\xi_1 = \lambda \xi_2$ e quindi la retta $t \mapsto t\xi_1$, che passa per l'origine, intersecherebbe F in punti di frontiera. Ma allora F dovrebbe essere interamente contenuto in uno dei due semispazi delimitati da tale retta e quindi $0 \notin \text{int}(F)$. Si ha $\xi^* \in N_F(\xi_1) \cap N_F(\xi_2)$ e $\sigma_F(\xi^*) = \langle \xi^*, \xi_1 \rangle = \langle \xi^*, \xi_2 \rangle$. Quindi $\xi^*/\sigma_F(\xi^*) \in F^0$ ed è un punto di frontiera, infatti $\lambda \xi^* \notin F^0$ se $\lambda > 1/\sigma_F(\xi^*)$. I semispazi $\{v : \langle v, \xi_i \rangle \leq 1\}$, $i = 1, 2$ contengono entrambi F^0 e toccano F^0 in $\xi^*/\sigma_F(\xi^*)$, quindi il cono normale a F^0 in $\xi^*/\sigma_F(\xi^*)$ contiene due direzioni linearmente indipendenti. e quindi l'insieme F^0 non può essere regolare attorno a ξ^* .

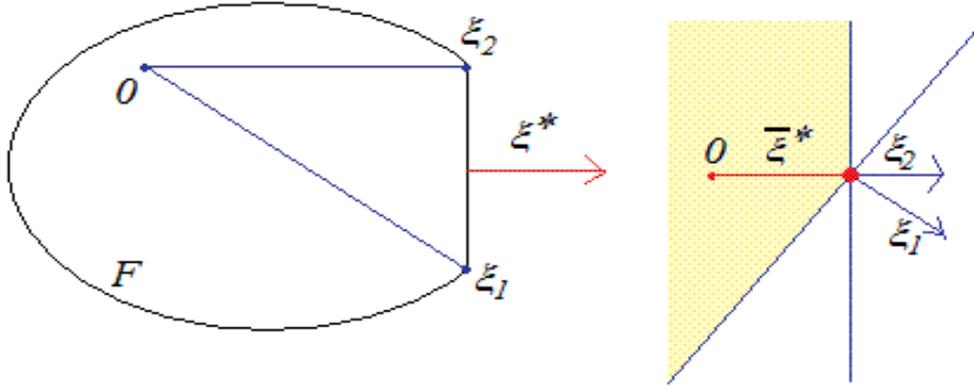


FIGURA 8. Costruzione del polare, parte terza

In Figura 8, osserviamo la strategia. L'iperpiano di supporto ortogonale a ξ^* tocca F in ξ_1 e ξ_2 . Consideriamo gli iperpiani passanti per $\bar{\xi}^* := \xi^*/\sigma_F(\xi^*)$ e ortogonali a ξ_1 e ξ_2 . L'insieme F^0 è contenuto nell'intersezione dei semispazi che hanno tali iperpiani come frontiera e normale esterna ξ_1 e ξ_2 .

Definizione 11. Definiamo la *mappa di dualità* $\mathfrak{I}_F : \partial F^0 \rightarrow \partial F$ ponendo

$$\mathfrak{I}_F(\xi^*) = \{\xi \in \partial F : \langle \xi^*, \xi \rangle_H = 1\}$$

Si può mostrare che $\mathfrak{I}_F(\xi^*) = \partial \rho_{F^0}(\xi^*) \neq \emptyset$ per ogni $\xi^* \in \partial F^0$.

Proposizione 2. Diremo che F è strettamente convesso in un punto ξ se per ogni vettore $\xi^* \in \mathfrak{I}_F^{-1}(\xi)$ vale $\mathfrak{I}_F(\xi^*) = \{\xi\}$.

Osservazione 12. La caratterizzazione data è coerente con quella introdotta in precedenza. Se infatti $\mathfrak{I}_F(\xi^*) = \{\xi\}$, allora esiste un unico punto $\xi \in F$ tale per cui $\langle \xi^*, \xi \rangle_H = 1$. Quindi l'iperpiano $H := \{v : \langle \xi^*, v \rangle = 1\}$ tocca F in un unico punto, ma allora ξ è sulla frontiera di F e F si trova in uno dei due semispazi definiti da H . Quindi H è iperpiano di supporto a F e tocca F in un unico punto. Quindi se F è strettamente convesso, allora è strettamente convesso in ogni suo punto.

Definizione 12. Sia $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa s.c.i. propria. Definiamo la sua *convessa coniugata* o *trasformata di Legendre-Fenchel* $f^* : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ponendo

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in H} \{\langle x^*, x \rangle - f(x)\}.$$

Si prova che f^* è una funzione convessa, s.c.i. e propria, e che $(f^*)^* = f$. Dati ξ, ξ^* , si ha che $\xi \in \partial f^*(\xi^*)$ se e solo se $\xi^* \in \partial f(\xi)$.

Osservazione 13. Se F è chiuso, convesso con $0 \in \text{int}(F)$ sussistono le seguenti relazioni $I_F^*(q) = \sigma_F(q)$ e $\sigma_F^*(q) = I_C(q)$.

Osservazione 14. Dato un insieme non convesso, la nozione di cono normale nel senso dell'analisi convessa risulta inefficace, e in molti casi tale cono sarà sempre degenerare (ovvero ridotto al solo $\{0\}$). Definiremo ora un cono normale maggiormente utile nei casi non convessi, che nel caso convesso coincida con il cono dell'analisi convessa.

Definizione 13. Sia $K \subseteq H$ un insieme chiuso non vuoto, $x \in K$, $v \in H$. Diremo che v è normale prossimale a K in x , e scriveremo $v \in N_K^P(x)$ se esiste $\sigma \geq 0$ tale per cui per ogni $y \in K$ valga:

$$\langle v, y - x \rangle \leq \sigma \|v\| \cdot \|x - y\|^2.$$

Osservazione 15. Per capire il significato geometrico di tale definizione, e i suoi legami con il cono convesso, supponiamo $v \neq 0$ (altrimenti tutto è banale) e consideriamo la palla chiusa centrata in $x + \frac{1}{2\sigma} \frac{v}{|v|}$ e di raggio $1/2\sigma$, ovvero $B := B\left(x + \frac{1}{2\sigma} \frac{v}{|v|}, \frac{1}{2\sigma}\right)$. Si ha ovviamente che $x \in B$. Sia $y \in K$, $y \neq x$. Supponiamo che $y \notin B$. In tal caso la distanza di y dal centro di B è maggiore del raggio di B , ovvero:

$$\left|y - x + \sigma \frac{v}{|v|}\right|^2 \geq \frac{1}{4\sigma^2}$$

sviluppando il quadrato si ha:

$$|y - x|^2 + 2\left\langle \frac{1}{2\sigma} \frac{v}{|v|}, y - x \right\rangle + \frac{1}{4\sigma^2} \geq \frac{1}{4\sigma^2}$$

e riarrangiando i termini si ha

$$\langle v, y - x \rangle \leq \sigma \|v\| \cdot \|x - y\|^2.$$

Pertanto si ha che v è normale prossimale solo se esiste un numero positivo σ tale per cui la sfera centrata in $x + \sigma \frac{v}{|v|}$ di raggio σ tocca l'insieme solo nel punto x . Si dirà che tale sfera realizza la normale prossimale v con raggio $1/2\sigma$ e anche che tale sfera è tangente in x in direzione v .

Nel caso convesso, possiamo prendere il limite per $\sigma \rightarrow 0$ ovvero il raggio tendente all'infinito. Infatti se v è normale nel senso convesso, il centro di ogni palla centrata sulla semiretta uscente da x in direzione v si proietta sempre in modo unico su K nel punto x e non esistono punti di K più vicini. Quindi tale normale è anche prossimale e $1/2\sigma$ può essere arbitrariamente grande, quindi si può passare al limite per $\sigma \rightarrow 0^+$ riottenendo così il cono dell'analisi convessa.

Definizione 14. Sia $K \subseteq H$ un insieme chiuso non vuoto, $\varphi : K \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione continua. Diremo che K è φ -convesso se per ogni $x, y \in K$, $v \in N_K^P(x)$ vale:

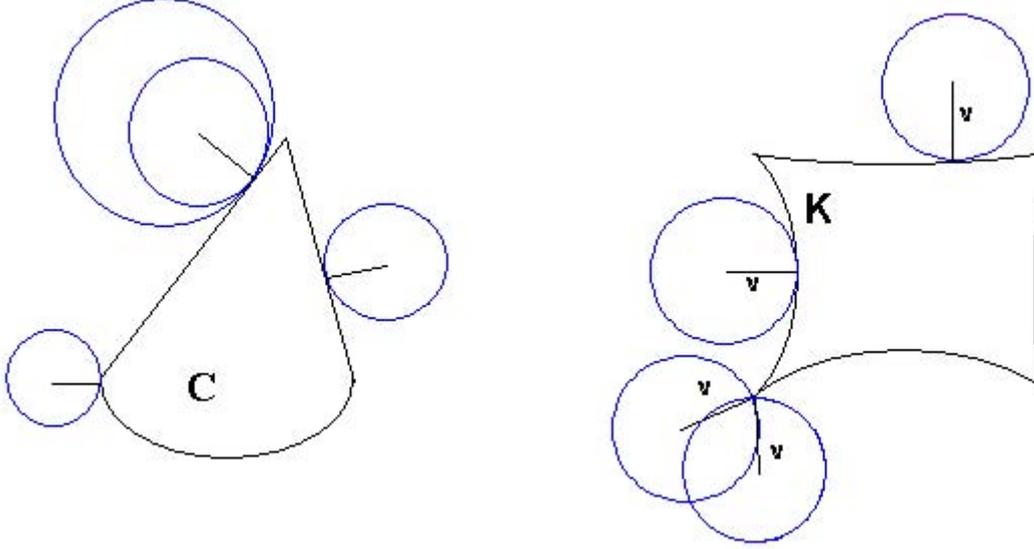
$$\langle v, y - x \rangle \leq \varphi(x) \|v\| \cdot \|x - y\|^2.$$

Sia $\varphi_0 \geq 0$. Diremo che K è φ_0 -convesso se è φ -convesso con $\varphi \equiv \varphi_0$ costante.

Osservazione 16. Gli insimi φ -convessi sono stati studiati, tra gli altri, da Federer (in dimensione finita), Degiovanni- Marino-Tosques, Canino, Clarke-Stern-Wolenski, Poliquin-Rockafellar-Thibault, Górniewicz, sotto diversi nomi.

Osservazione 17. Gli insimi φ -convessi possono essere caratterizzati anche da ciascuna delle seguenti proprietà equivalenti:

- (1) Esiste un intorno in cui la proiezione è unica.
- (2) Esiste un intorno in cui la distanza dall'insieme è $C^{1,1}$.
- (3) Ogni normale prossimale è realizzata da una palla di raggio localmente costante. Si prova inoltre che molte nozioni di coni dell'analisi nonsmooth coincidono. Parlando alla buona, un insieme φ -convesso, visto sufficientemente da vicino, assomiglia molto ad un insieme convesso

FIGURA 9. Convessità e φ -convessità

In un insieme φ -convesso, come già in un insieme convesso, possono esservi angoli, ma tali angoli debbono puntare *verso l'esterno*.

Osservazione 18. In modo analogo a quanto fatto per funzioni convesse e sottodifferenziale dell'analisi convessa, è possibile definire un sottodifferenziale *prossimale* utilizzando il cono prossimale in luogo di quello dell'analisi convessa, e studiare le funzioni con epigrafico φ -convesso. Esse ereditano numerose proprietà interessanti e confrontabili con quelle delle funzioni convesse. Una funzione può essere C^1 senza avere epigrafico φ -convesso: si consideri ad esempio $f(x) = -x^{3/2}$.

Definizione 15. Sia $F \subseteq H$ un insieme chiuso, convesso non vuoto con $0 \in \text{int}(F)$, detto *dinamica*, $C \subseteq H$ un insieme chiuso detto *bersaglio*. Definiamo la seguente funzione per ogni $x \in H$ (vale $\inf \emptyset = +\infty$):

$$\mathfrak{T}_C^F(x) := \inf\{\bar{t} > 0 : \text{esiste una curva assolutamente continua } \gamma_x : [0, \bar{t}] \rightarrow H \\ \text{con } \gamma_x(0) = x, \gamma_x(\bar{t}) \in C, \dot{\gamma}_x(t) \in F \text{ per q.o. } t\}.$$

La funzione \mathfrak{T}_C^F è chiamata *tempo minimo* per raggiungere C partendo da x seguendo la dinamica F . L'insieme $\pi_C^F(x)$ dei punti di C raggiunti in tempo minimo a partire da x (può essere vuoto) prende il nome di *proiezione in tempo minimo*.

Osservazione 19. Lo studio della regolarità del tempo minimo è centrale nella Teoria del Controllo, e proprietà di regolarità del tempo minimo dipendono in modo decisivo da proprietà di regolarità di F e C ed è strettamente legato al numero di elementi contenuti in $\pi_C^F(x)$ al variare di x .

Proposizione 3. *Sussiste la seguente disuguaglianza (di Jensen):* Sia Ω uno spazio di misura, μ una misura su Ω , \mathcal{S} la σ -algebra dei misurabili di Ω . Supponiamo $\mu(\Omega) = 1$ e sia $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $L^1(\Omega, \mu)$. Supponiamo che $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione convessa, allora

$$\varphi\left(\int_{\Omega} g d\mu\right) \leq \int_{\Omega} \varphi \circ g d\mu$$

Osservazione 20. Nel nostro caso, data una curva $\gamma_x : [0, t_x] \rightarrow H$ con $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(t_x) = y \in C$. Osserviamo che l'intervallo $[0, t_x]$ ha μ -misura 1 se $\mu = \frac{dx}{t_x}$.

Se le velocità non giacciono q.o. in F la curva non è ammissibile, quindi aggiungiamo la funzione indicatrice di F : se la traiettoria non è ammissibile, la funzione da minimizzare risulterà $+\infty$.

$$\int_0^{t_x} (t_x + I_F(\dot{\gamma}_x(t))) \frac{dt}{t_x} \geq t_x + I_F \left(\int_0^{t_x} \dot{\gamma}_x(t) \frac{dt}{t_x} \right) = t_x + I_F \left(\frac{y - x}{t_x} \right)$$

Per minimizzare tale funzione, si dovrà avere che

$$t_x = \inf\{\alpha > 0 : (y - x)/\alpha \in F\}$$

quindi il tempo minimo è proprio $\mathfrak{T}(x) = \min\{\rho_F(y - x) : y \in C\}$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, and P. R. Wolenski, *Nonsmooth analysis and control theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 178, Springer-Verlag, New York, 1998. MR1488695 (99a:49001)
- [2] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, 2nd ed., Classics in Applied Mathematics, vol. 5, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1990. MR1058436 (91e:49001)
- [3] Ivar Ekeland and Roger Témam, *Convex analysis and variational problems*, Corrected reprint of the 1976 English edition, Classics in Applied Mathematics, vol. 28, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999. Translated from the French. MR1727362 (2000j:49001)
- [4] Boris S. Mordukhovich, *Variational analysis and generalized differentiation. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 330, Springer-Verlag, Berlin, 2006. Basic theory. MR2191744 (2007b:49003a)
- [5] ———, *Variational analysis and generalized differentiation. II*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 331, Springer-Verlag, Berlin, 2006. Applications. MR2191745 (2007b:49003b)
- [6] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970. MR0274683 (43 #445)
- [7] R. Tyrrell Rockafellar and Roger J.-B. Wets, *Variational analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 317, Springer-Verlag, Berlin, 1998. MR1491362 (98m:49001)

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA, UNIVERSITÀ DI VERONA
 STRADA LE GRAZIE 15 - I-37134 VERONA, ITALY.
E-mail address: antonio.marigonda@univr.it