ESERCITAZIONI DEL CORSO DI ANALISI FUNZIONALE
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA
A.A. 2009 - 2010

ANTONIO MARIGONDA

Indice

1. Esercitazione del giorno 9 ottobre 2009 (2 ore): l'insieme di Cantor

Definizione 1. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definiamo la seguente funzione:

$$\mathcal{C}([a,b]) = \left[a, a+\frac{b-a}{3}\right] \cup \left[a+\frac{2}{3}(b-a), b\right]$$

$\mathcal{C}$ è una funzione che opera sull'insieme degli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ e restituisce un'unione di due intervalli chiusi e limitati ottenuta dividendo l'intervallo di partenza in tre parti uguali ed eliminando l'intervallo centrale privato degli estremi.

Definizione 2. Definiamo per induzione una successione di insiemi e di collezioni di intervalli in questo modo: poniamo $\mathcal{I}_1^{(0)} = [0,1]$ e $\mathcal{F}_0 := \{I_1^{(0)}\}$. Supposto di aver definito la famiglia $\mathcal{F}_{k-1}$ costituita da 2^{k-1} intervalli, definiamo 2^k intervalli ponendo per $j = 1, ..., 2^{k-1}$:

$$\mathcal{C}(\mathcal{I}_j^{(k-1)}) = \mathcal{I}_{2j-1}^{(k)} \cup I_{2j}^{(k)}$$

e consideriamo la nuova famiglia $\mathcal{F}_k := \{I_j^{(k)} : 1 \leq j \leq 2^k\}$.
Osserviamo che tutti gli intervalli della famiglia $\mathcal{F}_k$ hanno lunghezza $1/3^k$. Sia ora

$$C_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} \mathcal{I}_j^{(k)} = \bigcup_{I \in \mathcal{F}_k} I$$

L'*insieme ternario di Cantor* C è definito come $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq 2^k$ indicheremo con $a_j^{(k)}$ e $b_j^{(k)}$ gli estremi dell'intervallo $I_j^{(k)}$, ossia $I_j^{(k)} = \left[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]$.

Diamo ora alcune proprietà dell'insieme di Cantor, il lettore è incoraggiato a farsi qualche disegno per visualizzare meglio i concetti:

Proposizione 1.

(1) *rappresentazione per ricorrenza degli estremi di $I_j^{(k)}$:*

$$a_{2j-1}^{(k)} = a_j^{(k-1)}, \qquad b_{2j-1}^{(k)} = a_j^{(k-1)} + \frac{1}{3^k} = a_j^{(k-1)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i},$$

$$a_{2j}^{(k)} = a_j^{(k-1)} + \frac{2}{3^k}, \qquad b_{2j} = b_j^{(k-1)}.$$

(2) *si ha che $a_j^{(k)}, b_j^{(k)} \in C$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq 2^k$, in altre parole gli estremi che compaiono durante l'applicazione di $\mathcal{C}$ appartengono tutti all'insieme di Cantor.*

(3) *Gli insiemi C_k e C sono compatti.*

(4) *C è misurabile e la sua misura è data da:*

$$\mathcal{L}(C) = \lim_{k \to +\infty} \mathcal{L}(C_k) = 0.$$

(5) *rappresentazione degli estremi degli intervalli di $\mathcal{F}_k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$*

$$\{a_j^{(k)} : 1 \leq j \leq 2^k\} = \left\{ x = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{3^i} : c_i \in \{0,2\},\ i = 1...k \right\}$$

$$\{b_j^{(k)} : 1 \leq j \leq 2^k\} = \left\{ x = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{3^i} : c_i \in \{0,2\} + \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{2}{3^i},\ i = 1...k \right\}.$$

(6) *rappresentazione dei punti dell'insieme di Cantor:*

$$C = \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} : \{c_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \{0,2\} \right\}.$$

(7) *C non contiene intervalli aperti non degeneri.*

(8) *C ha la cardinalità di $\mathbb{R}$, in particolare non è numerabile.*

(9) *$[0,1] \setminus C$ è un'unione numerabile di intervalli aperti disgiunti.*

(10) *C non ha punti isolati.*

Dimostrazione.

(1) Infatti se consideriamo i primi $j-1$-intervalli della famiglia $\mathcal{F}_{k-1}$, con l'applicazione della mappa $\mathcal{C}$ danno luogo a $2(j-1)$ intervalli. Pertanto il j-esimo intervallo della famiglia $\mathcal{F}_k$ dà luogo ai due intervalli successivi a $2(j-1)$, ovvero agli intervalli numero $2(j-1)+1 = 2j-1$ e $2(j-1)+2 = 2j$. Nell'applicazione di $\mathcal{C}$ ad un intervallo I, se $\mathcal{C}(I) = I_1 \cup I_2$ l'estremo sinistro dell'intervallo I rimane come estremo sinistro dell'intervallo I_1: nel nostro caso l'estremo sinistro di $\mathcal{I}_j^{(k-1)}$ ovvero $a_j^{(k-1)}$ è uguale all'estremo sinistro del primo dei due intervalli ottenuti applicando $\mathcal{C}$, ovvero a $a_{2j-1}^{(k)}$. Le altre formule si ottengono ricordando che l'estremo destro del primo intervallo si ottiene aggiungendo a quello sinistro $1/3$ del valore della lunghezza di $\mathcal{I}_j^{(k-1)}$ e ricordando che la lunghezza di $\mathcal{I}_j^{(k-1)}$ è $1/3^{k-1}$. Analogamente l'estremo sinistro del secondo intervallo si ottiene aggiungendo ad $a_{2j-1}^{(k)}$ i $2/3$

di tale lunghezza. L'estremo destro del secondo intervallo ottenuto da $\mathcal{I}_j^{(k-1)}$ è lo stesso di quello di $\mathcal{I}_j^{(k-1)}$. Infine si ricordi che per le note proprietà della serie geometrica,

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^k}$$

(2) Si tratta di un caso particolare del precedente.

(3) Gli insiemi C_k, essendo unione finita di chiusi, sono a loro volta chiusi. Pertanto C è chiuso in quanto intersezione di chiusi. Tutti questi insiemi sono poi limitati perché contenuti in $[0,1]$.

(4) Dato $k \in \mathbb{N}$, gli intervalli $\mathcal{I}_j^{(k)}$ per $1 \leq j \leq 2^k$ sono due a due disgiunti e in numero finito, e pertanto si ha $\mathcal{L}(C_k) = 2^k \cdot 1/3^k = (2/3)^k$. Gli insiemi C_k e costituiscono una successione strettamente decrescente di chiusi $C_k \supset C_{k+1} \supset ....$ Poiché $C_0 = [0,1]$ ha misura finita, si ha la tesi.

(5) Tali formule si dimostrano per induzione. Proviamo ad esempio la prima: supponiamo sia vera fino all'ordine $k-1$, allora dalle formula di rappresentazione per ricorrenza si ha che se j è pari, $j = 2m$ si ponga $c_k = 2$ ottenendo

$$a_j^{(k)} = a_{2m}^{(k)} = a_j^{(k-1)} + \frac{2}{3^k} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{3^i} + \frac{2}{3^k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{3^i}$$

Il procedimento è del tutto analogo per il caso dispari e per le altre formule.

(6) Indichiamo con $C^* = \left\{x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} : \{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \{0,2\}\right\}$. Se $x \in C^*$ allora esiste una successione $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ a valori in $\{0,2\}$ tale che $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}$. Definiamo la successione $\{x_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ ponendo $x_N := \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{3^i}$. Si ha

$$0 \leq x - x_N = \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} \leq 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^i},$$

ridotta di una serie convergente. Pertanto la successione $\{x_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ è monotona e converge a x. Inoltre si ha, dalla formula di rappresentazione per gli estremi degli intervalli, che $x_N \in C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché C è chiuso ne segue che $x \in C$ e quindi $C^* \subseteq C$.
Per provare l'inclusione opposta, proviamo che se $x \in [0,1] \setminus C^*$ allora $x \notin C$. Supponiamo quindi che $x \in [0,1] \setminus C^*$, pertanto x è della forma

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{d_i}{3^i},$$

dove $c_i \in \{0,2\}$, e $\{d_i :, i \in \mathbb{N},\, i \geq k+1\} = \{0,2\}$. L'indice k è il primo indice in cui compare un 1 nello sviluppo di x in base 3, se $k = 1$ allora la prima somma è assente. I valori di d_i non possono essere tutti nulli, altrimenti si avrebbe

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{3^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \in C^*,$$

e non possono nemmeno essere tutti uguali a 2, altrimenti

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{3^i} + \frac{2}{3^k} \in C^*.$$

Poiché i valori di d_i non sono né tutti nulli, né tutti uguali a 2, si ha che

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{d_i}{3^i} < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^k},$$

e poiché per qualche $j = 1, ..., 2^k$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} = b_j^{(k-1)} < x$$

si ottiene

$$b_j^{(k-1)} < x = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{d_i}{3^i} < b_j^{(k-1)} + \frac{1}{3^k} = a_{j+1}^{(k-1)}$$

quindi $x \notin C_k$ e pertanto $x \notin C$.

(7) Tali intervalli hanno infatti misura positiva, mentre C ha misura nulla.

(8) L'insieme di Cantor è in corrispondenza biunivoca con le successioni a valori in $\{0, 2\}$, pertanto esso ha la cardinalità $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, ovvero $2^{\mathbb{N}}$ ovvero la cardinalità di $\mathbb{R}$.

(9) $[0, 1] \setminus C$ è aperto e in $\mathbb{R}$ ogni aperto si può scrivere come unione di numerabile di intervalli disgiunti. In particolare si ha:

$$[0,1] \setminus C = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}} U_{\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}},k} \right)$$

dove

$$U_{\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}},k} = \left] \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{3^i} + \frac{1}{3^k}, \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{3^i} + \frac{2}{3^k} \right[$$

con $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ successione in $\{0, 2\}$.

(10) Sia $x \in C$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}$. Distinguiamo due casi:

(a) se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale per cui $c_i = 0$ per $i > N$ si ponga

$$x_n = \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{3^i} + \frac{2}{3^{i+n}} \in C \setminus \{x\}$$

e si osservi che $x_n \to x$ che, quindi, non è isolato.

(b) se invece $c_i \neq 0$ per infiniti indici $i \in \mathbb{N}$ si ponga

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{3^i} \in C \setminus \{x\}$$

e si ha ancora $x_n \to x$.

□

Definizione 3. Definiamo la seguente applicazione $\tilde{f} : C \to [0, 1]$

$$\tilde{f}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2c_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{2^i},$$

per ogni successione $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ a valori in $\{0, 1\}$. Grazie alla proposizione precedente, si ha che tale applicazione assume gli stessi valori agli estremi degli intervalli $U_{\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}},k}$ (tali estremi appartengono a C), pertanto estendiamo $\tilde{f}$ ad una funzione f nel modo seguente $f_{|C} = \tilde{f}$ e

$$f(U_{\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}},k}) = \tilde{f}(\inf\{U_{\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}},k}\})$$

per ogni $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ successione in $\{0, 2\}$. La funzione $f : [0, 1] \to [0, 1]$ prende il nome di *funzione di Cantor-Vitali* o *scala del diavolo.*

Proposizione 2. *La funzione di Cantor* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *soddisfa le seguenti proprietà:*

(1) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$;
(2) $f(C) = [0, 1]$, *quindi* f *è suriettiva;*
(3) f *è non decrescente;*
(4) f *è (uniformemente) continua;*
(5) f *è derivabile in un insieme di misura* 1 *con derivata nulla, tuttavia non è costante.*

Dimostrazione.

(1) Immediata.
(2) Ogni numero dell'intervallo $[0, 1]$ può essere scritto *in base 2*, ovvero dato $\xi \in [0, 1]$ esiste una successione $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \{0, 1\}$ tale che $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{2^i}$.
(3) Immediata dalla definizione.
(4) Per assurdo, sia x un punto in cui f è discontinua. Poiché f è crescente e limitata, essa ammette limiti destro e sinistro finiti in x, siano essi $f(x^-)$ e $f(x^+)$ rispettivamente. Tali limiti sono diversi, per cui $f(x^-) < f(x^+)$ e quindi $]f(x^-), f(x)[\cup]f(x), f(x^+)[$ non è contenuto in $[0, 1] = f([0, 1])$, assurdo perché almeno uno di tali intervalli è non vuoto. La continuità uniforme discende dalla compattezza di $[0, 1]$.
(5) f è derivabile (perché costante) su tutti i punti di $[0, 1] \setminus C$ e ivi ha derivata nulla.

□

Proposizione 3. *Esiste un insieme misurabile secondo Lebesgue ma non boreliano.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x)+x$ con f funzione di Cantor. Tale funzione è strettamente crescente, continua quindi è un omeomorfismo di $[0, 1]$ in $[0, 2]$. Sia I un intervallo dove la funzione di Cantor è costante. Allora $\mathcal{L}(g(I)) = \mathcal{L}(I)$, pertanto passando alle unioni numerabili, si ha che

$$\mathcal{L}(g([0, 1] \setminus C)) = \mathcal{L}([0, 1] \setminus C) = 1$$

e quindi $\mathcal{L}(g(C)) = 1$. Sia $D \subset g(C)$ un insieme non misurabile (ogni insieme di misura esterna positiva contiene un insieme non misurabile) e poniamo $B = g^{-1}(D)$. B è contenuto nell'insieme di Cantor che ha misura nulla, quindi è misurabile. Supponiamo sia un Boreliano. Ma allora si avrebbe per continuità che $D = g(B) = (g^{-1})^{-1}(B)$ dovrebbe essere un boreliano per continuità di g e g^{-1}, ma ciò è assurdo. □

Osservazione 1. Osserviamo le seguenti proprietà di *autosomiglianza* dell'insieme di Cantor e della funzione di Cantor:

$$x \in C \text{ se e solo se } \begin{cases} 3x \in C & \text{se } 0 \le x \le 1/3 \\ 3x - 2 \in C & \text{se } 2/3 \le x \le 1 \\ \text{falso} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per la funzione di Cantor si ha:

$$f(x) = \begin{cases} f(3x)/2 & \text{se } 0 \le x \le 1/3, \\ 1/2 & \text{se } 1/3 < x < 2/3, \\ (1 + V(3x - 2))/2 & \text{se } 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$

Questo dice fra l'altro che la parte del grafico di f contenuta in ciascuno dei rettangoli $[0, 1/3] \times [0, 1/2]$, $[2/3, 1]\times[1/2, 1]$ è una copia in scala (compressa lateralmente) dell'intero grafico nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

2. Esercitazione del giorno 13 ottobre 2009 (2 ore): miscellanea sulla teoria della misura

Esercizio 1. È noto che se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente di insiemi misurabili, cioè $E_{n+1} \subset E_n$, e E_1 ha misura finita, allora $m(\bigcap E_n) = \lim m(E_n)$. Mostrare con un esempio che l'enunciato può essere falso quando $m(E_1) = \infty$.

Svolgimento. Per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ poniamo $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq 1/n\}$, è successione decrescente di misurabili. Ogni E_n ha misura 2-dimensionale $+\infty$. Si ha che $E := \bigcap E_n = \mathbb{R} \times \{0\}$ che ha misura di Lebesgue 2-dimensionale nulla: infatti $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, n[\times \{0\}$ e per provare l'asserto è sufficiente mostrare che $]-n, n[\times \{0\}$ ha misura nulla per ogni n. Tale fatto si ottiene con la successione di insiemi $F_{mn} =]-n, n[\times [0, 1/m]$, la cui intersezione $\bigcap_{m=1}^{\infty} F_{mn}$ è proprio $]-n, n[\times \{0\}$ e la misura di $F_{mn} = \frac{2n}{m} \to 0$ al tendere di $m \to +\infty$.

Esercizio 2. Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è misurabile allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$ è misurabile. Mostrare che esiste una funzione non misurabile tale che per ogni α, l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$ è misurabile.

Svolgimento. Se $U := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\} = \emptyset$ allora è misurabile e ha misura nulla. Supponiamo pertanto che questo insieme non sia vuoto. Sia $B_n = \{y \in \mathbb{R} : |y - \alpha| < 1/n\}$. Per la misurabilità di f, gli insiemi $V_n = f^{-1}(B_n)$ sono tutti misurabili. L'intersezione V dei V_n è misurabile perché intersezione di misurabili. Inoltre se $f(x) = \alpha$ allora $x \in V_n$ per ogni n, quindi $x \in V$ che quindi non è vuoto. D'altra parte se $x \in V$ si ha $|f(x) - \alpha| < 1/n$ per ogni n, quindi $f(x) = \alpha$. Pertanto $U = V$ che quindi è misurabile.
Sia $E \subseteq]0, 1[$ un insieme non misurabile. Definiamo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$g(x) := \begin{cases} x - 2, & \text{se } x \leq 0, \\ x, & \text{se } x \in E, \\ x + 2, & \text{se } x \in]0, +\infty[\setminus E. \end{cases}$$

La funzione g è iniettiva: siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e consideriamo i vari casi

a. se $x_1, x_2 \leq 0$ allora $g(x_1) = x_1 - 2$ e $g(x_2) = x_2 - 2$ quindi $g(x_1) \neq g(x_2)$ se $x_1 \neq x_2$;
b. se $x_1 \leq 0$ e $x_2 > 0$ allora $g(x_1) < 0$ e $g(x_2) > 0$ quindi $g(x_1) \neq g(x_2)$;
c. se $x_1, x_2 \in E$ allora $g(x_1) = x_1$ e $g(x_2) = x_2$ quindi $g(x_1) \neq g(x_2)$ se $x_1 \neq x_2$;
d. se $x_1 \in E$ e $x_2 \in]0, +\infty[\setminus E$ allora $g(x_1) = x_1 \in]0, 1[$ e $g(x_2) = x_2 + 2 > 2$ quindi $g(x_1) \neq g(x_2)$;
e. se $x_1, x_2 \in]0, +\infty[\setminus E$ allora $g(x_1) = x_1 + 2$ e $g(x_2) = x_2 + 2$ quindi $g(x_1) \neq g(x_2)$ se $x_1 \neq x_2$.

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $g^{-1}(\alpha)$ o è vuoto oppure ha un unico elemento. In entrambi i casi $g^{-1}(\alpha)$ è misurabile e ha misura nulla. Tuttavia $g^{-1}(]0, 1[) = E$ che per ipotesi non è misurabile, pertanto g non è misurabile.

Esercizio 3. Dimostrare che un insieme E è misurabile se e solo se la sua funzione caratteristica χ_E è misurabile.

Svolgimento. Sia E misurabile. V aperto di $\mathbb{R}$. Se $0, 1 \in V$ allora $\chi_E^{-1}(V) = \mathbb{R}$, quindi è misurabile. Se $1 \notin V$, $0 \in V$ si ha $\chi_E^{-1}(V) = \mathbb{R} \setminus E$ che è misurabile perché E è misurabile. Se $1 \in V$ e $0 \notin V$ si ha che $\chi_E^{-1}(V) = E$ che è misurabile. Se $0, 1 \notin V$ $\chi_E^{-1}(V) = \emptyset$, quindi è misurabile. Pertanto χ_E è misurabile. Viceversa, se χ_E misurabile, si ha che $E = \chi^{-1}(]1/2, 3/2[)$ è misurabile.

Esercizio 4. Dimostrare che se f è una funzione misurabile e g è una funzione continua definita su $\mathbb{R}$, allora $g \circ f$ è misurabile. Mostrare che possono esistere una funzione continua g ed una funzione misurabile h tali che $h \circ g$ non è misurabile.

Svolgimento. Sia V aperto di $\mathbb{R}$. Si ha per continuità che $g^{-1}(V)$ è aperto, per cui $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$ è misurabile.
Sia $\psi : [0, 1] \to [0, 1]$ la funzione di Cantor, e sia $\varphi : [0, 1] \to [0, 2]$ l'omeomorfismo definito da $\varphi(x) = x + \psi(x)$. Sia $C \subseteq [0, 1]$ l'insieme di Cantor. Si è visto come $\mathcal{L}(\varphi(C)) = 1$, quindi esiste $E \subset \varphi(C)$ non misurabile. L'insieme $B = \varphi^{-1}(E)$ è contenuto in C quindi è misurabile. Poniamo $h(x) = \chi_B(x)$ è funzione misurabile perché funzione caratteristica di un insieme misurabile. Sia $g = \varphi^{-1}$, in tal modo $B = g(E)$. Si ha che g è continua, quindi misurabile. Consideriamo la funzione $h \circ g$. Sia V aperto di $\mathbb{R}$, supponiamo $1 \in V$, $0 \notin V$ e consideriamo $(h \circ g)^{-1}(V) = g^{-1}(h^{-1}(V))$. Si ha $h^{-1}(V) = \chi_B^{-1}(V) = B$ e $g^{-1}(B) = \varphi(B) = E$ non misurabile. Quindi $h \circ g$ non è misurabile.

Esercizio 5. Siano $A \subseteq (0, 1)$ misurabile secondo Lebesgue e $c > 0$. Si supponga che se $0 \leq a < b \leq 1$ allora $\mathcal{L}(A \cap (a, b)) > c(b - a)$. Si provi che $\mathcal{L}(A) = 1$.

Svolgimento. Si ha ovviamente $\mathcal{L}(A) > 0$ e $0 < c < 1$ (scegliendo $(a,b) = (0,1)$). Il complementare $B = (0,1) \setminus A$ di A è misurabile, esiste quindi una successione di aperti $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\mathcal{L}(V_n \setminus B) < 1/n$, e $B \subseteq V_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ciascun V_n si scrive come unione numerabile di intervalli disgiunti $\{I_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ Si ha per ogni n, k:

$$\mathcal{L}(A \cap I_k^{(n)}) > c\mathcal{L}(I_k^{(n)})$$

sommando su k si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}(A \cap I_k^{(n)}) > c \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}(I_k^{(n)}).$$

Ricordando la misurabilità di $A \cap I_k^{(n)}$ e il fatto che gli $I_k^{(n)}$ sono disgiunti, si ottiene:

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A \cap I_k^{(n)}\right) > c\mathcal{L}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)}\right),$$

ovvero $\mathcal{L}(A \cap V_n) > c\mathcal{L}(V_n) > c\mathcal{L}(B)$. Poiché $A = (0,1) \setminus B$, si ha $A \cap V_n = ((0,1) \setminus B) \cap V_n = V_n \setminus B$, pertanto

$$\mathcal{L}(V_n \setminus B) > c\mathcal{L}(B)$$

il termine di sinistra tende a 0 per $n \to +\infty$, pertanto $\mathcal{L}(B) = 0$ e quindi $\mathcal{L}(A) = 1$.

Esercizio 6. Siano $A, B \subseteq (0,1)$ misurabili secondo Lebesgue e tali che $\mathcal{L}(A) > 1/2$ e $\mathcal{L}(B) > 1/2$. Si provi che esistono $x \in A$ e $y \in B$ tali per cui $x + y = 1$.

Svolgimento. Consideriamo l'omeomorfismo $f :]0,1[\to]0,1[$ definito da $f(x) = 1-x$. Si ha $\mathcal{L}(f(A)) = \mathcal{L}(A) > 1/2$. Per le proprietà della misura di Lebesgue, l'insieme $f(A)$ è misurabile. Supponiamo per assurdo che $f(A)$ e B siano disgiunti. Allora si avrebbe $\mathcal{L}(f(A)) + \mathcal{L}(B) > 1$ contro il fatto che $f(A) \cup B \subseteq]0,1[$. Pertanto esiste $y \in f(A) \cap B$, quindi esiste $x \in A$ tale che $y = 1 - x$ da cui $x + y = 1$.

Esercizio 7. Siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue, si mostri che i seguenti insiemi sono di Borel:

$$A := \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \in [0,1] \text{ per infiniti indici } n\},$$
$$B := \left\{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\right\}.$$

Svolgimento. Poniamo

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \in [0,1]\} = f_n^{-1}([0,1]),$$

e osserviamo che per continuità si ha che A_n è un Boreliano. Indicata con χ_{A_n} la funzione caratteristica di A_n, si ha $x \in A$ se e solo se

$$\limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = 1,$$

quindi A è un Boreliano.
Per ogni $h > 0$, sia $m \in \mathbb{N}$ definito da $m \leq h < m + 1$ e poniamo

$$B_{nm} := \{x \in \mathbb{N} : f_n(x) > m\}.$$

Per continuità, si ha che tale insieme è un Boreliano. Si ha che

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \geq m$$

se e solo se

$$\liminf_{n\to\infty} \chi_{B_{nm}}(x) = 1$$

Posto

$$C_m = \{x : \liminf_{n\to\infty} \chi_{B_{nm}}(x) = 1\}$$

si ha che C_m è un Boreliano e quindi

$$B = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m$$

è un Boreliano.

3. Esercitazione del giorno 20 ottobre 2009 (2 ore): integrabilità e passaggio al limite sotto il segno di integrale

Los Alamos non era ancora pronto. Bob Wilson volle sfruttare il tempo rimasto per mandarmi a Chicago, a scoprire tutto il possibile sulla bomba e i problemi connessi. Poi avremmo cominciato a costruire nei nostri laboratori la strumentazione che sarebbe servita a Los Alamos. Non avremmo perso tempo. Fui mandato a Chicago con il compito di contattare un primo gruppo, spiegare ai membri che avrei lavorato con loro e che perciò dovevano espormi i problemi in modo abbastanza dettagliato da permettermi di occuparmene subito. Poi dovevo contattare un altro gruppo, farmi indicare un altro problema. Così sarei stato al corrente di tutto.
Era un'ottima idea, anche se la mia coscienza protestava perché tutti si davano un gran da fare a spiegarmi le cose e poi io me ne andavo senza aiutarli. Ma fui molto fortunato: quando qualcuno mi spiegò uno dei primi problemi matematici, chiesi: - Perché non prova a differenziare sotto il segno integrale? - Ci provò, e lo risolse in mezz'ora dopo averci lavorato per tre mesi. Qualcosa combinai dunque, usando la mia "cassetta degli attrezzi" personale.

Feynman R., "Sta scherzando Mr. Feynman!", Zanichelli, pag. 105.

Esercizio 8. Si provi il *Lemma di Riemann-Lebesgue*: data $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora
$$\lim_{\alpha\to\pm\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\alpha t}\,dt = 0.$$

Svolgimento. Proviamo il risultato per la funzione caratteristica di un intervallo $[a,b]$:
$$\left|\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(t)e^{i\alpha t}\,dt\right| = \left|\int_a^b e^{i\alpha t}\,dt\right| = \left|\frac{e^{i\alpha b}-e^{i\alpha a}}{i\alpha}\right| \le \frac{2}{\alpha},$$
che tende a zero per $\alpha \to \pm\infty$. Per linearità, il risultato è vero per ogni combinazione lineare finita di funzioni a scalino:
$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{K} c_j \chi_{[a_j,b_j]}(t)$$
dove $a_j < b_j$ e $c_j \in \mathbb{R}$ per ogni $j = 1, ..., K$.
Sia $f \ge 0$ continua tale che $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ sia compatto (ovvero $f \in C^0_c(\mathbb{R})$). Allora esiste una successione di funzioni a scalino $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $f \ge \varphi_n$ e $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$. Dal Teorema della Convergenza Dominata che
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - f(x)|\,dx = 0,$$
infatti l'integranda è maggiorata dalla funzione integrabile $2|f(x)|$ e il limite puntuale è nullo. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che se $n > N$ si ha:
$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - f(x)|\,dx < \varepsilon.$$
Si ha allora se $n > N$
$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\alpha t}\,dt\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} (f(t) - \varphi_N(t) + \varphi_N(t))e^{i\alpha t}\,dt\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}} |f(t) - \varphi_n(t)|\,dt + \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)e^{i\alpha t}\,dt\right|\end{aligned}$$

Il secondo addendo tende a zero perché φ_n è funzione a scalino, pertanto per α sufficientemente grande:
$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\alpha t}\,dt\right| \le 2\varepsilon.$$
Ciò vale per ogni ε, da cui la tesi per $f \in C^0_c(\mathbb{R})$, $f \ge 0$.
Scrivendo $f = f^+ - f^-$ con $f^+(x) = \max\{-f(x), 0\}$ e $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ e applicando il

risultato alle funzioni positive f^+ e f^-, si ha il risultato per $f \in C^0_c(\mathbb{R})$ di segno qualunque.
Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ dato $\varepsilon > 0$ allora esiste $\varphi \in C^0_c(\mathbb{R})$ tale per cui $\|f - \varphi\|_{L^1} < \varepsilon/2$, e si ha per $|\alpha|$ sufficientemente grande che

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{i\alpha t}\, dt < \varepsilon/2,$$

quindi

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\alpha t}\, dt\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}} (f(t) - \varphi(t)) e^{i\alpha t}\, dt\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{i\alpha t}\, dt\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t) - \varphi(t)|\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Esercizio 9. Si dica:

(1) per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = e^{-x}/x$ è integrabile su $[a, +\infty[$.

(2) se la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-x} - 1}{x}$ è integrabile su $[0, 1]$ e su $[0, +\infty[$.

Svolgimento.

(1) Si ha che $f(x) < 0$ per $x < 0$. Fissiamo $a > 0$ e studiamo l'integrabilità su $[a, +\infty[$. La funzione f è positiva e continua sul compatto $[a, 1]$, pertanto integrabile. Sia ora $M \in \mathbb{N}$, $M > 1$. La successione $\{\chi_{[1,M]}(x) e^{-x}\}_{M \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ è una successione crescente di funzioni positive e puntualmente converge a $\chi_{[1,+\infty[}(x) e^{-x}$, pertanto per il Teorema della Convergenza Monotona si ha:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[1,+\infty[}(x) e^{-x}\, dx = \lim_{M \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[1,M]}(x) e^{-x}\, dx = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{e} - e^{-M} = \frac{1}{e}.$$

Perciò $\chi_{[1,M]}(x) f(x)$ (che è positiva) è in modulo dominata dalla funzione integrabile $\chi_{[1,+\infty[}(x) e^{-x}$ e converge puntualmente alla funzione $\chi_{[1,+\infty[}(x) f(x)$ che, per il Teorema della convergenza Dominata risulta essere integrabile. Pertanto la funzione è integrabile su $[a, +\infty[$ per ogni $a > 0$. Poiché $\lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$, si ha che esiste $0 < r < 1$ tale per cui $f(x) > 1/2x$ se $0 < x < r$, in particolare per ogni $0 < 1/n < r$ si ha

$$\int_{1/n}^{r} f(x)\, dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \chi_{]1/n,r]}(x) \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}(\log r - \log(1/n))$$

La successione $\chi_{]1/n,r}(x)\frac{1}{x}$ è una successione crescente di funzioni positive e per $n \to +\infty$ converge a $\chi_{]0,r}(x)\frac{1}{x}$. Per il Teorema della Convergenza Monotona si ha

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \chi_{]0,r]}(x) \frac{1}{x}\, dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \chi_{]1/n,r]}(x) \frac{1}{x}\, dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}(\log r - \log(1/n)) = +\infty.$$

Poiché $f(x) > 1/2x$ in $]0, r]$, si ha che

$$\int_0^r f(x)\, dx = +\infty$$

Pertanto f è integrabile in $[a, +\infty[$ per ogni $a > 0$.

(2) Posto $f(0) = -1$, si ha che f è continua sul compatto $[0, 1]$, quindi integrabile. Tuttavia essa non è integrabile su $[1, +\infty[$, infatti se lo fosse si avrebbe che

$$-\frac{1}{x} = \frac{e^{-x} - 1}{x} - \frac{e^{-x}}{x}$$

si scriverebbe come differenza di funzioni integrabili su $[1, +\infty[$, in quanto $e^{-x}x$ è integrabile su $[1, +\infty[$ per il punto precedente. Quindi $x \mapsto 1/x$ sarebbe integrabile su $[1, +\infty[$, tuttavia si ha che $1/x$ è limite puntuale per $M \to \infty$ della successione crescente di funzioni positive $\chi_{[1,M]}(x) 1/x$, pertanto per il Teorema della Convergenza Monotona

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \int_{\mathbb{R}} \lim_{M \to +\infty} \frac{\chi_{[1,M]}(x)}{x}\, dx = \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{dx}{x} = \lim_{M \to +\infty} \log M = +\infty.$$

Pertanto f non è integrabile su $[1,+\infty[$. Essendo integrabile su $[0,1]$, si conclude che non è integrabile su $[0,+\infty[$ perché altrimenti si avrebbe che l'integrale su $[1,+\infty[$ si scriverebbe come differenza delle funzioni integrabili $\chi_{[0,+\infty[}f$ e $\chi_{[0,1]}f$ e quindi si avrebbe integrabilità anche su $[1,+\infty[$, assurdo.

Esercizio 10. Sia $f_k(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+kx}$, calcolare il $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_0^{+\infty} f_k(x)\,dx$.

Svolgimento. La successione $\chi_{[0,+\infty[}f_k$ è una successione di funzioni positive puntualmente convergente alla funzione identicamente nulla, inoltre si ha

$$|\chi_{[0,+\infty[}(x)f_k(x)| = \chi_{[0,+\infty[}(x)f_k(x) \leq \chi_{[0,+\infty[}(x)\frac{e^{-x}}{1+x}$$

La funzione $\chi_{[0,+\infty[}(x)\frac{e^{-x}}{1+x}$ è continua sul compatto in $[0,1]$, quindi integrabile in $[0,1]$, ed è maggiorata dalla funzione e^{-x}/x per $x \geq 1$, essendo e^{-x}/x integrabile su $[1,+\infty[$, come visto nell'esercizio precedente si conclude che $\chi_{[0,+\infty[}(x)\frac{e^{-x}}{1+x}$ è integrabile anche su $[1,+\infty[$ e quindi su $\mathbb{R}$ (infatti è identicamente nulla per $x < 0$). Essendo quindi $|\chi_{[0,+\infty[}(x)f_k(x)|$ maggiorato da una funzione integrabile, è possibile applicare il Teorema della Convergenza Dominata ottenendo

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{+\infty} f_k(x)\,dx = 0.$$

Esercizio 11. Sia $f_k(x) = \sqrt{x}e^{-kx}$, calcolare il $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_0^{+\infty} f_k(x)\,dx$.

Svolgimento. La successione $\chi_{[0,+\infty[}f_k$ è una successione decrescente di funzioni positive puntualmente convergente alla funzione identicamente nulla. Per applicare il Teorema della Convergenza Dominata è sufficiente mostrare che $\chi_{[0,+\infty[}f_1$ è integrabile, a questo punto si avrà

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{+\infty} f_k(x)\,dx = 0.$$

Fissiamo $M > 0$ e osserviamo che la funzione $\chi_{[0,+\infty[}f_1$ è continua quindi senz'altro integrabile su $[0,M]$. Osserviamo che si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{5/2}}{e^x} = 0$$

(si applichi la regola di de l'Hopital per convincersi di questo fatto). In particolare, si ottiene che esiste $M > 0$ tale per cui $f_1(x) < 1/x^2$ per ogni $x \geq M$. Proviamo quindi che la funzione $1/x^2$ è integrabile su $[M,+\infty[$, in tal modo si otterrà che anche f_1 è integrabile su $[M,+\infty[$ e quindi su $[0,+\infty[$ essendo integrabile anche su $[0,M]$. La funzione $\chi_{[M,+\infty[}(x)/x^2$ è limite puntuale per $N \to +\infty$ della successione crescente di funzioni positive $\chi_{[M,N[}(x)/x^2$ Tali funzioni hanno integrale $1/M - 1/N$, quindi $\chi_{[M,+\infty[}(x)/x^2$ è integrabile e il suo integrale vale $1/M$. Pertanto f_1 è integrabile su $[0,+\infty[$.

Esercizio 12. Sia $f_k(x) = \sqrt{k+x}e^{-kx}$. Si dica se vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_k(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\lim_{k\to+\infty} f_k(x)\,dx.$$

Svolgimento. Le funzioni f_k sono positive e convergono puntualmente alla funzione nulla, pertanto il membro di destra è 0. Si ha poi:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f_k(x) &= \int_0^k f_k(x)\,dx + \int_k^{+\infty} f_k(x)\,dx \leq \int_0^k \sqrt{k+k}e^{-kx}\,dx + \int_k^{+\infty}\sqrt{x+x}e^{-kx}\,dx \\
&= \sqrt{2k}\,\frac{1-e^{-k^2}}{k} + \sqrt{2}\int_k^{+\infty}\sqrt{x}e^{-kx}\,dx \\
&\leq \sqrt{2}(1-e^{-k^2}) + \sqrt{2}\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-kx}\,dx.
\end{aligned}$$

Il primo addendo tende a zero per $k \to +\infty$, il secondo anche per l'esercizio precedente, pertanto il passaggio al limite richiesto è verificato.

Esercizio 13. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{k\to 0^+} \int_1^{+\infty} (-1)^{\lfloor x \rfloor} \frac{|\sin \pi x|^{1/k}}{x^2}\, dx,$$

dove $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera di x.

Svolgimento. L'integranda è maggiorata in modulo dalla funzione integrabile $1/x^2$, e per $x \neq 1/2+k$, $k \in \mathbb{N}$ converge puntualmente alla funzione nulla. Detto $N := \{x \neq 1/2+k : k \in \mathbb{N}\}$, questo insieme ha misura nulla, pertanto si ha, passando al limite:

$$\lim_{k\to 0^+} \int_1^{+\infty} (-1)^{\lfloor x \rfloor} \frac{|\sin \pi x|^{1/k}}{x^2}\, dx, = 0.$$

Esercizio 14. Sia $g_k(x) = \dfrac{k/\pi}{1+k^2x^2}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si verifichi che:

(1) $g_k > 0$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_k(x)\, dx = 1$;
(2) per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che g_k converge uniformemente a zero su $\{x : |x| > \varepsilon\}$;
(3) per ogni funzione continua e limitata f vale

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_k(x) f(x)\, dx = f(0).$$

Svolgimento. È ovvio che $g_k > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$. Calcoliamo

$$\int_{\mathbb{R}} g_k(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{k\, dx}{1+x^2k^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{1+y^2} = 1.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, si ha $0 < g_k(x) = g_k(-x) < g_k(\varepsilon)$ per ogni $x > \varepsilon$, e $g_k(\varepsilon) \to 0^+$ se $k \to +\infty$, pertanto si ha convergenza uniforme a zero su $\{x : |x| > \varepsilon\}$. Si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} g_k(x) f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{1+y^2} f(y/k)\, dy$$

Per ogni k, la funzione $f(y/k)/(1+y^2)$ è maggiorata in modulo dalla funzione integrabile $\|f\|_\infty/(1+y^2)$, pertanto per il Teorema della Convergenza Dominata si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_k(x) f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} \frac{dy}{1+y^2} f(y/k)\, dy = \frac{f(0)}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{1+y^2} = f(0).$$

Esercizio 15. Calcolare:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int_{1/k}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx.$$

Svolgimento. Posto $y = kx$, si ha:

$$\frac{1}{k} \int_{1/k}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx = \frac{1}{k} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(y/k)}{y^2/k^2} \frac{dy}{k} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(y/k)}{y^2}\, dy$$

L'integranda è in modulo maggiorata dalla funzione integrabile $1/y^2$. Applicando il Teorema della Convergenza Dominata si ha che il limite è nullo.

Esercizio 16. Si dica per quali valori $\alpha > 0$ è integrabile su $[0, +\infty[$ la funzione

$$F_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha + k^\alpha}.$$

Svolgimento. Poniamo:

$$f_k^\alpha = \frac{1}{x^\alpha + k^\alpha}, \qquad s_n^\alpha = \sum_{k=1}^n f_k^\alpha.$$

Si ha che $f_k^\alpha > 0$, pertanto s_n^α è una successione crescente di funzioni positive puntualmente convergente a F_α, quindi:

$$\int_0^{+\infty} F_\alpha(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} s_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} f_k^\alpha(x)\,dx$$

Ricordando che

$$\int_0^{+\infty} f_k^\alpha(x)\,dx = \frac{1}{k^\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x/k)^\alpha+1} = \frac{1}{k^\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{k\,dy}{y^\alpha+1} = \frac{1}{k^{\alpha^{-1}}}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{y^\alpha+1}$$

Per confronto asintotico, l'ultimo integrale converge per $\alpha > 1$, in tal caso si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} f_k^\alpha(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{y^\alpha+1} = \int_0^{+\infty}\frac{dy}{y^\alpha+1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

e l'ultima serie converge se e solo se $\alpha - 1 > 1$ ovvero $\alpha > 2$. Quindi F_α è integrabile su $[0,+\infty[$ se e solo se $\alpha > 2$.

Esercizio 17. Per ogni $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ sia $f_k(x) = k^3(x-k)^2\chi_{[k-1/k,k+1/k]}(x)$. Verificare che f_k converge uniformemente a zero sui compatti di $\mathbb{R}$, tuttavia

$$\int_{\mathbb{R}}\lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx \neq \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx.$$

Svolgimento. Sia K un compatto di $\mathbb{R}$, in particolare esso è limitato ed esiste $R > 0$ tale per cui $|x| < R$ se $x \in K$. Ma allora: se $k > R+1$ si ha $K \cap [k-1/k, k+1/k] = \emptyset$, e quindi $f_k(x) = 0$ per ogni $x \in K$ da cui la convergenza uniforme su K alla funzione nulla. Si ha quindi che l'integrale del limite delle f_k è nullo.

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx = \int_{k-1/k}^{k+1/k} k^3(x-k)^2\,dx = \int_{-1/k}^{1/k} k^3y^2\,dy = 2\int_0^{1/k} k^3y^2\,dy = \frac{2}{3},$$

e quindi il limite degli integrali delle f_k vale $2/3$.

4. Esercitazione del giorno 27 ottobre 2009 (2 ore): spazi di successioni

Definizione 4. Sia $p \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $p > 1$. L'*esponente coniugato* p' di p si definisce nel modo seguente: se $p > 1$ e $p \neq +\infty$, allora $p' \in \mathbb{R}$ è tale per cui $1/p + 1/q = 1$, se $p = +\infty$. Se $p = 1$ allora $p' = +\infty$, se $p = +\infty$ allora $p' = 1$.

Lemma 1 (Disuguaglianze elementari)**.** *Siano $a, b \geq 0$, $p \geq 1$, p' coniugato di p. Allora valgono le seguenti disuguaglianze:*

$$\begin{aligned} ab &\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \\ (a^p + b^p) &\leq (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Se $ab = 0$ il risultato è banale. Siano quindi $a, b \neq 0$. Supponiamo per il momento $p \neq 1, +\infty$. Nella dimostrazione sfruttiamo il fatto che il logaritmo è una funzione concava, ovvero per ogni $x, y > 0$, $t \in [0,1]$ si ha:

$$\log(tx + (1-t)y) \geq t\log x + (1-t)\log y.$$

Posto $t = 1/p$, $x = a^p$, $y = b^{p'}$ si ha:

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\right) \geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log b^{p'} = \log(ab).$$

Segue la prima disuguaglianza per la stretta crescenza della funzione logaritmo. Il caso generale si ottiene passando al limite.
Per provare la seconda disuguaglianza, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$$

in $[0,+\infty[$. Si ha $f(0) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Derivando, si ottiene $f'(x) = 0$ per $x = 1$, $f(1) = 2^{p-1} \geq 1$, quindi f assume il massimo in 1. Si ha quindi $1 \leq f \leq 2^{p-1}$, da cui la prima disuguaglianza ponendo $x = b/a$ se $a \neq 0$. $\square$

Definizione 5. Dato uno spazio con misura $(X, \mathcal{S}, \mu)$ (ovvero X è un insieme, Σ è una σ-algebra di parti di X e $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ è una misura) ed una funzione misurabile $f : X \to \mathbb{R}$, l'*estremo superiore essenziale* di tale funzione è legato unicamente alla classe di uguaglianza μ-q.o. di tale funzione; è l'estremo superiore a meno di insiemi di misura nulla. Supponiamo naturalmente che la misura sia non banale, che cioè qualche insieme abbia misura non nulla. Si definisce come

$$\text{esssup}_\mu(f) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : f(x) > \alpha\}) = 0\},$$

convenendo al solito che $\inf \emptyset = +\infty$. Poniamo $\|f\|_{L^\infty_\mu} = \text{esssup}(f)$ e definiamo

$$L^\infty_\mu(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \ \mu\textit{-misurabili con } \|f\|_{L^\infty_\mu} < +\infty\}$$

identificando tra loro funzioni uguali μ-q.o. Si ha che $(L^\infty_\mu(X), \|\cdot\|_{L^\infty_\mu})$ è spazio di Banach.

Definizione 6 (Spazi ℓ^p)**.** Sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle successioni a valori in $\mathbb{K}$, dove con $\mathbb{K}$ indichiamo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Date $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, definiamo le seguenti operazioni:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Con queste operazioni, $\mathcal{S}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.
Sia $1 \leq p < +\infty$. Definiamo i seguenti sottinsiemi di $\mathcal{S}$:

$$\ell^p := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\right\}, \qquad \ell^\infty := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\right\}$$

$$c_{00} := \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n = 0 \quad \forall n > N\}, \qquad c_0 := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0\right\}.$$

Definiamo inoltre le seguenti applicazioni:

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} := \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{1/p}, \qquad \text{per ogni } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$$

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \qquad \text{per ogni } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$$

Proposizione 4 (Proprietà degli spazi ℓ^p)**.** *Sia $1 \leq p < +\infty$, p' coniugato di p. Si ha che:*

(1) *$\ell^p, \ell^\infty, c_{00}, c_0$ sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{S}$;*
(2) *vale la* disuguaglianza di Hölder*: se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^{p'}$, allora $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ e $\|(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} \cdot \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^{p'}}$;*
(3) *vale la* disuguaglianza di Minkowski*: se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, allora*
$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} + \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p};$$
(4) *$\|\cdot\|_{\ell^p}$ è una norma su ℓ^p che rende ℓ^p spazio di Banach;*
(5) *$\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ è una norma su ℓ^∞ che rende ℓ^∞ spazio di Banach;*
(6) *sia $1 \leq p < r < \infty$ si ha $\ell^p \subset \ell^r \subset \ell^\infty$ con inclusione propria, inoltre:*
$$\|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^\infty} \leq \|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^r} \leq \|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p},$$
per ogni $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, ovvero le inclusioni sono continue.
(7) *$c_{00} \subset \ell^p$ con inclusione propria, e c_{00} è denso in ℓ^p rispetto alla norma di ℓ^p;*
(8) *$\ell^p \subset c_0 \subset \ell^\infty$ con inclusioni proprie e c_0 è la chiusura di c_{00} rispetto alla norma di ℓ^∞.*

Dimostrazione. (1) $\ell^p, \ell^\infty, c_{00}, c_0$ sono chiusi per moltiplicazione per scalari di $\mathbb{K}$, inoltre ℓ^∞, c_{00}, c_0 sono ovviamente chiusi rispetto alla somma in $\mathcal{S}$. Resta da provare che la somma di due elementi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ appartiene ad ℓ^p per $p \geq 1$. Per il Lemma 1, si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n + y_n|^p \leq (|x_n| + |y_n|)^p \leq 2^{n-1}(|x_n|^p + |y_n|^p),$$

da cui:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq 2^{n-1} \left(\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^p_{\ell^p} + \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^p_{\ell^p}\right) < \infty.$$

(2) Supponiamo $p, p' \neq 1, +\infty$, e che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq 0$ altrimenti la disuguaglianza è banale. Utilizziamo la prima delle disuglianze del Lemma 1, ponendo $a = |x_n|/\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p}$ e $b = |y_n|/\|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^{p'}}$. Si ha allora:

$$\frac{|x_n y_n|}{\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} \cdot \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^{p'}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_n|^p}{\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^p_{\ell^p}} + \frac{1}{p'} \frac{|y_n|^{p'}}{\|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^{p'}_{\ell^{p'}}}.$$

Sommando e ricordando la definizione della norma in ℓ^p, si ha:

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|}{\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} \cdot \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^{p'}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

(3) Supponiamo $p > 1$ e $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| \cdot \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\| \neq 0$ altrimenti la disuguaglianza è banalmente vera.
Si ha:

$$|x_n + y_n|^p \leq |x_n + y_n|^{p-1}(|x_n| + |y_n|) = |x_n||x_n + y_n|^{p-1} + |y_n||x_n + y_n|^{p-1}$$

Poiché $(p-1)q = p$ e ℓ^p è spazio vettoriale, si ha che $(|x_n + y_n|^{p-1})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ e vale $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{(p-1)q} = \|x_n + y_n\|^p_{\ell^p}$. Sommando e applicando la disuguaglianza di di Hölder, si ottiene allora:

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^p_{\ell^p} &\leq \|(|x_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1})_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} + \|(|y_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1})_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} \\
&\leq \left(\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} + \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p}\right) \|(|x_n + y_n|^{p-1})_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^q} \\
&\leq \left(\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} + \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&\leq \left(\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} + \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{p}\right)^{1-1/p} \\
&= \left(\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} + \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p}\right) \cdot \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^{p-1}_{\ell^p}
\end{aligned}$$

Segue la tesi dividendo per $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^{p-1}$.

(4) Il fatto che $\|\cdot\|_{\ell^p}$ con $p \geq 1$ sia una norma su ℓ^p segue dalla disuguaglianza di Minkowski (disuguaglianza triangolare), le altre due proprietà delle norme sono di verifica immediata. Proviamo ora la completezza. Sia $\left((x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in ℓ^p, ciò vuol dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che se $n, m > \nu$ si ha:

$$\|(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} - (x_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}}\|^p_{\ell^p} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p < \varepsilon^p.$$

Ma questo implica che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che se $n, m > \nu$ vale $|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, ovvero la successione $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{K}$, dunque convergente, per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ definiamo $x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$. Proviamo ora che

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ e che $\lim_{n\to\infty} \|(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} - (x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} = 0$ ovvero che $(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge in norma ℓ^p a $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Fissato $N \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p < \varepsilon^p,$$

e passando al limite per $m \to \infty$ si ottiene

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k|^p < \varepsilon^p.$$

Passando al limite per $N \to \infty$ si ha infine:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^p < \varepsilon^p,$$

come voluto.

(5) La dimostrazione è analoga alla precedente.

(6) sia $1 \le p < r < \infty$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Proviamo che se $x \in \ell^r$ si ha $\|x\|_{\ell^\infty} \le \|x\|_{\ell^r}$. Infatti per ogni i vale

$$|x_i| = (|x_i|^r)^{1/r} \le \left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^r\right)^{1/r} = \|x\|_{\ell^r},$$

da cui $\|x\|_{\ell^\infty} \le \|x\|_{\ell^r}$. Osserviamo inoltre che se $x \in c_0$ vale $\|x\|_{\ell^\infty} = \max\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$ ed è ovvio che $c_0 \supset \ell^p$. Resta da provare la disuguaglianza $\|x\|_{\ell^r} \le \|x\|_{\ell^p}$ se $p < r$. Supponiamo $x \neq 0$ altrimenti la disuguaglianza è vera. Dividendo ambo i membri per $\|x\|_\infty$, possiamo ridurci al caso di provare la disuguaglianza $\|x\|_{\ell^r} \le \|x\|_{\ell^p}$ solo sugli elementi $x \in \ell^p$ con $\|x\|_{\ell^\infty} = 1$. In generale si ha $|x_i| \le 1$, per cui (essendo $p < r$ si ha $|x_i|^r \le |x_i|^p$) si ottiene:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^r \le \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p$$

Osserviamo ora che poiché $x \in c_0$, si ha che uno degli $|x_i|$ vale 1, quindi $\sum |x_i|^r \ge 1$, da cui, poiché $1/r < 1/p$, si ottiene:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^r\right)^{1/r} \le \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^r\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_{\ell^p},$$

il che prova l'inclusione degli spazi e la disuguaglianza delle norme, essendo il membro più a sinistra pari a $\|x\|_{\ell^r}$. L'inclusione $\ell^p \subset \ell^r$ è propria perché $(1/(n+1)^{1/p})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^r \setminus \ell^p$. Si ha che l'inclusione $c_0 \supset \bigcup_{r\ge1} \ell^r$ è propria perché $(\log(1/(n+2)))_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \setminus \ell^r$ per ogni r.

(7) Il fatto che c_{00} sia contenuto in ℓ^p per ogni p e che l'inclusione sia propria è ovvio. Proviamo che la chiusura di c_{00} in ℓ^p rispetto alla norma di ℓ^p è proprio ℓ^p. Sia infatti $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ e poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ $x_k^{(n)} = x_k$ se $k \le n$, $x_k^{(n)} = 0$ se $k > n$. Si ha allora che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \in c_{00}$, inoltre:

$$\|(x_k)_{k\in\mathbb{N}} - (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p}^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p$$

che tende a 0 per $n \to \infty$ perché $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$.

(8) Sia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$ e poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ $x_k^{(n)} = x_k$ se $k \le n$, $x_k^{(n)} = 0$ se $k > n$. Si ha allora che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \in c_{00}$, inoltre dato $\varepsilon > 0$ per $\bar{n}$ sufficientemente grande si ha $|x_k| < \varepsilon$ se $k > \bar{n}$. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che se $n > \bar{n}$ vale:

$$\|(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} - (x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^\infty} = \sup_{k>n} |x_k| < \varepsilon.$$

Quindi c_{00} è denso in c_0 Per concludere a questo punto è necessario provare che c_0 è chiuso per la norma di ℓ^∞. Sia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nella chiusura di c_0. Allora esiste una successione $\left((x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ e $\bar{n}>0$ tale che per ogni $\varepsilon>0$ si abbia

$$\|(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} - (x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^\infty} < \varepsilon,$$

se $n>\bar{n}$. Per densità non è restrittivo supporre $(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \in c_{00}$. Si ha allora per $k>n>\bar{n}$:

$$|x_k| \le \|(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} - (x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^\infty} < \varepsilon$$

da cui $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$.

□

Proposizione 5 (spazio duale di ℓ^p)**.**

(1) *Il duale di ℓ^1 è ℓ^∞.*
(2) *Il duale di ℓ^∞ contiene ℓ^1.*
(3) *Se $1<p<\infty$, e p' è l'esponente coniugato di p, allora il duale di ℓ^p è $\ell^{p'}$.*
(4) *Il duale di c_0 è ℓ^1.*

Dimostrazione.

(1) Sia $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1$, $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$. Poniamo $T_a x=\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$. Si ha $T_a\in(\ell^1)^*$ e $\|T_a\|_{(\ell^1)^*}=\|a\|_{\ell^\infty}$, infatti:

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n x_n| \le \|a\|_{\ell^\infty}\|x\|_{\ell^1},$$

e $\sup_{n\in\mathbb{N}}|T_a(e_n)|=\sup|a_n|=\|a\|_{\ell^\infty}$.
Dato $f\in(\ell^1)^*$, poniamo $a_n=f(e_n)$ per $n\in\mathbb{N}$. Proviamo che la successione $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$. Si ha infatti $|a_n|\le\|f\|_{(\ell^1)^*}<\infty$, quindi $a\in\ell^\infty$. Si ha che $f=T_a$ con T_a definito sopra sul sottospazio c_{00} che è denso in ℓ^1. Per continuità si ha $f=T_a$ su ℓ^1, e $\|f\|_{(\ell^1)^*}=\|a\|_{\ell^\infty}$. L'applicazione $a\mapsto T_a$ è un'isometria lineare e continua tra ℓ^∞ e $(\ell^1)^*$.
(2) $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$, $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1$. Poniamo $T_a x=\sum_{n=1}^\infty |a_n x_n|$. Poiché $T_a x\le\|x\|_{\ell^\infty}\sum_{n=1}^\infty|a_n|=\|a\|_{\ell^1}\cdot\|x\|_{\ell^\infty}$ si ha che $T_a\in(\ell^\infty)^*$ e inoltre $\|T_a\|_{(\ell^\infty)^*}=\|a\|_{\ell^1}$. Quindi vale l'inclusione $\ell^1\subset(\ell^\infty)^*$, tale inclusione è un'immersione isometrica.
(3) Procede in modo analogo al punto 1.
(4) Si è visto come $c_0\subset\ell^\infty$, pertanto il duale di c_0 contiene ℓ^1. Proviamo l'inclusione opposta. Sia $T\in c_0^*$ e definiamo la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ponendo $a_k=T((e_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}})$, dove $(e_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione i cui elementi sono tutti nulli ad eccezione del k-esimo elemento che vale 1.
Per ogni $k\in\mathbb{N}$ definiamo $p_k\in\{1,-1\}$ tale che $p_kT(e^{(k)}\ge 0$, ed osserviamo che per ogni $N\in\mathbb{N}$ l'elemento definito da $\displaystyle\sum_{k=1}^N p_k e^{(k)}$ appartiene a c_{00}, quindi a c_0, e la sua ℓ^∞ norma è 1. Si ha per ogni $N\in\mathbb{N}$:

$$T\left(\sum_{k=1}^N p_k e^{(k)}\right)=\sum_{k=1}^N|a_k|\le\|T\|_{c_0^*}\left\|\sum_{k=1}^N p_k e^{(k)}\right\|_{c_0}=\|T\|_{c_0^*}<+\infty,$$

perché T è continuo. Quindi passando al limite per $N\to\infty$ si ha

$$\sum_{k=1}^\infty|a_k|=\|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1}\le\|T\|_{c_0^*}<+\infty,$$

e quindi $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^1$. Sia data la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissato $\varepsilon>0$, esiste $\delta>0$ ed $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c_00$, troncato di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $\|x-y\|_{\ell^\infty}<\delta$ e quindi $|T(x)-T(y)|<\varepsilon$. Si ha

$T(y) = \sum_{k=1}^{N} a_k x_k$ da cui, per densità e continuità di T si ricava

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

da cui $|T(x)| \leq \|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} \cdot \|x\|_{\ell^\infty}$, e quindi $\|T\|_{c_0^*} \leq \|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1}$ che porge $\|T\|_{c_0^*} = \|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1}$. In modo del tutto analogo si prova che il duale del sottospazio di ℓ^∞ costituito dalle successioni *convergenti* è ℓ^1.

□

Proposizione 6. *Esiste un funzionale lineare e continuo da ℓ^∞ a $\mathbb{R}$ che non è rappresentabile da un elemento di ℓ^1, pertanto l'inclusione di ℓ^1 in $(\ell^\infty)^*$ è stretta.*

Dimostrazione. Definiamo lo spazio vettoriale:

$$c := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S} : (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ è convergente } \}.$$

Si ha che c è sottospazio di ℓ^∞, infatti per definizione di successione convergente si ha che esiste $N > 0$ tale per cui se $n > N$ allora

$$\left| x_n - \lim_{k\to\infty} x_k \right| < 1$$

da cui per $n > N$ si ha

$$|x_n| \leq |\lim_{k\to\infty} x_k| + 1.$$

Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, ..., |x_N|\} + |\lim_{k\to\infty} x_k| + 1 < +\infty$$

e quindi $c \subset \ell^\infty$. L'inclusione è stretta perché esistono successioni limitate non convergenti, ad esempio $x_k = (-1)^k$.
Su c definiamo il seguente funzionale lineare $L : c \to \mathbb{R}$ dato da $L((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \lim_{k\to\infty} x_k$. La linearità di tale operatore è ovvia per la linearità dell'operazione di limite.
Si ha inoltre che $|x_k| \leq \|x\|_{\ell^\infty}$ pertanto

$$|L((x_k)_{k\in\mathbb{N}})| = \left| \lim_{k\to\infty} x_k \right| \leq \|x\|_{\ell^\infty},$$

pertanto $L : c \to \mathbb{R}$ è lineare e continuo e $\|L\|_{(\ell^\infty)^*} \leq 1$. Valutando sulla successione che vale identicamente 1 si ottiene $\|L\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$. Per il teorema di Hahn-Banach, L si estende ad un'applicazione lineare e continua da ℓ^∞ in $\mathbb{R}$ di norma 1 chiamata limite di Banach (l'estensione in generale non è unica), quindi tale applicazione appartiene a $(\ell^\infty)^*$. Proviamo che non esiste nessuna $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ tale per cui si abbia:

$$L((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \qquad \text{per ogni } (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c.$$

E' sufficiente mostrarlo per $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c$. Per assurdo supponiamo che esista $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \qquad \text{per ogni } (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c.$$

Presa la successione identicamente uguale a 1 si ottiene $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$. Sia ora $\{x_k^{(N)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ la successione che vale 1 nei primi N termini e 0 altrove. Si ha per ogni $N \in \mathbb{N}$

$$0 = \lim_{k\to\infty} x_k^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

In particolare per $N = 1$ si ottiene $a_1 = 0$, per $N = 2$ si ottiene $a_1 + a_2 = 0$ da cui $a_2 = 0$. Per induzione si ha che $a_k = 0$ per ogni k. Tuttavia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$, ciò è assurdo.
Il limite di Banach gode delle seguenti proprietà, che discendono dal comportamento sul sottospazio c:

(1) se $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, e definiamo $y_k = x_{k+1}$, allora $L((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = L((y_k)_{k\in\mathbb{N}})$;

(2) se $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, ed esiste N tale $x_n \geq 0$ per ogni $n > N$ allora $L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \geq 0$.

□

Proposizione 7 (Disuguaglianza di Chebyshov). *Sia (X, Σ, μ) uno spazio con misura (ovvero X è un insieme, Σ è una σ-algebra di parti di X e $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ è una misura). Sia $f \in L^p(X)$, ovvero $\displaystyle\int_X |f|^p \, d\mu < +\infty$. Allora per ogni $\alpha > 0$, posto $X_\alpha = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$, si ha:*

$$\mu(X_\alpha) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\alpha} \right)^p .$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X |f|^p \, d\mu = \int_{X_\alpha} |f|^p \, d\mu + \int_{X\setminus X_\alpha} |f|^p \, d\mu \geq \int_{X_\alpha} |f|^p \, d\mu \geq \alpha^p \mu(X_\alpha).$$

□

Proposizione 8 (Limite delle p-norme). *Sia (X, Σ, μ) uno spazio con misura, $p_0 \geq 1$. Supponiamo che $f : X \to \mathbb{C}$ sia misurabile e che $f \in L^p(X)$ per ogni $p > p_0$. Allora esiste (finito o infinito) il $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p}$ e si ha:*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}.$$

Dimostrazione. Fissiamo $0 < \alpha < \|f\|_{L^\infty}$. L'insieme $\{x \in X : |f(x)| \geq \alpha\}$ ha misura non nulla, perché $\alpha < \|f\|_{L^\infty}$. Tale insieme ha misura finita perché $f \in L^p(X)$ per p sufficientemente grande, quindi dalla disuguaglianza di Chebyshov si ha

$$\|f\|_{L^p} \geq \alpha \, \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \alpha\})^{1/p},$$

da cui $\liminf\limits_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geq \alpha$, per ogni $\alpha < \|f\|_{L^\infty}$, quindi $\liminf\limits_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^\infty}$. Per $p > p_0$ si ha anche per μ-q.o. $x \in X$:

$$|f(x)|^p = |f(x)|^{p-p_0} \cdot |f(x)|^{p_0} \leq |f(x)|^{p_0} \|f\|_{L^\infty}^{p-p_0}.$$

Integrando ed elevando ambo i membri alla potenza $1/p$ si ha:

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_0}}^{p_0/p} \|f\|_{L^\infty}^{1-p_0/p},$$

da cui

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

In definitiva:

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty} \leq \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p},$$

da cui la tesi. □

5. Esercitazione del giorno 3 novembre 2009 (2 ore): sul teorema di Hahn-Banach, separazione di convessi

Esercizio 18. Sia $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ fissato e si consideri il sottospazio vettoriale G di $\mathbb{K}^2$ definito da $G = \mathbb{K} \times \{0\}$. Si consideri su $\mathbb{K}^2$ la norma $\|\cdot\|_p$ definita per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$ da

$$\|(x_1, x_2)\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} \text{ se } 1 \leq p \leq \infty, \\ \max\{|x_1|, |x_2|\} \text{ se } p = \infty. \end{cases}$$

Si consideri il funzionale $T : (G, \|\cdot\|_p) \to \mathbb{K}$ definito da $T(x_1, 0) = \alpha x_1$. Si descrivano le estensioni lineari e continue $\tilde{T}$ di T a tutto lo spazio $(\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_p)$ che abbiano la stessa norma di T.

Svolgimento. Calcoliamo la norma di T: $|T(x_1,0)| = |\alpha||x_1|$. Qualunque sia p, si ha $\|(x_1,0)\|_p = 1$ se e solo se $|x_1| = 1$, quindi $\|T\| = |\alpha|$. Sia $\tilde{T}$ una delle estensioni di T descritte nell'enunciato:

$$\tilde{T}(x_1,x_2) = x_1\tilde{T}(1,0) + x_2\tilde{T}(0,1) = x_1 T(1,0) + x_2\tilde{T}(0,1) = \alpha x_1 + x_2\tilde{T}(0,1),$$

pertanto $\tilde{T}$ è completamente caratterizzata da $\beta = \tilde{T}(0,1)$ e $\tilde{T}(x_1,x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$. Qualunque scelta di $\beta \in K$ rende $\tilde{T}$ continua.
Sia q l'esponente coniugato di p. Dalla disuguaglianza di Hölder si ha:

$$|\tilde{T}(x_1,x_2)| = |(\alpha,\beta)(x_1,x_2)| \leq \|(\alpha,\beta)\|_q \|(x_1,x_2)\|_p$$

Quindi $\|\tilde{T}\| \leq \|(\alpha,\beta)\|_q$. Proviamo che in realtà vale l'uguaglianza. Se $\beta = 0$ l'uguaglianza è banale, per cui studiamo i casi con $|\beta| \neq 0$.

(1) Sia $1 < p < +\infty$. Poniamo $x_1 = \lambda_1\alpha/|\alpha|$ e $x_2 = \lambda_2\beta/|\beta|$, e consideriamo la seguente funzione definita in $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$g(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\tilde{T}(x_1,x_2)}{\|(x_1,x_2)\|_{\ell^p}} = \frac{|\alpha|\lambda_1 + |\beta|\lambda_2}{(\lambda_1^p + \lambda_2^p)^{1/p}}$$

Calcoliamone le derivate parziali:

$$\begin{aligned}
\partial_1 g(\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{|\alpha|(\lambda_1^p+\lambda_2^p)^{1/p} - (|\alpha|\lambda_1+|\beta|\lambda_2)\frac{1}{p}(\lambda_1^p+\lambda_2^p)^{1/p-1}p\lambda_1^{p-1}}{(\lambda_1^p+\lambda_2^p)^{2/p}} \\
&= \frac{|\alpha|(\lambda_1^p+\lambda_2^p)^{1/p} - (|\alpha|\lambda_1+|\beta|\lambda_2)(\lambda_1^p+\lambda_2^p)^{1/p-1}\lambda_1^{p-1}}{(\lambda_1^p+\lambda_2^p)^{2/p}} \\
&= \frac{|\alpha| - (|\alpha|\lambda_1+|\beta|\lambda_2)(\lambda_1^p+\lambda_2^p)^{-1}\lambda_1^{p-1}}{(\lambda_1^p+\lambda_2^p)^{1/p}} \\
&= \frac{|\alpha|(\lambda_1^p+\lambda_2^p) - (|\alpha|\lambda_1+|\beta|\lambda_2)\lambda_1^{p-1}}{(\lambda_1^p+\lambda_2^p)^{1+1/p}} \\
&= \frac{|\alpha|\lambda_2^p - |\beta|\lambda_2\lambda_1^{p-1}}{(\lambda_1^p+\lambda_2^p)^{1+1/p}} = (|\alpha|\lambda_2^{p-1} - |\beta|\lambda_1^{p-1})\,\frac{\lambda_2}{(\lambda_1^p+\lambda_2^p)^{1+1/p}}
\end{aligned}$$

Simmetricamente si ha:

$$\partial_2 g(\lambda_1,\lambda_2) = -(|\alpha|\lambda_2^{p-1} - |\beta|\lambda_1^{p-1})\,\frac{\lambda_1}{(\lambda_1^p+\lambda_2^p)^{1+1/p}}.$$

Tali derivate sono simultaneamente nulle solo se $\lambda_1 = \mu|\alpha|^{1/(p-1)}$ e $\lambda_2 = \mu|\beta|^{1/(p-1)}$, $\mu > 0$. Scegliamo $\mu = 1$. Osserviamo che poiché $1/p + 1/q = 1$, si ha $p = q/(q-1)$ e quindi $p-1 = 1/(q-1)$, quindi $\lambda_1 = |\alpha|^{q-1}$ e $\lambda_2 = |\beta|^{q-1}$. Inoltre $p(q-1) = pq(1-1/q) = q$. Con questa scelta di λ_1,λ_2, si ha $x_1 = |\alpha|^{q-2}\alpha$, $x_2 = |\beta|^{q-2}\beta$,

$$\begin{aligned}
T(x_1,x_2) &= |\alpha|^q + |\beta|^q \\
\|(x_1,x_2)\|_{\ell^p} &= (|\alpha|^{p(q-2)+p} + |\beta|^{p(q-2)+p})^p = (|\alpha|^{p(q-1)} + |\beta|^{p(q-1)})^{1/p} \\
&= (|\alpha|^q + |\beta|^q)^{1/p} \\
\frac{T(x_1,x_2)}{\|(x_1,x_2)\|_{\ell^p}} &= (|\alpha|^q + |\beta|^q)^{1-1/p} = \|(\alpha,\beta)\|_{\ell^q}
\end{aligned}$$

per cui vale l'uguaglianza.

(2) Per i casi $p = 1, +\infty$ passiamo al limite nella relazione precedente:

$$\lim_{p\to\infty}\|\tilde{T}\| = \lim_{p\to\infty}\|(\alpha,\beta)\|_{\ell^q} = \lim_{q\to 1}\|(\alpha,\beta)\|_{\ell^q} = \|(\alpha,\beta)\|_{\ell^1}$$

$$\lim_{p\to 1}\|\tilde{T}\| = \lim_{p\to 1}\|(\alpha,\beta)\|_{\ell^q} = \lim_{q\to\infty}\|(\alpha,\beta)\|_{\ell^q} = \|(\alpha,\beta)\|_{\ell^\infty}$$

Calcoliamo la norma di $\tilde{T}$ al variare di p.

(1) Nel caso $1 < p < \infty$ si ha $\|\tilde{T}\| = (|\alpha|^{p'} + |\beta|^{p'})^{1/p'}$. Si deve avere $\|\tilde{T}\| = \|T\|$, ciò implica che $\beta = 0$. Quindi l'estensione è unica ed è definita da $\tilde{T}(x_1,x_2) = \alpha x_1$.

(2) Nel caso $p = \infty$ si ha $p' = 1$ e $\|\tilde{T}\| = |\alpha| + |\beta|$. Si deve avere $\|\tilde{T}\| = \|T\|$, ciò implica che $\beta = 0$. Quindi l'estensione è unica ed è definita da $\tilde{T}(x_1, x_2) = \alpha x_1$.
(3) Nel caso $p = 1$, si ha $p' = \infty$ e $\|\tilde{T}\| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Si deve avere $\|\tilde{T}\| = \|T\|$, ciò implica che $|\beta| \leq |\alpha|$. Vi sono quindi infinite estensioni $\tilde{T}(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$, caratterizzate da $|\beta| \leq |\alpha|$.

Definizione 7. Siano (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici. Ricordiamo che una funzione $f : X \to Y$ si dice *uniformemente continua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $d_X(x_1, x_2) < \delta$ allora $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Osservazione 2. La condizione di uniforme continuità è una condizione globale, a differenza della semplice continuità che era una condizione puntuale (infatti si parla di continuità in un punto). Si prova che se X è compatto, allora ogni funzione continua è uniformemente continua, il viceversa non è vero: $f(x) = \sin(1/x)$, $g(x) = 1/x$ sono continue su $]0, +\infty[$ ma non uniformemente continue.

Esercizio 19. Siano X spazio di Banach, G sottospazio di X, G denso in X, $g : G \to \mathbb{R}$ lineare e continua. Allora esiste un'unica funzione lineare e continua f tale che $f_{|G} = g$ e $\|f\| = \|g\|$.

Svolgimento. Ogni funzione uniformemente continua g si estende in modo unico ad una funzione continua fino alla chiusura del suo dominio:

(1) Sia $x \in X$, allora esiste $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione in G tale per cui $x_n \to x$ perché G è denso.
(2) La successione $\{g(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy: per l'uniforme continuità di g, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|z - y\| < \delta$ allora $|g(z) - g(y)| < \varepsilon$. Dato che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, essa è di Cauchy, quindi esiste $N > 0$ tale che se $n, m > N$ allora $\|x_n - x_m\| < \delta$, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che se $n, m > N$ si ha $|g(x_n) - g(x_m)| < \varepsilon$.
(3) Essendo $\mathbb{R}$ completo, $g(x_n)$ converge a un elemento che chiameremo $f(x)$.
(4) Il limite non dipende dalla particolare successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in G con $x_n \to x$ scelta: se $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un'altra successione in G che tende a x, allora $|g(y_n) - f(x)| \leq |g(y_n) - g(x_m)| + |g(x_m) - f(x)|$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale per cui se $\|z - v\| < \delta$ allora $|g(z) - g(v)| < \varepsilon$ e per m sufficientemente grande anche $|g(x_m) - f(x)| < \varepsilon$. D'altra parte $\|y_n - x_m\| \leq \|y_n - x\| + \|x - x_m\|$, quindi per n, m sufficientemente grandi si ha $\|y_n - x_m\| \leq \delta$ quindi $|g(y_n) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ per n sufficientemente grande.
(5) Proviamo che f è uniformemente continua: poiché g è uniformemente continua, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|x' - y'\| < 3\delta$ allora $|g(x') - g(y')| < \varepsilon/3$. D'altra parte siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ successioni in G convergenti rispettivamente a x e y. Per n sufficientemente grande si ha $|f(x) - g(x_n)| < \varepsilon/3$ e $|g(y_n) - f(y)| < \varepsilon/3$.
$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(y_m)| + |g(y_m) - f(y)| \\ &< 2\varepsilon/3 + |g(x_n) - g(y_m)|. \end{aligned}$$
Per n, m sufficientemente grandi si ha anche $\|x - x_n\| < \delta$, $\|y_m - y\| < \delta$. Si ha $\|x_n - y_m\| \leq \|x - x_n\| + \|x - y\| + \|y_m - y\| \leq 2\delta + \|x - y\|$. Se $\|x - y\| < \delta$ allora $\|x_n - y_m\| < 3\delta$ e quindi $|g(x_n) - g(y_m)| < \varepsilon/3$ e quindi $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Si conclude che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|x - y\| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
(6) Unicità: sia h un'altra estensione continua di g. Allora
$$h(x) = \lim_{\substack{y\to x\\ y\in G}} h(y) = \lim_{\substack{y\to x\\ y\in G}} g(y) = f(x).$$
(7) Se g è lineare e continua, allora è anche uniformemente continua: g è continua in 0 quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|z\| \leq \delta$ allora $|g(z)| < \varepsilon$. Quindi se $x, y \in X$, $\|x - y\| < \delta$ allora $|g(x) - g(y)| = |g(x - y)| < \varepsilon$.
(8) per i punti precendenti, g ammette un'estensione unica ad una funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$.
(9) Proviamo che f è lineare:
$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \lim_{\substack{z\to x\\ v\to y\\ z,v\in G}} f(\alpha z + \beta v) = \lim_{\substack{z\to x\\ v\to y\\ z,v\in G}} g(\alpha z + \beta v) = \lim_{\substack{z\to x\\ v\to y\\ z,v\in G}} \alpha g(z) + \beta g(v) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Definizione 8. Sia X uno spazio vettoriale. $C \subseteq X$ un insieme non vuoto. Diremo che C è *convesso* se per ogni $x, y \in C$, $t \in]0,1[$ si ha $tx + (1-t)y \in C$.

Definizione 9. Sia X spazio normato, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Definiamo l'*epigrafico di* f:

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : \alpha \geq f(x)\}.$$

Diremo che f è *semicontinua inferiormente* (brevemente s.c.i o l.s.c.) se $f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(x)$. Diremo che f è *semicontinua superiormente* (brevemente s.c.s. o u.s.c.) se $f(x) \geq \limsup_{y \to x} f(x)$. Una funzione f è continua se e solo se è simultaneamente s.c.i. e s.c.s. Diremo che una funzione è *convessa* se il suo epigrafico è convesso.

Esercizio 20. Sia X spazio normato, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Allora f è s.c.i. se e solo se $\mathrm{epi}(f)$ è chiuso in $X \times \mathbb{R}$, inoltre f è s.c.i. se e solo se $-f$ è s.c.s.

Svolgimento. Supponiamo f s.c.i. Sia (x_n, α_n) una successione in $\mathrm{epi}(f)$ convergente in $X \times \mathbb{R}$ a (x, α). Poiché $f(x_n) \leq \alpha_n$, si ha

$$f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n) \leq \liminf_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha,$$

quindi $(x, \alpha) \in \mathrm{epi}(f)$, pertanto $\mathrm{epi}(f)$ è chiuso.
Supponiamo $\mathrm{epi}(f)$ chiuso e sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tale che

$$\liminf_{y \to x} f(y) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

La successione $\{(x_n, f(x_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione nel chiuso $\mathrm{epi}(f)$ convergente in $X \times \mathbb{R}$, quindi il suo limite appartiene a $\mathrm{epi}(f)$, ovvero

$$\left(x, \lim_{n \to \infty} f(x_n)\right) = \left(x, \liminf_{y \to x} f(y)\right) \in \mathrm{epi}(f)$$

e ciò vuol dire che $f(x) \leq \liminf\limits_{y \to x} f(y)$, quindi f è s.c.i. L'ultimo asserto è ovvio.

Esercizio 21. Sia X uno spazio vettoriale normato. $C \subseteq X$ un insieme convesso non vuoto. Si provi che $\bar{C}$ è convesso e $\mathrm{int}(C)$ è convesso se non vuoto. Inoltre $\bar{C} = \overline{\mathrm{int}(C)}$ se $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$.

Svolgimento. Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione in C convergente a $x \in \bar{C}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione in C convergente a $y \in \bar{C}$. Dato $t \in [0,1]$, l'elemento $z_n := tx_n + (1-t)y_n \in C$ per convessità. Si ha che $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $z = tx + (1-t)y$ e poiché $z_n \in C$, si ha anche $z \in \bar{C}$.
Siano $x, y \in \mathrm{int}(C) \neq \emptyset$, $t \in [0,1]$ e proviamo che $tx + (1-t)y \in \mathrm{int}(C)$. Siano $\rho_x, \rho_y > 0$ tali che $B(x, \rho_x) \subset C$ e $B(y, \rho_y) \subset C$. Proviamo che $B(tx + (1-t)y, t\rho_x + (1-t)\rho_y) \subseteq C$. Dato $w \in B(tx + (1-t)y, t\rho_x + (1-t)\rho_y)$, si ha $w = tx + (1-t)y + (t\rho_x + (1-t)\rho_y)h$ con $h \in X$, $\|h\| \leq 1$. Ma allora

$$w = t(x + \rho_x h) + (1-t)(y + \rho_y h)$$

e $x + \rho_x h \in C$, $y + \rho_y h \in C$, quindi $w \in C$, perciò $B(tx + (1-t)y, t\rho_x + (1-t)\rho_y) \subseteq C$ e quindi $tx + (1-t)y \in \mathrm{int}(C)$ che risulta pertanto convesso.
Ovviamente $\bar{C} \supseteq \overline{\mathrm{int}(C)}$. Proviamo il viceversa. Sia $x \in \bar{C}$, $y \in \mathrm{int}(C)$. Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione in C convergente a x. Sia $\rho_y > 0$ tale per cui $B(y, \rho_y) \subseteq C$. Allora dato $h \in X$, $|h| \leq 1$, per ogni $t \in [0,1]$ si ha $tx_n + (1-t)(y + \rho_y h) \in C$ per convessità. In particolare, $B(tx_n + (1-t)y, (1-t)\rho_y) \subseteq C$, quindi $tx_n + (1-t)y \in \mathrm{int}(C)$ per ogni $t \in [0,1[$. Se $t_n = 1 - 1/n$, si ha allora $\{t_n x_n + (1-t_n)y\}_{n \in \mathbb{N}}$ è successione in $\mathrm{int}(C)$ convergente a x in X, quindi $x \in \overline{\mathrm{int}(C)}$.

Esercizio 22. Sia X è spazio vettoriale e $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è famiglia arbitraria di convessi, $C = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. Allora se $C \neq \emptyset$ si ha che C è convesso.

Svolgimento. Siano $x, y \in C$. Allora per ogni $t \in [0,1]$, $\lambda \in \Lambda$ si ha $tx + (1-t)y \in C_\lambda$ perché C_λ è convesso. Quindi $tx + (1-t)y \in C$.

Definizione 10. Sia X spazio vettoriale, S sottinsieme di X non vuoto. Definiamo l'*involucro convesso di S*:

$$\mathrm{co}(S) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_i x_i : n \in \mathbb{N},\, x_1, ..., x_n \in S,\, \alpha_1, ..., \alpha_n \in [0,1],\, \sum_{k=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Si ha che $\mathrm{co}(S)$ è convesso e se K è un convesso di X contenente S allora $K \supseteq \mathrm{co}(S)$, quindi $\mathrm{co}(S)$ è il più piccolo convesso di X contenente S, intersezione di tutti i convessi contenenti S (la famiglia dei convessi di X contenenti S è non vuota perché X è convesso e $S \subseteq X$).

Dimostrazione. Ovviamente $\mathrm{co}(S) \supseteq S$, basta scegliere $n = 1$, $x_1 = x \in S$. Proviamo la convessità: siano $x, y \in S$, $t \in [0,1]$. Allora esistono $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_j \in [0,1]$, $x_i, y_j \in S$ con $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$ tali per cui

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \qquad\qquad y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_i,$$

quindi

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{n} t\alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (1-t)\beta_j y_i$$

Poniamo $z_k = x_k$, $\gamma_k = t\alpha_i$ se $1 \leq k \leq n$ e $z_{k+i} = y_i$, $\gamma_{k+i} = (1-t)\beta_i$ per $1 \leq i \leq m$. Si ha $z_k \in S$ e $\gamma_k \in [0,1]$ per $k = 1, ..., n+m$, inoltre

$$\sum_{k=1}^{n+m} \gamma_k = t \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + (1-t) \sum_{j=1}^{m} \beta_j = t + (1-t) = 1,$$

e pertanto $tx + (1-t)y \in \mathrm{co}(S)$. □

Esercizio 23. Sia X normato, G sottospazio di X, $g : G \to \mathbb{R}$ lineare e continua. Allora l'insieme:

$$F := \{\tilde{f} : X \to \mathbb{R} \text{ lineare e continua tale che } \tilde{f}_{|G} = g \text{ e } \|\tilde{f}\| = \|g\|\}$$

è convesso. In particolare, se g ammette due estensioni, allora ne ammette infinite.

Svolgimento. Siano $f_1, f_2 \in F$ e poniamo $f_t(x) = tf_1(x) + (1-t)f_2(x)$ per ogni $t \in [0,1]$. La funzione f_t è lineare e continua, inoltre se $x \in G$ si ha $f_t(x) = tg(x) + (1-t)g(x) = g(x)$, quindi f_t estende g. Si ha, ricordando che $\|f_1\| = \|f_2\| = \|g\|$:

$$|f_t(x)| \leq t|f_1(x)| + (1-t)|f_2(x)| \leq t\|f_1\| \cdot \|x\| + (1-t)\|f_2\| \cdot \|x\| = \|g\|\|x\|$$

quindi $\|f_t\| \leq \|g\|$. D'altra parte f_t estende g, quindi $\|f_t\| \geq \|g\|$ e quindi $f_t \in F$.

Esercizio 24. Sia X normato. Si mostri con un esempio che in generale può non esistere $q \in B := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ tale per cui $\|p\|_{X'} = p(q)$ per ogni $p \in X'$.

Svolgimento. Consideriamo $X = C^0([0,1])$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$. Consideriamo il seguente funzionale $p : X \to \mathbb{R}$

$$p(q) = \int_0^1 q(t)\, dt - q(0)$$

Tale funzionale è lineare e inoltre $|p(q)| \leq 2\|q\|_\infty$, quindi è continuo e $\|p\|_{X'} \leq 2$. Proviamo che esiste una successione $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X con $\|q_n\| = 1$ tale per cui $\lim p(q_n) = 2$ Definiamo tale successione ponendo $q_n(0) = -1$, $q_n(t) = 1$ se $t \geq 1/n$ e per $0 < t < 1/n$ sia $q_n(t) = -1 + 2nt$. Si ha $q_n(x) \to 1$ per q.o. $x \in [0,1]$ Si ha ovviamente $\|q_n\|_\infty = 1$ e applicando il teorema della Convergenza dominata

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 q_n(t) - q_n(0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 q_n(t) + 1 = 2$$

quindi effettivamente $\|p\| = 2$.
Supponiamo ora che esista $q \in X$ con $\|q\|_\infty = 1$ per cui $p(q) = 2$. Si ha in particolare $-1 \leq q(0) \leq 1$

$$\int_0^1 q(t)\, dt - q(0) \leq 1 - q(0) \leq 2.$$

Affinché si abbia $1 - q(0) = 2$ è necessario che $q(0) = -1$. Si ha che $\displaystyle\int_0^1 q(t)\,dt = 1$ se e solo se $q(t) = 1$ per q.o. $t \in [0,1]$. Per continuità, si ha che $q(t) = 1$ per ogni $t \in]0,1[$ ma allora si deve avere $q(0) = 1$ e quindi $q(0) = 1$. Quindi $p(q) < 2$ per ogni $q \in B$.

6. Esercitazione del giorno 10 novembre 2009 (2 ore): sul lemma di Baire e il teorema di Banach-Steinhaus

Esercizio 25. Sia $X = [0,1]$. Si dimostri che non è possibile scrivere $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$, con dove $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di chiusi non vuoti due a due disgiunti. (Sugg. posto $F = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \partial F_n$ si dimostri che F è chiuso in X e che ogni ∂F_n ha parte interna vuota in F.)

Svolgimento. Supponiamo per assurdo che $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ con F_n chiusi non vuoti a due a due disgiunti e sia $F = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \partial F_n$.

Osserviamo che non tutti gli F_n possono avere interno vuoto, altrimenti per il lemma di Baire si avrebbe che l'interno di $[0,1]$ sarebbe vuoto, pertanto qualche F_n ha interno non vuoto.

Dato $x \in X$, si ha che esiste un solo $n \in \mathbb{N}$ tale per cui $x \in F_n$, quindi $x \in \mathrm{int}(F_n)$ oppure $x \in \partial F_n$. Pertanto si ha $X = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{int}(F_n) \cup F$, unione disgiunta. Poiché $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{int}(F_n)$ è aperto, si ha che F è chiuso, quindi compatto perché limitato.

Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in F. Per compattezza di $[0,1]$, si ha che essa converge, e poiché F è chiuso, essa converge ad un elemento di F. Pertanto F è uno spazio metrico completo.

Si ha che ∂F_n è chiuso in F perché F è chiuso. Proviamo che l'interno di ∂F_n in F è vuoto. Sia $x \in \partial F_n$, supponiamo che esista $V_k = B(x, 1/k) \cap [0,1]$ tale che $V_k \cap F \subseteq \partial F_n$. Ciò vuol dire:

$$V_k \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} \partial F_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (V_k \cap \partial F_j) \subseteq \partial F_n.$$

Poiché l'unione è disgiunta, ciò implica $V_k \cap \partial F_j = \emptyset$ se $j \neq n$. Per definizione, in V_k cadono punti non appartenenti a F_n, dato che $V_k \cap F \subseteq \partial F_n$ si conclude tali punti non possono appartenere a ∂F_j per nessun j, perciò essi debbono appartenere a $\displaystyle\bigcup_{k\neq n} \mathrm{int}(F_n)$, quindi è possibile costruire una successione in $\displaystyle\bigcup_{k\neq n} \mathrm{int}(F_n)$ che converge a x, sia essa $\{x_h\}_{h\in\mathbb{N}}$.

Se esistesse $M > n$ tale per cui $\{x_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subseteq \displaystyle\bigcup_{\substack{k\neq n\\ k\leq M}} \mathrm{int}(F_n)$, allora si avrebbe (ricordo che la chiusura di un'unione *finita* è l'unione delle chiusure)

$$x \in \overline{\bigcup_{\substack{k\neq n\\ k\leq M}} \mathrm{int}(F_n)} = \bigcup_{\substack{k\neq n\\ k\leq M}} \overline{\mathrm{int}(F_k)} \subseteq \bigcup_{k\neq n} F_k,$$

quindi $x \in F_n \cap \bigcup_{k\neq n} F_n$, ma questi insiemi sono disgiunti, assurdo.

Pertanto si deve avere che esiste una successione $k_h \to \infty$, $k_h \neq n$, tale per cui $x_h \in \mathrm{int}(F_{k_h})$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Se esistesse $\rho > 0$ tale per cui $\mathrm{dist}(x_{k_h}, \partial F_{k_h}) > \rho$, si avrebbe per h sufficientemente grande che $B(x_{k_h}, \rho) \subseteq \mathrm{int}(F_{k_h}) \subseteq F_{k_h}$ e quindi $[0,1]$ conterrebbe un'unione disgiunta di infinite palle di raggio ρ, il che è assurdo, pertanto $\mathrm{dist}(x_{k_h}, \partial F_{k_h}) \to 0$. Ma allora fissato $\varepsilon > 0$ esiste $x_h \in \mathrm{int}(F_{k_h})$ e $y_h \in \partial F_{k_h}$ con $|x_h - x| < \varepsilon/2$ e $|y_h - x_h| < \varepsilon/2$ quindi $|x - y_h| < \varepsilon$. La successione $\{y_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ è una successione in $F \setminus \partial F_n$ che tende a x contro l'ipotesi che $x \in \mathrm{int}_F(\partial F_n)$.

Si conclude lo spazio metrico completo F è ricoperto da una successione numerabile di chiusi non vuoti a parte interna vuota, il che è impossibile per il lemma di Baire.

Esercizio 26. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che per ogni $a > 0$, $f(na) \to 0$ per $n \to +\infty$. Dimostrare che $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. (Usare il lemma di Baire).

Svolgimento. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$X_N := \{a \geq 1 \text{ tali che } |f(na)| \leq \varepsilon, \text{ per ogni } n > N\}.$$

Gli insiemi X_N sono chiusi per ogni $N \in \mathbb{N}$ perché f è continua. Inoltre $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} X_N = [1, +\infty)$: per ogni $a \geq 1$, esiste $N \in \mathbb{N}$, sufficientemente grande, tale che $a \in X_N$ (poiché $f(na) \to 0$ per $n \to +\infty$). Sono quindi verificate le ipotesi del Lemma di Baire, per cui esiste $N_0 \in \mathbb{N}$ tale che X_{N_0} ha interno non vuoto.
Sia $a_0 \in X_{N_0}$, $\delta > 0$ tale per cui $B(a_0, \delta) \subset X_0$. Ciò implica che $|f(ny)| < \varepsilon$ se $y \in]a_0 - \delta, a_0 + \delta[$ e $n > N$, ovvero $|f(t)| < \varepsilon$ se $t \in]n(a_0 - \delta)), n(a_0 + \delta)[=: I_n$, $n > N$. Osserviamo che per n grande si ha $I_n \cap I_{n+1} \neq \emptyset$: infatti $n(a_0 + \delta) > (n + 1)(a_0 - \delta)$ purché $n > \frac{a_0-\delta}{2\delta}$. Quindi l'unione degli I_n contiene un intervallo della forma $]M, +\infty[$, e questo implica che se $t > M$ allora $|f(t)| < \varepsilon$ come richiesto.

Esercizio 27. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione tale per cui per ogni $x \in [0, 1]$ esiste ed è finito

$$\lim_{y\to x} f(y).$$

Dimostrare che l'insieme di discontinuità di f è al più numerabile. Sia poi $A \subset [0, 1]$ un insieme numerabile; fare un esempio di funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che soddisfa la proprietà precedente, che è discontinua in A e continua in $[0, 1] \setminus A$.

Svolgimento. Sia $h \in \mathbb{N}$, $h \neq 0$, e sia $D_h = \{x \in [0, 1] : |f(x) - \lim_{y\to x} f(y)| \geq 1/h\}$. Dalla definizione di limite discende che per ogni $x \in D_h$ esiste $\delta > 0$ tale per cui per ogni $z \in (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}$ si ha $z \notin D_h$. Ne segue che D_h è un insieme discreto in $[0, 1]$ e dunque è al più numerabile. Denotando con D l'insieme di discontinuità per f si ha che $D = \bigcup_h D_h$ per cui anche D è al più numerabile.
Sia ora $A \subset [0, 1]$ un insieme numerabile; possiamo supporre $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$. Sia $b_n \to 0$, $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Definiamo $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ponendo $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 1] \setminus A$ e $f(a_n) = b_n$. Allora f ammette limite 0 per ogni $x \in [0, 1]$: infatti in ogni intorno di $x \in [0, 1]$ cadono infiniti punti di $[0, 1] \setminus A$ sui quali $f = 0$ e, nel caso cadano anche infiniti punti di A, su tali punti $f(a_n) = b_n \to 0$. f è dunque continua su $[0, 1]\setminus A$ ed è discontinua su A essendo $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 28. Sia $M > 0$. Definiamo:

$$C_M = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f \text{ continua} \mid \exists x \in [0, 1] \text{ tale che } |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|, \forall y \in [0, 1]\}.$$

Si dimostri che:

(1) C_M è un sottinsieme chiuso di $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$;
(2) il complementare di C_M, i.e. $A_M = C^0([0, 1]) \setminus C_M$, è denso in $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$;
(3) se $g \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ allora g non è differenziabile in alcun punto;
(4) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Svolgimento.

(1) Sia f_n successione in C_M uniformemente convergente a f. Per ipotesi, dato $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [0, 1]$ tale per cui $|f(y) - f(x_n)| \leq M|y - x_n|$ per ogni $y \in [0, 1]$. Per compattezza di $[0, 1]$, è possibile estrarre una sottosuccessione di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, indicata con x_{n_k} convergente a x_∞. Dato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{k} > 0$ tale che se $k > \bar{k}$ si ha $\|f - f_{n_k}\|_\infty < \varepsilon$ e $|x_{n_k} - x_\infty| < \varepsilon$. Si ha

allora:

$$\begin{aligned}
|f(y)-f(x_\infty)| &\leq |f(y)-f_{n_k}(y)|+|f_{n_k}(y)-f_{n_k}(x_{n_k})|+\\
&\quad +|f_{n_k}(x_{n_k})-f_{n_k}(x_\infty)|+|f_{n_k}(x_\infty)-f(x_\infty)|\\
&\leq \|f-f_{n_k}\|_\infty+M|y-x_{n_k}|+M|x_{n_k}-x_\infty|+\|f-f_{n_k}\|_\infty\\
&\leq 2\|f-f_{n_k}\|_\infty+M|y-x_\infty|+M|x_\infty-x_{n_k}|+M|x_{n_k}-x_\infty|\\
&\leq 2\varepsilon+2M\varepsilon+M|y-x_\infty|=(2M+1)\varepsilon+M|y-x_\infty|
\end{aligned}$$

passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ si ha che $f \in C_M$.

(2) Consideriamo la funzione $g_m(x) = m|x|$ per $|x| \leq 1/m^2$, prolungata per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $g_m(x + 2h/m^2) = g_m(x)$ per ogni $h \in \mathbb{Z}$. La funzione g_m ha il grafico a forma di sega. Man mano che m cresce, i denti della sega si fanno più fitti, si abbassano, ma diventano più aguzzi. Il lettore è incoraggiato a farsi un disegno per rendersi conto del comportamento di g_m.

Proviamo il seguente fatto: per ogni $x \in [0,1]$, $m \in \mathbb{N}$ esiste $y \in [0,1]$ tale per cui $|g_m(x) - g_m(y)| = m|x-y|$. Dato $x \in [0,1]$, esiste $h \in \mathbb{N}$ tale per cui $\frac{2h}{m^2} \leq x \leq \frac{2(h+1)}{m^2}$. Possono presentarsi due casi:

(a) Se $\frac{2h}{m^2} \leq x \leq \frac{2h+1}{m^2}$, scegliamo $y \in [2h/m^2, (2h+1)/m^2] \setminus \{x\}$. In tal caso si ha che $0 \leq x - 2h/m^2 \leq 1/m^2$ e $0 \leq y - 2h/m^2 \leq 1/m^2$, quindi

$$\begin{aligned}
g_m(y)-g_m(x) &= g_m(x-2h/m^2)-g_m(y-2h/m^2)\\
&= m(x-2h/m^2)-m(y-2h/m^2)=m(x-y),
\end{aligned}$$

da cui $|g_m(x) - g_m(y)| = m|x-y|$ e $|y-x| \leq 1/m^2$.

(b) Se $\frac{2h+1}{m^2} \leq x \leq \frac{2(h+1)}{m^2}$, scegliamo $y \in [(2h+1)/m^2, 2(h+1)/m^2] \setminus \{x\}$. In tal caso si ha che $-1/m^2 \leq x - 2(h+1)/m^2 \leq 0$ e $-1/m^2 \leq y - 2(h+1)/m^2 \leq 0$, quindi

$$\begin{aligned}
g_m(y)-g_m(x) &= g_m(x-2h/m^2)-g_m(y-2h/m^2)\\
&= -m(x-2h/m^2)+m(y-2h/m^2)=-m(x-y),
\end{aligned}$$

da cui $|g_m(x) - g_m(y)| = m|x-y|$ e $|y-x| \leq 1/m^2$.

Supponiamo f sia $C^\infty[0,1]$, in particolare essa è Lipschitziana di costante $L_f > 0$ Poniamo $f_m(x) = f(x) + g_m(x)$. Si ha:

$$|f_m(x)-f(x)| = |g_m(x)| \leq \frac{1}{m},$$

quindi f_m converge uniformemente a f. Proviamo che se m è sufficientemente grande si ha $f_m \in A_M$. Fissato $x \in [0,1]$, sia $m > L_f + 3M$, allora esiste $y \in [0,1]$, y sufficientemente vicino a x tale per cui:

$$\begin{aligned}
|f_m(y)-f_m(x)| &= |f(y)+g_m(y)-f(x)-g_m(x)|\\
&\geq |g_m(y)-g_m(x)|-|f(y)-f(x)|\\
(*)\quad &\geq m|y-x|-L_f|y-x|\\
&\geq (m-L_f)|y-x| > M|y-x|.
\end{aligned}$$

In $(*)$ si è utilizzato il fatto che esiste y sufficientemente vicino a x tale per cui $|g_m(x) - g_m(y)| = m|x-y|$.

Quindi dato $\varepsilon > 0$ e $f \in C^\infty$ esiste $f_m \in A_M$ con $\|f - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Se in generale $f \in C^0[0,1]$, dato $\varepsilon > 0$, esistono $g \in C^\infty[0,1]$ e $f_m \in A_M$ tali per cui:

$$\|f-f_m\|_\infty \leq \|f-g\|_\infty + \|g-f_m\|_\infty \leq \varepsilon/2+\varepsilon/2.$$

(3) Sia g nell'intersezione degli A_n e supponiamo per assurdo che g sia differenziabile in un punto x. Allora esiste $\delta > 0$, $K > 0$ tale che $|g(y) - g(x)|/|y-x| \leq K$ per $0 < |y-x| < \delta$, pertanto:

$$\begin{aligned}
|g(y)-g(x)| &\leq K|y-x|, \text{ per } |y-x|<\delta\\
|g(y)-g(x)| &\leq 2\|g\|_\infty|y-x|/\delta, \text{ per } |y-x|\geq\delta
\end{aligned}$$

da cui $|g(y)-g(x)| \leq (K+2\|g\|_\infty/\delta)|y-x|$ e quindi $g \in C_N$ per $N > K+2\|g\|_\infty/\delta$, assurdo.

(4) Per il Lemma di Baire, un'intersezione numerabile di aperti densi è densa, in particolare non vuota.

7. Esercitazione del giorno 25 novembre 2009 (2 ore): Spazi di Hilbert e serie di Fourier

Definizione 11. Si è visto come se H è spazio di Hilbert, K sottinsieme di H chiuso convesso non vuoto. Allora per ogni $x \in H$ esiste un unico $y \in K$ tale che

$$\|x-y\|_H = \inf_{z\in K}\{\|x-z\|_H\}.$$

In altre parole esiste un solo elemento di K che realizzi la distanza di x da K, tale elemento verrà indicato con $\pi_K(x)$ e chiamato la proiezione (ortogonale) di x su K.

Esercizio 29. Sia H spazio di Hilbert, K sottinsieme di H chiuso convesso non vuoto. Si provi che:

(1) dato $x \in H$, vale la seguente caratterizzazione:

$$\{\pi_K(x)\} = \{y \in K : \langle x-y, z-y\rangle_H \leq 0 \text{ per ogni } z \in K\};$$

(2) la mappa $x \mapsto \pi_K(x)$ è Lipschitziana di costante 1;

(3) K possiede un unico elemento di norma minima.

(4) Se $V \subseteq H$ è un sottospazio chiuso di H, allora

$$\{\pi_V(x)\} = \{y \in V : \langle x-y, v\rangle_H = 0 \text{ per ogni } v \in V\};$$

e inoltre π_V è lineare.

Dimostrazione.

(1) Sia $y \in K$ soddisfacente a $\langle x-y, y-z\rangle_H \leq 0$ per ogni $z \in K$. Si ha:

$$0 \leq \|x-z\|_H^2 = \|x-y+y-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 - 2\langle x-y, z-y\rangle_H,$$

perciò:

$$\|x-z\|^2 - \|x-y\|^2 \geq \|y-z\|^2 - 2\langle x-y, z-y\rangle_H \geq 0.$$

Viceversa, supponiamo che y sia la proiezione di x su K. Per convessità, per ogni $t \in [0,1]$ e per ogni $z \in K$, si ha $tz+(1-t)y \in K$, quindi:

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 \leq \|x-(tz+(1-t)y)\|^2 &= \|x-y+t(y-z)\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 + t^2\|y-z\|^2 - 2t\langle x-y, z-y\rangle_H\end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$\langle x-y, z-y\rangle_H \leq \frac{t}{2}\|y-z\|^2,$$

al limite per $t \to 0^+$ si ottiene quanto voluto.

(2) Siano $x_1, x_2 \in H$, $y_1 = \pi_K(x_1)$, $y_2 = \pi_K(x_2)$. Dalla caratterizzazione con il prodotto scalare, si ottengono:

$$\langle x_1-y_1, y_2-y_1\rangle \leq 0, \qquad \langle x_2-y_2, y_1-y_2\rangle \leq 0.$$

Sommando si ha:

$$\begin{aligned}0 &\geq \langle x_1-y_1+y_2-x_2, y_2-y_1\rangle = \langle x_1-x_2, y_2-y_1\rangle + \langle y_2-y_1, y_2-y_1\rangle \\ &= \langle x_1-x_2, y_2-y_1\rangle + \|y_2-y_1\|^2,\end{aligned}$$

da cui

$$\|\pi_K(x_1)-\pi_K(x_2)\| \cdot \|x_1-x_2\| \geq \|\pi_K(x_1)-\pi_K(x_2)\|^2.$$

(3) tale elemento è $\pi_K(0)$, infatti

$$\|\pi_K(0)\| = \|0-\pi_K(0)\| = \min\{\|0-x\| : x \in K\} = \min\{\|x\| : x \in K\}.$$

(4) Se V è sottospazio chiuso, in particolare esso è un convesso chiuso. Pertanto vale

$$\{\pi_K(x)\} = \{y \in V : \langle x - y, z - y\rangle_H \le 0 \text{ per ogni } z \in V\}.$$

In particolare, possiamo sempre scrivere $z = y + v$. Al variare di $v \in V$ descriviamo tutti gli elementi $z \in V$, quindi

$$\{\pi_K(x)\} = \{y \in V : \langle x - y, v\rangle_H \le 0 \text{ per ogni } v \in V\}.$$

Se infine $v \in V$, anche $-v \in V$, quindi $\langle x-y, v\rangle_H \le 0$ e $\langle x-y, -v\rangle_H \le 0$ da cui $\langle x-y, v\rangle_H = 0$ e quindi

$$\{\pi_K(x)\} = \{y \in V : \langle x - y, v\rangle_H = 0 \text{ per ogni } v \in V\}.$$

Siano ora $x, z \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si ha per ogni $v \in V$:

$$\begin{aligned}\langle(\alpha x + \beta z) - (\alpha\pi_V(x) + \beta\pi_V(z)), v\rangle &= \langle \alpha x - \alpha\pi_V(x), v\rangle + \langle \beta z - \beta\pi_V(z), y\rangle \\ &= \alpha\langle x - \pi_V(x), v\rangle + \beta\langle z - \pi_V(z), v\rangle = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

per la caratterizzazione delle proiezioni su sottospazi. Ma quindi l'elemento $\alpha\pi_V(x)+\beta\pi_V(z)$ soddisfa la condizione necessaria e sufficiente per essere la proiezione di $\alpha x + \beta z$, da cui $\pi_V(\alpha x + \beta z) = \alpha\pi_V(x) + \beta\pi_V(z)$.

□

Osservazione 3. Nel teorema della proiezione su un chiuso convesso non è necessario che H sia completo, bensì che K sia completo nella topologia indotta da H. Il risultato è valido anche se, per esempio, K è sottospazio di dimensione finita di uno spazio a prodotto scalare.

Esercizio 30. Sia E il sottinsieme chiuso e convesso di $L^2(0,\pi)$ definito da

$$E := \{g \in L^2(0,\pi) : g \ge 0\}.$$

Si dica chi è la proiezione ortogonale su E di $f \in L^2(0,\pi)$. In particolare si dica chi sono le proiezioni di $\sin x$ e $\cos x$.

Svolgimento. È ovvio come E sia convesso. Proviamo che è chiuso. Sia $g_n \to g$ in L^2 con $g_n \in E$. Si ha quindi che $g_n \rightharpoonup g$ in L^2, quindi per ogni $w \in L^2$ si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \langle g_n, w\rangle = \langle g, w\rangle.$$

Supponiamo per assurdo che esista S misurabile di misura positiva dove $g < 0$. Scelto $w = \chi_S$, che appartiene a L^2 perché $\|w\|_{L^2} < \sqrt{\pi}$, dal precedente si ottiene:

$$0 > \int_S g(x)\,dx = \int_0^\pi g(x)w(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi g_n(x)w(x)\,dx \ge 0,$$

il che è assurdo. Quindi $g \ge 0$ q.o. e pertanto $g \in E$, che quindi risulta chiuso.
Cerchiamo di intuire come può essere fatta la proiezione. Data $f \in L^2(0,\pi)$, dobbiamo trovare $f_1 \in E$ che minimizzi

$$\int_0^\pi |f(x) - f_1(x)|^2\,dx.$$

Osserviamo che se $f(x) \ge 0$, possiamo scegliere $f_1(x) = f(x)$, pertanto l'integrale precedente si riduce a

$$\int_{S^-} |f(x) - f_1(x)|^2\,dx,$$

essendo $S^- = \{x \in [0,\pi] : f(x) < 0\}$. Per minimizzare tale integrale, dovendo essere $f_1(x) \ge 0$, l'unica possibilità è quella di scegliere $f_1(x) = 0$ su S^-, perché $f(x) < 0$ su S^-.
Congetturiamo quindi che la proiezione di f sia la funzione

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \ge 0, \\ 0 & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Per provarlo mostriamo che per ogni $g \in E$ si ha $\langle f - f_1, g - f_1 \rangle_{L^2} \leq 0$. Sia $S^+ := [0, \pi] \setminus S^-$, così che $f - f_1 = 0$ in S^+ e $f - f_1 = f < 0$ in S^-. Allora si ha:

$$\begin{aligned} \langle f - f_1, g - f_1 \rangle_{L^2} &= \int_0^\pi (f(x) - f_1(x)) \cdot (g(x) - f_1(x))\, dx \\ &= \int_{S^-} (f(x) - f_1(x)) \cdot (g(x) - f_1(x))\, dx \\ &= \int_{S^-} f(x) g(x)\, dx \leq 0. \end{aligned}$$

La proiezione di $\sin x$ è $\sin x$. La proiezione di $\cos x$ è $\cos x \cdot \chi_{[0,\pi/2]}(x)$.

Esercizio 31. Sia H uno spazio di Hilbert, S un sottinsieme non vuoto di H.

(1) Si enunci la definizione di $S^\perp$.
(2) Si dica chi è $S^\perp$ nel caso $H = \ell^2$ e S definito da:
   (a) $S = T_1(H)$, dove $T_1(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (0, \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{4}, 0, ...)$.
   (b) $S = T_2(H)$, dove $T_2(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, x_3, \frac{x_4}{4}, ...)$.
   (c) $S = T_3(H)$, dove $T_3(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, ...)$.
   (d) $S = \{x \in \ell^2 : \|x\|_{\ell^2} = 1\}$.

   Le risposte vanno giustificate.

Svolgimento. Indichiamo con e_n la base canonica di ℓ^2, ovvero e_n è la successione che vale 1 al posto n e 0 altrove.

(1) $S^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ per ogni } y \in S\}$.
(2) (a) $S^\perp = E_1 = \{x \in \ell^2 : x = (x_1, 0, x_3, ...)\}$. Infatti se $y = (0, \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{4}, 0, ...) \in S$ e $x \in E_1$ allora $\langle x, y \rangle = 0$. Viceversa, sia $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S^\perp$. Poiché $\frac{e_{2n}}{2n} \in S$, si ha $0 = \langle x, \frac{e_{2n}}{2n} \rangle = \frac{x_{2n}}{2n}$ per ogni n quindi $x_{2n} = 0$ per ogni n, cioé $x \in E_1$.
   (b) $e_n \in T_2(H)$ per ogni n e $\{e_1, e_2, ...\}^\perp = \{0\}$, quindi $S^\perp = \{0\}$.
   (c) $S^\perp = E_3 = \{(x_1, 0, 0, ..)\}$. Infatti se $x \in E_3$ e $y = (0, y_1, y_2, ..) \in S$, allora $\langle x, y \rangle = 0$, quindi $E_3 \subset S^\perp$. Viceversa, se $x \in S^\perp$ si osserva che $e_n \in S$ per $n \geq 2$, quindi $0 = \langle x, e_n \rangle = x_n$ per $n \geq 2$. Da cui $x \in E_3$.
   (d) Si ha $\overline{\text{Span}(S)} = H$ quindi $S^\perp = \{0\}$.

Esercizio 32. Si consideri il sottospazio chiuso di $L^2(-\pi, \pi)$:

$$M = \{f \in L^2(-\pi, \pi) : f(x) = f(-x) \text{ per q.o. } x \in [0, \pi]\}.$$

(1) Si trovi $M^\perp$.
(2) Si scriva una base ortonormale di M e una base ortonormale di $M^\perp$.
(3) Si dica quali sono le proiezioni ortogonali su M delle funzioni ($n = 1, 2, 3..$): $\sin n^2 x$, $\cos n^3 x$, x^n, $x^n + x$, $\chi_{[0,\pi]}$. Si giustifichino solo le ultime due risposte.
(4) Si scriva la serie di Fourier reale della funzione $\chi_{[0,\pi]}$ e si dica per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ qual è la somma di questa serie.

Svolgimento.

(1) Sia $f \in M$. Osserviamo che f può essere ricostruita interamente a partire dai suoi valori in $(-\pi, 0)$, e viceversa ogni $f \in L^2(-\pi, 0)$ definisce un elemento di M se viene prolungata per parità a tutto $[-\pi, \pi]$. Quindi g è ortogonale a $f \in M$ se e solo se per ogni $f \in L^2(-\pi, 0)$ vale:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x) f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{0} g(x) f(x)\, dx + \int_0^\pi g(x) f(-x)\, dx \\ &= \int_{-\pi}^{0} (g(x) + g(-x)) f(x)\, dx. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è il prodotto scalare in $L^2(-\pi, 0)$ di f con la funzione $\tilde{g}$ definita da $\tilde{g}(x) = g(x) + g(-x)$. Se tale prodotto scalare è nullo per ogni f, ciò implica $\tilde{g} = 0$, quindi

$g(-x) = -g(x)$ per q.o. $x \in [-\pi, 0]$. Analogamente, se $g(-x) = -g(x)$ per q.o. $x \in [-\pi, 0]$ con i medesimi calcoli si ricava $\langle f, g\rangle = 0$ per ogni $f \in M$. Ne segue che:

$$M^\perp = \{g \in L^2(-\pi, \pi) : g(-x) = -g(x) \text{ per q.o. } x \in [0, \pi]\}.$$

(2) Ricaviamo le basi di M e $M^\perp$ a partire da una base di $L^2(-\pi, \pi)$. Una base di M è $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} : n \in \mathbb{N}\}$, una base di $M^\perp$ è $\{\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} : n \in \mathbb{N}\}$.

(3) M e $M^\perp$ sono sottospazi chiusi. Se un elemento f appartiene a $M^\perp$, allora la sua proiezione su M è lo zero, infatti si ottiene

$$\langle f - 0, g\rangle = \langle f, g\rangle = 0$$

per ogni $g \in M$, e queindi 0 soddisfa la caratterizzazione della proiezione mediante il prodotto scalare data per i sottospazi.
Si ha allora $\pi_M(\sin n^2x) = 0$, $\pi_M(\cos n^3x) = \cos n^3x$ perché $\cos n^3x \in M$, $\pi_M(x^n) = x^n$ se n è pari (perché in tal caso $x_n \in M$) e $\pi_M(x^n) = 0$ se n è dispari. Se n è dispari, si ha $x^n + x \in M^\perp$, quindi $\pi_M(x^n + x) = 0$. Per n pari, consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier di tale funzione. Esso è dato dalla somma dello sviluppo in serie di Fourier di x^n (che è di soli coseni perché per n pari tale funzione è pari) e dallo sviluppo in serie di Fourier di x (che è di soli seni perché tale funzione è dispari). Proiettando su M dobbiamo considerare solo lo sviluppo in serie di coseni (che costituisce una base di M), la cui somma è x^n, quindi per n pari si ha $\pi_M(x^n + x) = x^n$. Per l'ultimo punto, cerchiamo $g \in M$ tale che $\langle \chi_{[0,\pi]} - g, f\rangle_{L^2} = 0$ per ogni $f \in M$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\chi_{[0,\pi]} - g)f\, dx = \int_{-\pi}^{0} (-g)f\, dx + \int_0^{\pi} (1 - g)f\, dx = \int_{-\pi}^{0} (1 - 2g)f\, dx.$$

Dunque la proiezione $\pi_M(\chi_{[0,\pi]})$ è la funzione $g(x) = \frac{1}{2}$. Il risultato può essere anche dedotto dalla serie di Fourier di $\chi_{[0,\pi]}$.

(4) La somma della serie di Fourier di $\chi_{[0,\pi]}$ vale 0 in $(-\pi, 0)$, vale 1 in $(0, \pi)$ e vale $1/2$ nei punti 0 e $\pm\pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = 1 \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

Segue che la serie di Fourier di $\chi_{[0,\pi]}$ è

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n)\sin(nx).$$

Esercizio 33. Sia H lo spazio di Hilbert reale $L^2(-\pi, \pi)$ e sia V il sottospazio chiuso:

$$V = \{f \in L^2(-\pi, \pi) : f(x) = f(x - \pi) \text{ per } x \in (0, \pi)\},$$

(cioè lo spazio delle funzioni periodiche di periodo π).

(1) Si trovi $V^\perp$;
(2) si provi che se $f \in V$ allora $\int_{-\pi}^{\pi} |x - f(x)|^2 \geq \pi^3/2$. (Suggerimento: la funzione $h(x)$ definita da $h(x) = x + \pi/2$ per $-\pi \leq x < 0$ e $h(x) = x - \pi/2$ per $0 \leq x \leq \pi$, appartiene a V ed è tale che...)

Svolgimento. (1) $f \in V^\perp$ se e solo se $\langle f, g\rangle = 0$ per ogni $g \in V$. Ma se $g \in V$ si ha

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)g(x)\, dx + \int_0^{\pi} f(x)g(x) \\ &= \int_0^{\pi} f(\tau - \pi)g(\tau - \pi)\, d\tau + \int_0^{\pi} f(x)g(x)\, dx = \int_0^{\pi} (f(\tau - \pi) + f(\tau))g(\tau)\, d\tau\end{aligned}$$

dato che per $\tau \in (0,\pi)$ si ha $g(\tau-\pi) = g(\tau)$. Dunque se $f \in V^\perp$ e si sceglie $g \in V$ tale che $g(\tau) = \mathrm{sign}(f(\tau-\pi)+f(\tau))$ per $\tau \in (0,\pi)$, si ottiene

$$\int_0^\pi |f(\tau-\pi)+f(\tau)|\,d\tau = 0,$$

e dunque se $f \in V^\perp$ allora soddisfa $f(x) = -f(x-\pi)$ per ogni $x \in (0,\pi)$. Viceversa se $f \in H$ soddisfa $f(x) = -f(x-\pi)$ per ogni $x \in (0,\pi)$, allora per ogni $g \in V$ si ha

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi (f(\tau-\pi)+f(\tau))g(\tau)\,d\tau = 0.$$

(2) Poniamo $\mathrm{id}(x) = x$. Si ha che $\int_{-\pi}^{\pi} |x-f(x)|^2\,dx$ è il quadrato della distanza di id da f, e se f descrive V il minimo è assunto nella proiezione $\pi_V(\mathrm{id})$ di id su V. Si noti che $h_1(x) = \mathrm{sign}(x)\pi/2$ appartiene a $V^\perp$ e che $x = h(x)+x_1(x)$ e dunque $h = \pi_V(\mathrm{id})$. Infine:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x-h(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi^3}{2}$$

Esercizio 34. Sia u_n una base ortonormale in uno spazio di Hilbert H. Sia v_n una successione ortonormale tale che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ||u_n - v_n||_H^2 < 1$$

Si provi che anche v_n è una base ortonormale.

Svolgimento. L'unica cosa da dimostrare è che l'insieme dei v_n è completo. Osserviamo che per dimostrare ciò, è sufficiente verificare che non esiste un vettore $v \neq 0$ tale che

$$\langle v, v_n\rangle = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Infatti, per il Teorema di Riesz, ciò significa che ogni funzionale lineare e continuo su H che si annulla sui v_n, è il funzionale nullo. Per il Teorema di Hahn-Banach, ciò implica la completezza del sistema dei v_n.
Verifichiamo quindi la non esistenza del vettore v. Supponiamo che ci sia un vettore v non nullo ortogonale a tutti i v_n; allora si ha

$$0 = \langle v, v_n\rangle = \langle v, u_n\rangle - \langle v, u_n - v_n\rangle$$

perciò $\langle v, u_n\rangle = \langle v, u_n - v_n\rangle$ da cui, ricordando l'ipotesi

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle v, u_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle v, u_n - v_n\rangle|^2 < \|v\|^2$$

e quindi una contraddizione.

8. Esercitazione del giorno 1 dicembre 2009 (2 ore): Su spazi di Hilbert, convoluzione e complementi di teoria della misura

Esercizio 35. Posto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, si consideri l'insieme di funzioni

$$K = \left\{ v \in L^1(\Omega) : |v| \leq 1 \text{ q.o. in } \Omega, \int_\Omega v(x,y)\,dx\,dy = 0 \right\}$$

(a) Provare che K è convesso ed è contenuto in $L^2(\Omega)$.
(b) Dimostrare che K è chiuso in $L^2(\Omega)$. L'insieme K è dotato di punti interni?
(c) Dedurre che, comunque presa $f \in L^2(\Omega)$, esiste un'unica $u \in K$ tale che

$$\int_\Omega (u-f)(u-v) \leq 0, \quad \forall v \in K.$$

(d) Con riferimento a (c) trovare la funzione u corrispondente al dato $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$.

Svolgimento.

(1) Siano $v, w \in K$, $\lambda \in [0,1]$. Si ha $|\lambda v + (1-\lambda)w| \leq \lambda|v| + (1-\lambda)|w| \leq 1$ e
$$\int_\Omega (\lambda v(x) + (1-\lambda)w(x))\, dx = \lambda \int_\Omega v(x)\, dx + (1-\lambda) \int_\Omega w(x)\, dx = 0.$$
da cui K è convesso. Inoltre dato che $|v| \leq 1$ quasi ovunque:
$$\|v\|_{L^2} = \int_\Omega |v(x)|^2\, dx \leq \int_\Omega |v(x)| \cdot |v(x)|\, dx \leq \int_\Omega |v(x)|\, dx = \|v\|_{L^1}.$$

(2) Sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in K fortemente convergente a $v \in L^2$. In particolare, essa è debolmente convergente, per cui per ogni $w \in L^2$ si ha:
$$\lim_{n\to\infty} \langle v_n, w\rangle = \langle v, w\rangle.$$
Scelto $w = \chi_\Omega$, e ricordando che $v_n \in K$, si ha dal precedente:
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n(x,y) \cdot 1\, dx\, dy = \int_\Omega v(x,y) \cdot 1\, dx\, dy.$$
I temini di sinistra sono tutti nulli, quindi il loro limite è nullo e pertanto $\displaystyle\int_\Omega v(x,y)\, dx$ è nullo.
Supponiamo che esista $S \subseteq \Omega$ di misura $\mathrm{meas}(S) > 0$ con $v(x) > 1$ su S: allora si ha per la convergenza debole
$$\begin{aligned}\int_\Omega v(x,y)\chi_S(x,y)\, dx\, dy &= \langle v, \chi_S\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle v_n, \chi_S\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \int v_n(x,y)\chi_S(x,y)\, dx\, dy \leq \mathrm{meas}(S)\end{aligned}$$
tuttavia
$$\int_\Omega v(x,y)\chi_S(x,y)\, dx\, dy > \int_\Omega \chi_S(x,y)\, dx\, dy = \mathrm{meas}(S).$$
Se invece esistesse $S \subseteq \Omega$ di misura $\mathrm{meas}(S) < 0$ con $v(x) < -1$ su S, applicando il precedente con $-v$ al posto di v si giunge all'assurdo. Si conclude che K è chiuso e convesso di L^2.
Sia $v \in K$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Consideriamo la funzione costante
$$g_\varepsilon(x,y) \equiv \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mathrm{meas}(\Omega)}}$$
Calcoliamo $\|(v + g_\varepsilon) - v\|_{L^2} = \|g_\varepsilon\|^2_L$:
$$\int_\Omega |g_\varepsilon(x,y)|^2\, dx\, dy = \varepsilon^2,$$
per cui per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $v + g_\varepsilon \in B_{L^2}(v, \varepsilon)$ Tuttavia $v + g_\varepsilon \notin K$ infatti
$$\int_\Omega (v(x,y) + g_\varepsilon(x,y))\, dx\, dy = \int_\Omega v(x,y)\, dx\, dy + \varepsilon\sqrt{\mathrm{meas}(\Omega)} = \varepsilon\sqrt{\mathrm{meas}(\Omega)} \neq 0.$$
Quindi ogni palla di raggio ε centrata in un punto v di K contiene almeno un elemento che non appartiene a K. L'interno di K è vuoto.

(3) Per il teorema di proiezione sui chiusi e convessi in uno spazio di Hilbert, si ha che per ogni $f \in L^2$ esiste un'unica $u \in K$ tale per cui
$$\langle f - u, v - u\rangle_{L^2} = \int_\Omega (u - f)(u - v)\, dx \leq 0, \qquad \forall v \in K.$$

(4) la funzione richiesta u è la proiezione di f su K, ovvero la funzione di K che realizza il minimo di $\|f - u\|^2$. Per congetturare quale possa essere tale funzione procediamo con alcune considerazioni su f e su Ω. Si ha $|f(x,y)| \leq 1$ se e solo se $x^2(x^2 + y^2) \leq 1$, ovvero $x^4 + x^2y^2 \leq 1$, quindi $x = 0$ oppure $|y| \leq \sqrt{1/x^2 - x^2}$. Poniamo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \sqrt{1/x^2 - x^2}\}$ Studiamo l'intersezione $\Omega \cap A$. Si ha che $(0,y) \in A$ per ogni y, $(\pm 1, y) \in A$ se e solo se $|y| = 0$, quindi $y = 0$. La funzione $x \mapsto 1/x^2 - x^2$ ha come derivata $-2x^{-3} - 2x$

che è strettamente positiva per $x < 0$ e strettamente negativa per $x > 0$. Se $y = \pm 1$ si ha che $(x, \pm 1)$ in A se e solo se $x^4 + x^2 - 1 \leq 0$, ovvero $|x| \leq \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}}$. Osserviamo che A è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, pertanto:

$$\int_{A \cap \Omega} f(x, y)\, dxdy = 0,$$

e ciò implica $f\chi_{A\cap\Omega} \in K$. Congetturiamo quindi che si abbia

$$u(x, y) = f(x, y)\chi_{A\cap\Omega}(x, y) + \frac{f(x, y)}{|f(x, y)|}\chi_{\Omega\cap A}(x, y).$$

Tale funzione appartiene a K perché $|u(x, y)| \leq 1$ e sfruttando le simmetrie di f e di $\Omega \setminus A$ si ha

$$\int_{\Omega} \frac{f(x, y)}{|f(x, y)|}\, dxdy = 0.$$

Proviamo che vale la proprietà caratteristica della proiezione. Scriviamo $\Omega \setminus A = Bk \cup B^-$ dove $B^+ = \{f < 1\}$, $B^- = \{f > -1\}$. Dato $g \in K$ si ha:

$$\begin{aligned}\langle f - u, g - u\rangle &= \int_{\Omega\setminus A} (f(x, y) - u(x, y)) \cdot (g(x, y) - u(x, y))\, dx\, dy \\ &= \int_{B^+} |f(x, y) - 1|(g(x, y) - 1)\, dxdy + \int_{B^-} -|f(x, y) + 1|(g(x, y) + 1)\, dxdy.\end{aligned}$$

Poiché $-1 < g(x, y) < 1$ q.o., i due addendi sono negativi, quindi $\langle f - u, g - u\rangle \leq 0$ per ogni $g \in K$, e u è la proiezione ortogonale di f su K.

Esercizio 36. Sia H uno spazio di Hilbert e K_n una successione di convessi chiusi contenuti in H tale che

$$K_{n+1} \subset K_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Supponiamo inoltre che

$$K_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset.$$

Se indichiamo con $\pi_n : H \to K_n$ la proiezione su K_n, dimostrare che per ogni $x \in H$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \pi_n(x) = \pi_\infty(x).$$

Svolgimento. Poniamo $x_n = \pi_n(x)$. Tale successione è limitata: infatti poiché $x_\infty \in K_\infty \subseteq K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ottiene

$$\|x_n\| \leq \|x - x_n\| + \|x\| = \mathrm{dist}(x, K_n) + \|x\| \leq \|x - x_\infty\| + \|x\| \leq 2\|x\| + \|x_\infty\|.$$

K_∞ è convesso chiuso perché intersezione di convessi chiusi.
La successione $\mathrm{dist}(x, K_n)$ è monotona, crescente e limitata da $\|x - x_\infty\|$, pertanto essa ammette limite ℓ. Si ha che $\mathrm{dist}(x, K_n) \leq \mathrm{dist}(x, K_\infty)$ perché $K_n \supseteq K_\infty$ da cui $\|x - x_n\| \to \ell \leq \mathrm{dist}(x, K_\infty)$. In particolare è possibile estrarre una sottosuccessione debolmente convergente a y_∞ per il teorema di Banach-Alaoglu (gli spazi di Hilbert sono riflessivi). Per ogni N, si ha che se $n_k > N$, tale successione è una successione debolmente convergente nel convesso chiuso K_N. Per convessità, K_N è anche debolmente chiuso, quindi $y_\infty \in K_N$. Allora $y_\infty \in K_\infty$.
La funzione $y \mapsto \|x - y\|$ è convessa e continua, il suo epigrafico è quindi un fortemente chiuso convesso non vuoto. Ma allora è anche un debolmente chiuso e convesso, pertanto $y \mapsto \|x - y\|$ è debolmente semicontinua inferiormente, da cui

$$\mathrm{dist}(x, K_\infty) \leq \|x - y_\infty\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x - x_{n_k}\| = \ell \leq \mathrm{dist}(x, K_\infty).$$

Ma allora $\mathrm{dist}(x, K_\infty) = \|x - y_\infty\|$ e per l'unicità della proiezione si ottiene $x_\infty = y_\infty$, da cui la tesi.

Esercizio 37. Si trovi un sottoinsieme A di $(-1, 1)$ misurabile secondo Lebesgue tale che posto $f(x) = \mathcal{L}(A \cap (-1, x))$ si abbia $f'(0) = 1/2$.

Svolgimento. Si consideri la retta r di equazione $y = x/2$ e una parabola P di equazione $y = ax^2 + bx + c$ soddisfacente le seguenti proprietà: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1/2$ e $y'(x) < 1$ per ogni $0 < x < 1$. Si può scegliere $y = x^2/4 + 1/2x$. Poniamo

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{2}x \leq y \leq \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right\}.$$

Definiamo una successione induttiva di punti. Poniamo $z_0 = (x_0, y_0) = (1/2, 1)$. Dato $z_n \in D$, sia r_n la retta passante per $z_n = (x_n, y_n)$ di coefficiente angolare 1, ossia r_n ha equazione $y = x + y_n - x_n$.

$$z_{n+1} = \begin{cases} \text{l'unico elemento di } r \cap r_n, & \text{se } y_n = x_n^2/4 + x_n/2, \\ y_{n+1} = y_n \text{ e } x_{n+1} \text{ è l'unica soluzione positiva di } y_n = x^2/4 + x/2, & \text{se } y_n = x_n/2. \end{cases}$$

In altre parole, partiamo dal punto $z_0 = (1, 1/2)$, tracciamo la parallela all'asse delle ascisse fino ad incontrare la parabola P, il punto di intersezione dà il punto z_1. Partendo da z_1, seguiamo la retta di coefficiente angolare 1 passante per z_1 fino ad incontrare in z_2 la retta di coefficiente angolare $1/2$. Si ha necessariamente $z_2 \in D$ perché la parabola è convessa e in nessun punto compreso tra 0 e 1 la tangente ha coefficiente angolare superiore a 1. Il procedimento viene iterato: per ogni indice n pari, i punti z_n appartengono alla retta $y = 1/2x$ e il punto z_{n+1} si ottiene conducendo la parallela all'asse x e considerandone l'intersezione con P con ascissa positiva, per n dispari, i punti z_n appartengono alla parabola P e il punto z_{n+1} si ottiene intersecando la retta di coefficiente angolare 1 passante per z_n e la retta r. Congiungendo ogni coppia di punti consecutivi con un segmento, può essere costruita quindi una funzione continua $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, affine a tratti, derivabile nei punti di $]0, 1] \setminus \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la cui derivata, dove essa esiste, vale 0 oppure 1. Estendiamo tale funzione ad una funzione dispari continua affine a tratti che indicheremo ancora con $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata di g in 0 ricordando che $g(0) = 0$: è necessario provare l'esistenza e calcolare il

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}.$$

Per simmetria, possiamo limitarci a considerare il limite per $x \to 0^+$. La funzione g per $x > 0$ è sempre compresa tra la retta $y = x/2$ e la parabola $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$, pertanto vale la maggiorazione

$$\frac{x/2}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x}{x},$$

e passando al limite per $x \to 0^+$ si ottiene che il limite per $x \to 0^+$ esiste e vale $1/2$. Simmetricamente per disparità si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{g(-t)}{-t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-g(t)}{-t} = \frac{1}{2}.$$

pertanto $g'(0) = 1/2$. Si ha in particolare che $g(x) = \int_{-1}^{x} g'(t)\, dt$ perché g è Lipschitziana, quindi assolutamente continua. Poniamo

$$A = \{x \in]-1, 1[: g'(x) \text{ esiste e } g'(x) = 1\}$$

A è misurabile perché è unione degli intervalli aperti $]x_{n+1}, x_n[$ e $]-x_n, -x_{n+1}[$. A questo punto,

$$\mathcal{L}(]-1, x[\cap A) = \int_{-1}^{x} \chi_A(t)\, dt = g(x),$$

quindi $f = g$ e $f'(0) = g'(0) = 1/2$.

Esercizio 38. Sia $(c_n) \in \ell^2$ e sia A il sottoinsieme costituito dagli elementi $(x_n) \in \ell^2$ tali che $|x_n| \leq |c_n|$ per ogni n; dimostrare che A è relativamente compatto rispetto alla topologia forte.

Svolgimento. Bisogna provare che A è totalmente limitato. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste $N > 0$ tale per cui

$$\sum_{n=N}^{+\infty} |x_n|^2 \leq \sum_{n=N}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4},$$

in quanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|^2$ è convergente per ipotesi, quindi il suo resto è infinitesimo. Sia $\{T_Nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione ottenuta troncando x all'N-esimo termine, ovvero $T_Nx_n=0$ se $n\geq N$ e $T_Nx_n=x_n$ se $1\leq n<N$.
Sia ora $n\in\{1,...,N\}$. L'insieme $C_n=\{x\in\mathbb{C}:\,|x|<|c_n|\}$ è compatto, quindi esistono $M_n\in\mathbb{N}$ e $y_{n,1},...,y_{n,M_n}\in\mathbb{C}_n$ tali per cui

$$C_n\subseteq\bigcup_{j=1}^{M_n}B\left(y_{n,j},\frac{\varepsilon}{2\sqrt{(N-1)}}\right).$$

Poniamo $M=\max\{M_1,...,M_N\}$. Consideriamo ora l'insieme

$$K_N=\{\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2:\,z_n\in\{y_{n,1},...,y_{n,M_n}\}\text{ per }1\leq n<N,\,z_n=0\text{ per }n\geq N\}.$$

Per ogni $1\leq n<N$ abbiamo al più M_N scelte possibili per il valore z_n, quindi possiamo costruire al più $(M_N)^{N-1}$ successioni in questo modo. L'insieme K_N quindi è finito.
Data $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ scegliamo $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in K_N$ in modo che $|x_n-z_n|<\dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{(N-1)}}$ per $n=1,...,N$, si ha allora

$$\begin{aligned}\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}-\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}&\leq\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}-\{T_Nx_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}+\|\{T_Nx_n\}_{n\in\mathbb{N}}-\{z\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}\\&=\left(\sum_{n=N}^{+\infty}|x_n|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{n=1}^{N-1}|x_n-z_n|^2\right)^{1/2}\\&\leq\frac{\varepsilon}{2}+\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\varepsilon^2}{4(N-1)}\right)^{1/2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Definizione 12. Sia $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una funzione. Sia

$$O:=\{\Omega\subseteq\mathbb{R}^n:\,\Omega\text{ aperto e }f(x)=0\text{ per q.o. }x\in\Omega\}.$$

L'insieme $\displaystyle\bigcup_{\Omega\in O}\Omega$ è aperto e $f=0$ q.o. su tale insieme. Definiamo il *supporto* di f come il chiuso dato da $\operatorname{supp}(f)=\mathbb{R}\setminus\displaystyle\bigcup_{\Omega\in O}\Omega$. Se $f_1=f_2$ q.o. si ha $\operatorname{supp}(f_1)=\operatorname{supp}(f_2)$ e se f è continua si ha $\operatorname{supp}(f)=\overline{\{x:\,f(x)\neq0\}}$. Indicheremo con $C^k_c(\mathbb{R}^n)$ le funzioni di classe C^k a supporto compatto.

Proposizione 9. *Sia $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $h\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con $1\leq p\leq\infty$. Sussistono le seguenti proprietà:*

(1) *per q.o. $x\in\mathbb{R}^n$ la funzione $y\mapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$. Risulta quindi ben definita la funzione*

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)\,dy,$$

che prende il nome di prodotto di convoluzione *di f e g.*

(2) *$f*g\in L^p$ e $\|f*g\|_{L^p}\leq\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$;*

(3) *$(f*g)(x)=(g*f)(x)$*

(4) *Posto $\check{f}(x)=f(-x)$ si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)\,h(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)(\check{f}*h)(x)\,dx$$

(5) $\operatorname{supp}(f*g)\subseteq\overline{\operatorname{supp}(f)+\operatorname{supp}(g)}$, *in particolare se f,g sono entrambe a supporto compatto allora $f*g$ è a supporto compatto. Ciò è falso in generale se solo una di esse è a supporto compatto.*

Dimostrazione.

(1) Si veda il punto successivo.

(2) Supponiamo $g \in L^\infty$. Allora si ha $f(x-y)g(y) \le \|g\|_{L^\infty} f(x-y)$ per q.o. y, che è integrabile per q.o. x e
$$|f * g(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\, dy \le \|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dy = \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1},$$
quindi $f * g \in L^\infty$.
Supponiamo $g \in L^1$. Allora si ha per q.o. $y \in \mathbb{R}^n$:
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\, dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dx = |g(y)|\, \|f\|_{L^1} < +\infty$$
e
$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\, dx \right) dy = \|g\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^1} < +\infty$$
quindi la funzione $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ è in $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ per il Teorema di Tonelli. Per il teorema di Fubini si allora che per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile quindi $f * g$ è ben definita e vale
$$\|f * g\|_{L^1} \le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\, dx \right) dy = \|g\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^1}.$$
Supponiamo $g \in L^p$, $1 < p < \infty$. Si ha che $|g|^p \in L^1$, quindi per il precedente, la funzione $y \mapsto |f(x-y)|\, |g(y)|^p$ è integrabile per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ fissato. Pertanto per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ fissato, si ha che $|f(x-y)|^{1/p}\, |g(y)| \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (si integra in y). Per ipotesi per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ fissato $|f(x-y)|^{1/p'}$ è in $L^{p'}$. Per Hölder si ottiene (x fissato):
$$\|f(x-y)g(y)\|_{L^1} = \|\, |f(x-y)|^{1/p'} \left(|f(x-y)|^{1/p} |g(y)| \right) \|_{L^1} \le \|\, |f|^{1/p'} \|_{L^{p'}} \|\, |f(x-y)|^{1/p}\, |g(y)|\, \|_{L^p}$$
e ciò vuol dire:
$$|f * g(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|, dy \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|\, dt \right)^{1/p'} \cdot \left(\int |f(x-y)|\, |g(y)|^p\, dy \right)^{1/p}$$
quindi ricordando che $|g|^p \in L^1$ e che $p/p' = p - 1$, per il punto precedente si ha
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|^p\, dx \le \|f\|_{L^1}^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^n} (|f| * |g|^p)(x)\, dx \le \|f\|_{L^1}^{p/p'} \|f\|_{L^1} \|\, |g|^p \|_{L^1} = \|f\|_{L^1}^p \|g\|_{L^p}^p,$$
da cui la tesi.

(3) ovvio dalla definizione (si esegue un cambiamento di variabili).

(4) Si osservi che $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)h(x)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, si usi questo fatto per invertire l'ordine di integrazione.

(5) omessa.

□

Definizione 13. Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, diremo che $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ se $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ per ogni K compatto contenuto in Ω.

Definizione 14. Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Un *multiindice* n-dimensionale è un elemento $\alpha \in \mathbb{N}^n$. La *lunghezza* di $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ è definita da $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Se $k \in \mathbb{N}$, e $f \in C^k(\Omega)$, si pone
$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial^{\alpha_1} x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial^{\alpha_n} x_n} f$$
con la convenzione che se $\alpha_j = 0$ il termine corrispondente non compare.

Proposizione 10. *Sia $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.*

(1) *se $f \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$ allora $f * g \in C^0(\mathbb{R}^n)$.*
(2) *se $f \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$, $k \ge 1$, allora $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$.*

Dimostrazione. Omessa. □

Definizione 15. Una successione di *mollificatori* è una successione $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni positive, di classe C^∞_c con $\text{supp}(\rho_n) \subseteq \overline{B(0, 1/n)}$ tali che $\|\rho_n\|_\infty = 1$.

Proposizione 11. *Sia* $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *successione di mollificatori.*

(1) *se* $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ *allora* $\rho_k * f \to f$ *uniformemente sui compatti di* $\mathbb{R}^n$ *per* $k \to \infty$.
(2) *se* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, *allora* $\rho_k * f \to f$ *in* L^p *per* $k \to \infty$, *quindi* C^∞_c *è denso in* L^p.

Dimostrazione. Omessa. □

Corollario 1. *Sia* Ω *aperto,* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *tale che per ogni* $f \in C^\infty_c(\Omega)$ *valga* $\displaystyle\int uf = 0$. *Allora* $u = 0$ *q.o. su* Ω.

Dimostrazione. Omessa. □

9. Esercitazione del 15 dicembre 2009 (2 ore): Operatori lineari, compattezza, spettro

Esercizio 39. Risolvere il seguente problema agli autovalori
$$\int_0^{2\pi} \cos(x+t)u(t)dt - \lambda u(x) = 0.$$

Svolgimento. Supponiamo inizialmente solo che $y \in L^2([0, 2\pi])$ e applichiamo la formula di addizione del coseno. Otteniamo
$$\cos x \int_0^{2\pi} \cos t\ y(t)dt - \sin x \int_0^{2\pi} \sin t\ y(t)dt = \lambda y(x).$$
Da questa espressione vediamo che y è continua e di periodo 2π, in verità essa è $C^\infty(\mathbb{R})$. Ne segue che il suo sviluppo di Fourier è convergente puntualmente ovunque, oltre che in norma in $L^2([0, 2\pi])$. Denotiamo, come di consueto,
$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos t\ y(t)dt; \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin t\ y(t)dt$$
L'equazione si può riscrivere nella forma
$$\cos(x)\pi a_1 - \sin(x)\pi b_1 - \lambda y(x) = 0.$$
Dall'unicità dei coefficienti di Fourier segue allora, sostituendo a $y(x)$ la sua espansione in serie, che $a_0 = 0$, $a_j = b_j = 0$ se $j > 1$. Si ottiene quindi
$$\cos(x)(\pi - \lambda)a_1 - \sin(x)(\pi + \lambda)b_1 = 0$$
Se $a_1 \neq 0$ allora necessariamente si deve avere $\pi = \lambda$ e $b_1 = 0$, e d'altra parte se $b_1 \neq 0$ allora necessariamente si deve avere $-\pi = \lambda$ e $a_1 = 0$. Dunque un autovalore è $\lambda = \pi$, con autovettore $y = a_1 \cos x$ (a_1 arbitrario). L'altro autovalore è $\lambda = -\pi$, con autovettore $y = b_1 \sin x$ (b_1 arbitrario).

Teorema 1. *Sia* H *spazio di Hilbert,* $T : H \to H$ *lineare continuo e autoaggiunto. Allora* $\|T\| = \sup\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}$.

Dimostrazione. Sia $\alpha = \sup\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}$. Allora
$$|\langle Tx, x\rangle| \le \|T\|\|x\|^2 = \|T\|$$
per ogni $x \in H$ con $\|x\| = 1$. Segue che $\alpha \le \|T\|$.
Per provare la disuguaglianza opposta è necessario provare che $\|Tx\| \le \alpha$ per ogni $\|x\| = 1$. Se $Tx = 0$ è vero. Posto $y = Tx/\|Tx\|$, consideriamo $\langle Tx, y\rangle = \|Tx\| \in \mathbb{R}$. Perciò:
$$\langle T(x \pm y), x \pm y\rangle = \langle Tx, x\rangle \pm 2\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle$$
Sottraendo membro a membro e ricordando la definizione di y si ha:
$$\begin{aligned}
4\|Tx\| &= \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \\
&\le \|x+y\|^2 \langle T\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}\right), \frac{x+y}{\|x+y\|}\rangle - \langle \|x-y\|^2 T\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right), \frac{x-y}{\|x-y\|}\rangle \\
&= \alpha(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \alpha(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2) = 4\alpha
\end{aligned}$$

Il risultato in generale non vale se T non è autoaggiunto. $\square$

Proposizione 12. *Sia H spazio di Hilbert, $H \neq \{0\}$. Allora se $T : H \to H$ è operatore lineare, continuo, compatto e autoaggiunto si ha che $-\|T\|$ oppure $\|T\|$ è autovalore di T. In conseguenza, se in uno spazio di Hilbert esiste un operatore compatto autoaggiunto senza autovalori, lo spazio è lo spazio nullo.*

Dimostrazione. Sappiamo che: $\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\{|\langle Tx, x\rangle|\}$. Poniamo $\mu = \|T\|$ se $\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\{\langle Tx, x\rangle\}$, altrimenti $\mu = -\|T\|$ se $\|T\| = \inf_{\|x\|=1}\{\langle Tx, x\rangle\}$. Allora esiste $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione, $\|x_n\| = 1$ tale che $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \mu$. Si ha:

$$\|Tx_n - \mu x_n\|^2 = \|Tx_n\| - 2\mu\langle Tx_n, x_n\rangle + \mu^2\|x_n\|^2 \leq \|T\|^2 - 2\mu\langle Tx_n, x_n\rangle + \mu^2.$$

da cui $\|Tx_n - \mu x_n\|^2 \to \|T\|^2 - \mu^2 = 0$ e quindi $\lim Tx_n - \mu x_n = 0$. Per compattezza è possibile estrarre una sottosuccessione indicata ancora con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $Tx_n \to y$. Ma allora $x_n \to y/\mu = x$ con $\|x\| = 1$. Segue $\mu x - Tx = \lim \mu x_n - Tx_n \mu x_n = 0$ e poiché $x \neq 0$ si ha che μ è autovalore. $\square$

Esercizio 40. Sia $V : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ l'operatore lineare definito ponendo

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad x \in [0,1].$$

(a) Calcolare esplicitamente l'operatore aggiunto V^*;
(b) calcolare esplicitamente l'operatore V^*V;
(c) verificare che V, V^* e V^*V sono compatti;
(d) determinare tutte le autofunzioni dell'operatore V^*V;
(e) provare che $\|V\| \geq 2/\pi$;
(f) è vero che $\|V\| = 2/\pi$?

Svolgimento.

(a) Per definizione, l'operatore aggiunto è caratterizzato dalla relazione $\langle V(f), g\rangle = \langle f, V^*(g)\rangle$ per ogni $f, g \in L^2$.

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,dt\right) g(x)\,dx = \int_0^1\int_0^1 f(t)\chi_{[0,x]}(t)g(x)\,dt\,dx$$

Siano ora $t, x \in]0,1[$. Osserviamo che si ha

$$\chi_{[0,x]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < t < x < 1. \\ 0, & \text{altrimenti .}\end{cases} \qquad \chi_{[t,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < t < x < 1. \\ 0, & \text{altrimenti .}\end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 f(t)\chi_{[0,x]}(t)g(x)\,dt\,dx &= \int_0^1\int_0^1 f(t)\chi_{[t,1]}(x)g(x)\,dt\,dx \\ &= \int_0^1 f(t)\left(\int_0^1 \chi_{[t,1]}(x)g(x)\,dx\right)dt,\end{aligned}$$

e si conclude che

$$V^*(g)(t) = \int_0^1 \chi_{[t,1]}(x)g(x)\,dx = \int_t^1 g(x)\,dx.$$

(b) Calcoliamo

$$V^*V(f)(x) = \int_x^1 V(f)(t)\,dt = \int_x^1\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)dt$$

Si poteva arrivare al medesimo risultato nel modo seguente:

$$\langle V^*V(f), g\rangle = \langle V(f), V(g)\rangle = \int_0^1 V(f)(x)\cdot V(g)(x)\,dx.$$

Integriamo per parti, ricordando che:

(a) una primitiva di $V(f)(x)$ è data da $\displaystyle\int_0^x V(f)(s)\,ds$,

(b) si ha $\dfrac{d}{dx}V(g)(x) = g(x)$ e $V(g)(0) = 0$.

Si ricava allora:

$$\begin{aligned}\langle V^*V(f), g\rangle &= \left[\left(\int_0^x V(f)(s)\,ds\right)\cdot V(g)(x)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \left(\int_0^x V(f)(s)\,ds\right)\cdot g(x)\,dx\\ &= \left(\int_0^1 V(f)(s)\,ds\right)\cdot V(g)(1) - \int_0^1 \left(\int_0^x V(f)(s)\,ds\right)\cdot g(x)\,dx\\ &= \left(\int_0^1 V(f)(s)\,ds\right)\cdot \int_0^1 g(x)\,dx - \int_0^1 \left(\int_0^x V(f)(s)\,ds\right)\cdot g(x)\,dx\\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 V(f)(s)\,ds\right)\cdot g(x)\,dx - \int_0^1 \left(\int_0^x V(f)(s)\,ds\right)\cdot g(x)\,dx\\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 V(f)(s)\,ds\right) - \int_0^x V(f)(s)\,ds)\cdot g(x)\,dx\\ &= \int_0^1 \left(\int_x^1 V(f)(s)\,ds\right)\cdot g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Pertanto si ha come prima:

$$V^*V(f)(x) = \int_x^1 V(f)(s)\,ds = \int_x^1 V(f)(t)\,dt = \int_x^1 \left(\int_0^t f(s)\,ds\right)\,dt.$$

(c) Proviamo che l'operatore $V : L^2 \to L^2$ è compatto. Osserviamo che per ogni $x, y \in [0,1]$

$$|V(f)(x) - V(f)(y)| = \left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_y^x f(t)\,dt\right|$$

Se $x > y$, si ottiene allora

$$\begin{aligned}|V(f)(x) - V(f)(y)| &= \left|\int_0^1 \chi_{[y,x]}(t)f(t)\,dt\right| \le \int_0^1 \left|\chi_{[y,x]}(t)f(t)\right|\,dt\\ &\le \|f\|_{L^2}\|\chi_{[y,x]}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}|y-x|^{1/2}.\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo, se $x < y$ si ha

$$\begin{aligned}|V(f)(x) - V(f)(y)| &= \left|\int_0^1 \chi_{[x,y]}(t)f(t)\,dt\right| \le \int_0^1 \left|\chi_{[x,y]}(t)f(t)\right|\,dt\\ &\le \|f\|_{L^2}\|\chi_{[x,y]}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}|x-y|^{1/2}.\end{aligned}$$

Quindi per ogni $f \in L^2$ si ha che

$$|V(f)(x) - V(f)(y)| \le \|f\|_{L^2}|x-y|^{1/2}$$

in particolare $V(f)$ è continua, pertanto $V : L^2 \to C^0 \subseteq L^2$.

Sia ora B un insieme limitato in L^2, e $M > 0$ tale che $\sup\limits_{f\in B}\|f\|_{L^2} \le M$. Proviamo che $V(B)$ ha chiusura compatta in $\left(C^0, \|\cdot\|_\infty\right)$.

A tal proposito, utilizziamo il Teorema di Ascoli-Arzelà:

(a) l'insieme $V(B)$ è equilimitato, infatti per ogni $f \in B$, $x \in [0,1]$ vale:

$$|V(f)(x)| = \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |\chi_{[0,x]}f(t)|\,dt \le \|f\|_{L^2} \le M.$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la disuguaglianza di Hölder.

(b) l'insieme $V(B)$ è equicontinuo, infatti per ogni $x, y \in [0,1]$ e $f \in B$ si ha

$$|V(f)(x) - V(f)(y)| \le \|f\|_{L^2}|x-y|^{1/2} \le M\cdot|x-y|^{1/2}$$

per cui per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \varepsilon^2/M^2$ tale per cui se $|x-y| < \delta$ allora $|V(f)(x) - V(f)(y)| \le \varepsilon$ per ogni $f \in B$.

Quindi $V(B)$ è relativamente compatto in $\left(C^0, \|\cdot\|_\infty\right)$. Poiché l'immersione $C^0 \to L^2$ è continua (infatti si ha $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_\infty$ per ogni $u \in C^0([0,1])$), si ha che $V(B)$ è relativamente compatto in L^2.
Proviamo ora che $V^* : L^2 \to L^2$ è compatto Osserviamo che per ogni $x, y \in [0,1]$

$$|V^*(f)(x) - V^*(f)(y)| = \left|\int_x^1 f(t)\,dt - \int_y^1 f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right|$$

pertanto con un ragionamento esattamente analogo al precedente, si ha la compattezza di V^*. La compattezza di V^*V discende dalla compattezza e continuità dei due operatori V^* e V.

(d) dobbiamo determinare tutte le funzioni u tali per cui $V^*V(u) = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Si ha quindi:

$$\int_x^1 \left(\int_0^t u(s)\,ds\right)\,dt = \lambda u(x)$$

pertanto $u \in C^1$. Derivando, si ottiene:

$$-\int_0^x u(s)\,ds = \lambda u'(x), \qquad\qquad u(1) = 0$$

da cui $u \in C^2$ e derivando ulteriormente si arriva a $-u(x) = \lambda u''(x)$, $u'(0) = 0$, da cui per $\lambda \neq 0$ si ha

$$u''(x) + \frac{1}{\lambda}u(x) = 0, \qquad u(1) = u'(0) = 0.$$

Questo problema ammette soluzioni

$$u_\lambda(x) = \begin{cases} ae^{x/\sqrt{|\lambda|}} + be^{-x/\sqrt{|\lambda|}}, & \text{per } \lambda < 0,\ a, b \in \mathbb{R} \\ a\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{|\lambda|}}\right) + b\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{|\lambda|}}\right), & \text{per } \lambda > 0,\ a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sostituendo la condizione $u'(0) = 0$ si ha $a = b$ nel caso $\lambda < 0$ e $b = 0$ nel caso $\lambda > 0$, da cui

$$u_\lambda(x) = \begin{cases} a\left(e^{x/\sqrt{|\lambda|}} + e^{-x/\sqrt{|\lambda|}}\right), & \text{per } \lambda < 0,\ a \in \mathbb{R} \\ a\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{|\lambda|}}\right), & \text{per } \lambda > 0,\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Se $\lambda < 0$, la condizione $u(1) = 0$ è soddisfatta solo per $a = 0$ quindi $u(x) = 0$, il che non è accettabile, pertanto si ha $\lambda > 0$ e per soddisfare $u(1) = 0$ si deve avere

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right) = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

quindi $\lambda_k = 4/\pi^2(2k+1)^{-2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Le autofunzioni sono dunque

$$u_k(x) = a\cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi x\right), a \in \mathbb{R}.$$

(e) Sappiamo che

$$\bar{u}(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

è autofunzione e che quindi

$$V^*V(\bar{u}) = \frac{4}{\pi^2}\bar{u}$$

Ciò implica che $\|V^*V\| \geq 4/\pi^2$. Per definizione, si ha che

$$\|V^*V(f)\|_{L^2} \leq \|V^*\|\|V(f)\|_{L^2} \leq \|V^*\| \cdot \|V\| \cdot \|f\|_{L^2}$$

e inoltre si sa che $\|V\| = \|V^*\|$. Si conclude che $4/\pi^2 \leq \|V^*V\| \leq \|V\|^2$, come richiesto.

(f) L'operatore $W = V^*V$ è compatto e autoaggiunto, infatti

$$\langle V^*Vf, g\rangle = \langle Vf, Vg\rangle = \langle f, V^*Vg\rangle$$

e quindi $W^* = (V^*V)^* = V^*V = W$. Poiché W è compatto ed autoaggiunto, si ha che uno tra $\|W\|$ e $-\|W\|$ è autovalore di W pertanto è il massimo o il minimo tra gli autovalori, nel nostro caso $\|W\| = 4/\pi^2$. A questo punto, sia f_n successione in L^2 con $\|f_n\|_{L^2} \leq 1$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \|V(f_n)\|_{L^2} = \|V\|_{L^2}$$

si ha

$$\|V(f_n)\|_{L^2}^2 = \langle V(f_n), V(f_n)\rangle = \langle Wf_n, f_n\rangle \leq \|W\|.$$

da cui la tesi.

10. Esercitazione del 12 gennaio 2009 (2 ore): Teorema di Lax-Milgram, teoria di Fredholm

Esercizio 41. Si consideri la seguente equazione differenziale con condizioni al contorno di tipo Neumann:

$$-D\left(\frac{u'}{x^2+1}\right) + u = e^x, \qquad\qquad u'(0) = u'(1) = 0.$$

Si stabilisca se il problema ammette un'unica soluzione e in caso affermativo la si caratterizzi come minimo di un opportuno funzionale integrale.

Svolgimento. La formulazione debole dell'equazione porge:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 e^x\, v(x)\,dx, \qquad\qquad \forall v \in H^1,$$

ricordando le condizioni al contorno di Neumann.
Definiamo le seguenti applicazioni $B : H^1 \times H^1 \to \mathbb{R}$ e $F : H^1 \to \mathbb{R}$:

$$B(u,v) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} u'(x)\,v'(x)\,dx + \int_0^1 u(x)\,v(x)\,dx, \qquad\qquad F(v) = \int_0^1 e^x v(x)\,dx,$$

Proviamo che $B(\cdot,\cdot)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lax-Milgram:

(1) banalmente B è lineare in ogni argomento;
(2) è continua (si applichi la disuguaglianza di Hölder):

$$|B(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$

perché $(x^2+1)^{-1} \leq 1$ per $0 < x < 1$ e $\|u\|_{L^2}, \|u'\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$;
(3) è coerciva:

$$B(u,u) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}|u'(x)|^2\,dx + \int_0^1 |u(x)|^2\,dx \geq \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2\,dx + \int_0^1 |u(x)|^2\,dx \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2.$$

La mappa F è continua, infatti applicando ancora la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$|F(v)| \leq \left(\int_0^1 e^{2x}\,dx\right)^{1/2} \|v\|_{L^2} \leq C\|v\|_{H^1}.$$

Per il teorema di Lax-Milgram, il problema ammette un'unica soluzione debole $\bar{u} \in H^1$. Dall'equazione, si deduce poi che $\bar{u} \in H^2$ e soddisfa $\bar{u}'(0) = \bar{u}'(1) = 0$.
Essendo la forma bilineare $B(u,v)$ simmetrica, la soluzione $\bar{u}$ è caratterizzata dall'essere l'unico minimizzante di

$$\frac{1}{2}B(u,u) - F(u) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}|u'(x)|^2\,dx + \int_0^1 |u(x)|^2\,dx\right) - \int_0^1 e^x\,u(x)\,dx,$$

tra tutte le funzioni $u \in H^1$.

Esercizio 42. Si provi che per $|\lambda| > 1$ l'equazione integrale nell'incognita $f \in C^0([0,1])$
$$\int_0^1 e^{-st} f(t)dt - \lambda f(s) = g(s)$$
ha soluzione per ogni $g \in C^0([0,1])$ assegnata.

Svolgimento. Ricordiamo che se $f \in C^0([0,1])$ si ha $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_\infty$, ovvero l'immersione $(C^0, \|\cdot\|_\infty) \to (L^2, \|\cdot\|_{L^2})$ è continua. Poniamo
$$T(f)(s) := \int_0^1 e^{-st} f(t)dt,$$
e l'equazione assume la forma $T(f) - \lambda f = g$. T è lineare (ovviamente) e dato che:
$$|T(f)(s)| \leq \int_0^1 |f(t)| \leq \|f\|_{L^2},$$
si ha che T è continuo sia come operatore di $(L^2, \|\cdot\|_{L^2})$ in sé, che come operatore di $(C^0, \|\cdot\|_\infty)$ in sé, inoltre $\|T\| \leq 1$.
La stessa disuguaglianza porge l'equilimitatezza di $T(B_{L^2}) := \{Tf : f \in C^0, \|f\|_{L^2} \leq 1\}$. Si ha inoltre;
$$|T(f)(s_1) - T(f)(s_2)| = \left| \int_0^1 (e^{-s_1 t} - e^{s_2 t}) f(t)\, dt \right| \leq \|f\|_{L^2} \sup_{t \in [0,1]} |e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}| \leq |s_1 - s_2|.$$
Essendo le funzioni $T(f)$ equilipschitziane, si ottiene la compattezza di $T(B_{L^2})$ per il Teorema di Ascoli-Arzelà. La stessa disuguaglianza porge come Tf sia continua per ogni $f \in L^2$, e quindi come l'operatore $T : L^2 \to L^2$ sia compatto. Proviamo che tale operatore è autoaggiunto:
$$\langle Tf, v\rangle = \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{-st} f(t)dt \right) v(s)\, ds = \int_0^1 \int_0^1 e^{-st} f(t) v(s)\, ds\, dt = \langle f, \int_0^1 e^{-st}\, v(s)\, ds\rangle$$
Si è potuto invertire l'ordine di integrazione grazie al teorema di Fubini e Tonelli, in quanto
$$\int_0^1 \int_0^1 |e^{-st} f(t) v(s)|\, ds\, dt \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(t) v(s)|\, ds\, dt \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$
Quindi $T^* = T$ e l'operatore è autoaggiunto.
Essendo $T : L^2 \to L^2$ un operatore compatto e autoaggiunto, il suo spettro è costituito al più da un'infinità numerabile di autovalori di molteplicità finita e dallo zero.
Studiamo pertanto l'equazione $\frac{1}{\lambda} T(f) = f$.
Si ottiene che se $|\lambda| > 1$, vale $\|T/\lambda\| < 1$ pertanto $\frac{1}{\lambda} T$ è una contrazione in L^2 (ed in C^0) ed ammette un solo punto unito, e tale punto unito è $f \equiv 0$. Quindi se $\lambda > 1$, l'equazione integrale ammette un'unica soluzione $f_g \in L^2$ per ogni dato $g \in L^2$. Se poi $g \in C^0([0,1]) \subset L^2([0,1])$, si ricava che Tf_g e g sono continui e quindi anche f_g deve essere continua.

Esercizio 43. Consideriamo l'equazione integrale per $\lambda \neq 0$:
$$\lambda u(t) - \int_0^1 (t+s) u(s)\, ds = f(t)$$
Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{C}$ l'equazione ammette soluzione per ogni $f \in L^2(0,1)$ e per tali valori si scriva esplicitamente la soluzione.

Svolgimento. Poniamo
$$(Tu)(t) = \int_0^1 k(t,s) u(s)\, ds, \qquad k(t,s) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \psi_i(s),$$
con $\varphi_1, ..., \varphi_n$ linearmente indipendenti in L^2. Allora si ha:
$$(Tu)(t) = \int_0^1 k(t,s) u(s)\, ds = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \psi_i(s) u(s)\, ds = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \int_0^1 \psi_i(s) u(s)\, ds.$$

Poniamo:

$$c_i = \int_0^1 \psi_i(s)u(s)\,ds.$$

L'equazione omogenea $\lambda u = Tu$ si riduce allora a:

$$\lambda u(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)c_i$$

L'operatore integrale ha quindi rango finito, quindi è compatto.
Sostituendo questa relazione nei due membri dell'equazione si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)c_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \int_0^1 \psi_i(s) \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(s)c_j \right) ds$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \left(\lambda c_i - \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \psi_i(s)\varphi_j(s)\,ds\, c_j \right) = 0.$$

Poniamo quindi

$$a_{ij} = \int_0^1 \psi_i(s)\varphi_j(s)\,ds,$$

e sia $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ la matrice formata da tali coefficienti. Per l'indipendenza degli φ_i si ottiene

$$\lambda c_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = 0,$$

che si può scrivere anche come $(\lambda \mathrm{Id} - A)c = 0$. Ciò vale solo se λ è autovalore di A. Gli autovalori di T sono quindi gli autovalori di A.
l'equazione non omogenea si scrive nella forma:

$$\lambda u(t) - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t)c_j = f$$

moltiplicando scalarmente per ψ_i si ha:

$$\lambda c_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = f_i,$$

dove $f_i = \int_0^1 f(s)\psi_i(s)\,ds$.
Se $\lambda \neq 0$ non è un autovalore, si ha:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (\lambda \mathrm{Id} - A)^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Si ha poi

$$u(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)c_i + f(t) \right).$$

Nel nostro caso, si ha $n = 2$, $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = 1$ ed essi sono linearmente indipendenti. Inoltre $\psi_1(s) = 1$, $\psi_2(s) = s$.
Costruiamo quindi la matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} \int_0^1 s\,ds & \int_0^1 ds \\ \\ \int_0^1 s^2\,ds & \int_0^1 s\,ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Possiamo calcolare gli autovalori come soluzioni dell'equazione $\lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\,\lambda + \mathrm{Det}(A) = 0$, ossia $\lambda^2 - \lambda - 1/12 = 0$, le cui radici sono $\lambda_1 = \frac{1}{6}\left(3 - 2\sqrt{3}\right)$, $\lambda_2 = \frac{1}{6}\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$.
Si ha

$$(\lambda \mathrm{Id} - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1/2 & -1 \\ & \\ -1/3 & \lambda - 1/2 \end{pmatrix}$$

e la sua inversa è

$$(\lambda \mathrm{Id} - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{12}} & \frac{1}{\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{12}} \\ -\frac{4}{-12\lambda^2 + 12\lambda + 1} & \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12\lambda - 6}{12\lambda^2 - 12\lambda - 1} & \frac{12}{12\lambda^2 - 12\lambda - 1} \\ \frac{4}{12\lambda^2 - 12\lambda - 1} & \frac{12\lambda - 6}{12\lambda^2 - 12\lambda - 1} \end{pmatrix}$$

Se $\lambda \neq 0, \lambda_1, \lambda_2$, si ha:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (\lambda \mathrm{Id} - A)^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Esplicitando:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(12\lambda - 6)f_1 - 12 f_2}{12\lambda^2 - 12\lambda - 1} = \frac{1}{12\lambda^2 - 12\lambda - 1}\left((12\lambda - 6)\int_0^1 f(s)\,ds + 12\int_0^1 s f(s)\,ds\right) \\ &= \int_0^1 \frac{(12\lambda - 6 + 12s)\,f(s)}{12\lambda^2 - 12\lambda - 1}\,ds, \\ c_2 &= \frac{4 f_1 + (12\lambda - 6) f_2}{12\lambda^2 - 12\lambda - 1} = \frac{1}{12\lambda^2 - 12\lambda - 1}\left(4\int_0^1 f(s)\,ds + (12\lambda - 6)\int_0^1 s f(s)\,ds\right) \\ &= \int_0^1 \frac{(4 + 12\lambda s - 6s)\,f(s)}{12\lambda^2 - 12\lambda - 1}\,ds \end{aligned}$$

La soluzione è

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\lambda}\,(t c_1 + c_2 + f(t)) \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(t\int_0^1 \frac{(12\lambda\ - 6 + 12s)\,f(s)}{12\lambda^2 - 12\lambda - 1}\,ds + \int_0^1 \frac{(4 + 12\lambda s - 6s)\,f(s)}{12\lambda^2 - 12\lambda - 1}\,ds + f(t)\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\int_0^1 \frac{(12st + 12s\lambda - 6s + 12t\lambda - 6t + 4)\,f(s)}{12\lambda^2 - 12\lambda - 1}\,ds + f(t)\right) \end{aligned}$$

Esercizio 44. Sia $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ l'operatore definito da:

$$Tf(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s)\,ds, \qquad\qquad k(t,s) = \min\{t,s\}.$$

Si provi che $L^2(0,1)$ ha una base costituita da autofunzioni di T. Considerando l'operatore $Af = -f''$ definito su $D_A = \{f \in H^2(0,1) : f(0) = f'(1) = 0\}$, si trovi una tale base.

Svolgimento. Si ha banalmente che $k(t,s) \in L^2([0,1] \times [0,1], \mathbb{R})$, inoltre $k(t,s) = k(s,t)$ pertanto l'operatore T è compatto e autoaggiunto (per la compattezza, si ricordi che l'operatore può essere approssimato con operatori di rango finito, ottenuti dall'approssimazione in serie di Fourier del nucleo). Consideriamo l'equazione $Af = 0$ definita su D_A. Si ha che essa ha soluzione generale $f(t) = c_1 + c_2 t$ e sostituendo le condizioni $f(0) = f'(1) = 0$ si ha che A è iniettivo su D_A. Risolviamo l'equazione $Af = g$ con le condizioni al contorno. Si ha $-f''(t) = g(t)$ quindi

$$f'(t) = \int_t^1 g(s)\,ds, \qquad\qquad f(t) = \int_0^t \int_x^1 g(s)\,ds\,dx.$$

Riscriviamo:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t \int_x^1 g(s)\,ds\,dx = \left[t\int_t^1 g(s)\,ds \right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x tg(t)\,dt = \int_x^1 xg(s)\,ds + \int_0^x tg(t)\,dt \\ &= \int_0^x tg(t)\,dt + \int_x^1 xg(t)\,dt = \int_0^1 k(x,t)g(t)\,dt. \end{aligned}$$

Quindi T è l'inverso di A. Gli autovalori di T sono i reciproci degli autovalori di A, e le autofunzioni sono le stesse. Gli autovalori di A sono le soluzioni di $-f''(t) = \lambda f(t)$ soggette alle condizioni $f(0) = f'(1) = 0$. Le soluzioni di $f''(t) + \lambda f(t) = 0$ sono

(1) se $\lambda < 0$, si ha $c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}t} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}t}$. Sostituendo le condizioni al contorno si ottiene $c_1 = -c_2$ e $c_1(\sqrt{|\lambda|}e^{\sqrt{|\lambda|}} + \sqrt{|\lambda|}e^{\sqrt{-|\lambda|}}) = 0$ da cui $c_1 = c_2 = 0$ non accettabile.
(2) se $\lambda = 0$, si ha $c_1 = c_2 = 0$, non accettabile.
(3) se $\lambda > 0$, si ha $c_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}t)$. Sostituendo le condizioni al contorno si ha $c_1 = 0$ da cui $c_2 \sin(\sqrt{\lambda}t)$, derivando e valutando in 1 si ha $c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$, quindi $\lambda = (\pi/2 + n\pi)^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Le autofunzioni sono quindi:

$$f_n = c_n \sin((\pi/2 + n\pi)x), \qquad .$$

Determiniamo c per ottenere una base ortonormale:

$$\int_0^1 \sin^2((\pi/2 + n\pi)x)\,dx = \frac{1}{2}$$

quindi $c_n = \sqrt{2}$.

11. Esercitazione del 19 gennaio 2010 (2 ore): Problemi di Sturm-Liouville. Spazi di Sobolev.

Esercizio 45. Si consideri l'*equazione di Bessel di ordine* α:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \alpha^2)y(x) = 0,$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si scriva l'equazione in forma di Sturm-Liouville e si determini esplicitamente una soluzione in forma di serie.

Svolgimento. Dividiamo l'equazione data per x ottenendo:

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = \alpha^2 \frac{1}{x}\,y(x),$$

che può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dx}(xy'(x)) + xy(x) = \alpha^2 \frac{1}{x}\,y(x),$$

ritrovando così la forma canonica del problema di Sturm-Liouville.
Consideriamo l'equazione omogenea (caso $\alpha = 0$)

$$\frac{d}{dx}(xy'(x)) + xy(x) = 0,$$

dividendo per x^2 l'equazione data si ha:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + y(x) = 0.$$

Per trovare una soluzione di questa equazione (in forma di serie) procediamo con un metodo noto come *metodo di Frobenius*. Cerchiamo una soluzione nella forma

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}.$$

con λ, a_n costanti da determinarsi. Sostituendo nell'equazione si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)x^{n+\lambda-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} = 0,$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)^2 x^{n+\lambda-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} = 0,$$

e raccogliendo:

$$x^{\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)^2 x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0\right).$$

Per $n = 0, 1$ si ottiene $a_0\lambda^2 = 0$ e $a_1(1+\lambda)^2 = 0$, da cui $\lambda = 0$ e $a_1 = 0$. Per $n \geq 2$ si ottiene $n^2 a_n = -a_{n-2}$. Questo implica che $a_{2k+1} = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, mentre, si ha per $k \geq 1$:

$$a_{2k} = \frac{-1}{4k^2} a_{2(k-1)} = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} a_0.$$

Pertanto una soluzione in forma di serie corrispondente ad $\alpha = 0$ è data da (si ricordi che $0! = 1$)

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} x^{2k} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

La serie che compare prende il nome di *funzione di Bessel di primo tipo di ordine* 0 e si indica con $J_0(x)$.

Dividendo per x^2 l'equazione data nel caso $\alpha \neq 0$ si ha:

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) y(x) = 0.$$

Per trovare una soluzione di questa equazione (in forma di serie) procediamo con un metodo noto come *metodo di Frobenius*. Tape metodo si applica ad equazioni $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ dove una tra P e Q presenta una singolarità in 0, ma $xP(x)$ e $x^2Q(x)$ sono funzioni analitiche. Cerchiamo una soluzione nella forma

$$y(x) = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}.$$

con λ, a_n costanti da determinarsi. Sostituendo nell'equazione si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)x^{n+\lambda-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} - \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda-2} = 0,$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n(n+\lambda)^2 - \alpha^2) x^{n+\lambda-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} = 0,$$

e raccogliendo:

$$x^{\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n(n+\lambda)^2 - \alpha^2) x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0\right).$$

Per $n = 0, 1$ si ottiene

$$a_0(\lambda - \alpha)(\lambda + \alpha) = 0$$
$$a_1(1 + \lambda + \alpha)(1 + \lambda - \alpha) = 0.$$

Scegliamo la soluzione $\lambda = \alpha > 0$. Si ottiene allora $a_1 = 0$. Per $n \geq 2$ si ha:

$$a_n = -\frac{1}{n(n+2\alpha)} a_{n-2},$$

e questo implica $a_{2k+1} = 0$ per $k \in \mathbb{N}$. Per quanto riguarda gli altri valori, si ottiene per $k \geq 1$:

$$a_{2k} = \frac{-1}{4k(k+\alpha)} a_{2(k-1)} = \frac{(-1)^k}{4^k k!(k+\alpha) \cdot \dots \cdot (\alpha+1)} a_0.$$

Pertanto una soluzione in forma di serie corrispondente ad $\alpha \neq 0$ è data da (si ricordi che $0! = 1$)

$$y(x) = a_0 x^\alpha \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k!(k+\alpha)\cdot \dots \cdot(\alpha+1)} x^{2k}\right].$$

Tale funzione, moltiplicata per una costante opportuna[1] prende il nome di *funzione di Bessel di primo tipo di ordine* α e si indica con $J_\alpha(x)$.

Esercizio 46. Si consideri in $L^2(0,\pi)$ l'operatore di Sturm-Liouville $A : D_A \subset L^2 \to L^2$ definito da $Au = -u''$ dove

$$D_A = \{u \in H^2(0,\pi) : \; u(0) + u'(0) = 0, \; u(\pi) + u'(\pi) = 0\}.$$

(1) Si determinino gli autovalori di A;
(2) Si determini la funzione di Green $k(t,s)$ dell'operatore;
(3) Si determini lo spettro di

$$Tf(t) = \int_0^\pi k(t,s) f(s)\, ds,$$

e si scriva T in forma diagonale.

Svolgimento. Per determinare gli autovalori è necessario trovare soluzioni non nulle dell'equazione $Au = \lambda u$ con le condizioni al contorno assegnate. La soluzione dell'equazione generale porge

$$u(t) = \begin{cases} c_1 e^{t\sqrt{|\lambda|}} + c_2 e^{-t\sqrt{|\lambda|}} & \text{se } \lambda < 0, \\ c_1 + c_2 t & \text{se } \lambda = 0, \\ c_1 \cos(t\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(t\sqrt{\lambda}) & \text{se } \lambda > 0. \end{cases} \quad u'(t) = \begin{cases} c_1\sqrt{|\lambda|} e^{t\sqrt{|\lambda|}} - c_2 \sqrt{|\lambda|} e^{-t\sqrt{|\lambda|}} & \text{se } \lambda < 0, \\ c_2 & \text{se } \lambda = 0, \\ \sqrt{\lambda}(-c_1 \sin(t\sqrt{\lambda}) + c_2 \cos(t\sqrt{\lambda})) & \text{se } \lambda > 0. \end{cases}$$

In particolare si ottiene:

$$u(0) + u'(0) = \begin{cases} c_1 + c_2 + c_1\sqrt{|\lambda|} - c_2\sqrt{|\lambda|} = c_1(1+\sqrt{|\lambda|}) + c_2(1-\sqrt{|\lambda|}) & \text{se } \lambda < 0, \\ c_1 + c_2 & \text{se } \lambda = 0, \\ c_1 + c_2\sqrt{\lambda} & \text{se } \lambda > 0. \end{cases}$$

e

$$u(\pi) + u'(\pi) = \begin{cases} c_1 e^{\pi\sqrt{|\lambda|}} + c_2 e^{-\pi\sqrt{|\lambda|}} + c_1\sqrt{|\lambda|} e^{\pi\sqrt{|\lambda|}} - c_2\sqrt{|\lambda|} e^{-\pi\sqrt{|\lambda|}} & \text{se } \lambda < 0, \\ c_1 + c_2\pi + c_2 & \text{se } \lambda = 0, \\ c_1 \cos(\pi\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}(-c_1 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) + c_2\cos(\pi\sqrt{\lambda})) & \text{se } \lambda > 0. \end{cases}$$

Riscrivendo, si ottengono i seguenti sistemi:

(1) Se $\lambda < 0$ si ha $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{|\lambda|} & 1-\sqrt{|\lambda|} \\ (1+\sqrt{|\lambda|})e^{\pi\sqrt{|\lambda|}} & (1-\sqrt{|\lambda|})e^{-\pi\sqrt{|\lambda|}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$. Il determinante è nullo solo se $\lambda = -1$, cui corrisponde la soluzione $c_2 e^{-t}$, $c_2 \neq 0$.
(2) Se $\lambda = 0$ si ha $c_1 + c_2 = 0$ e $c_1 + c_2 + \pi c_2 = 0$ da cui $c_2 = c_1 = 0$, non accettabile.
(3) Se $\lambda > 0$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\lambda} \\ \cos(\pi\sqrt{\lambda}) - \sqrt{\lambda}\sin(\pi\sqrt{\lambda}) & \sin(\pi\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\cos(\pi\sqrt{\lambda}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Il determinante di questa matrice è $(1+\lambda)\sin(\pi\sqrt{\lambda})$ e tale determinante è nullo per $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. In tal caso si ottiene $c_1 = nc_2$ e scriveremo c_n al posto della costante c_2. Pertanto gli autovalori di A sono -1 e n^2 e le corrispondenti autofunzioni sono $u_{-1}(t) = c_{-1}e^{-t}$ e

[1] la cui definizione esula dallo scopo della presente trattazione

$u_n(t) = c_n(n\cos(nt)+\sin(nt))$. Per avere una base ortonormale di autofunzioni, è necessario che $\|u_{-1}\|_{L^2} = \|u_n\|_{L^2} = 1$, quindi

$$1 = c_{-1}^2 \int_0^\pi e^{-2t}\,dt = c_{-1}^2 \left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = c_{-1}^2 \frac{1-e^{-4\pi}}{2};$$

$$1 = c_n^2 \int_0^\pi (n\cos(nt)+\sin(nt))^2\,dt = c_n^2 \int_0^\pi (n^2\cos^2(nt)+\sin^2(nt)+2n\cos(nt)\sin(nt))\,dt$$

$$= c_n^2(n^2+1)\frac{\pi}{2} + n\int_0^\pi \sin(2nt))\,dt = c_n^2(n^2+1)\frac{\pi}{2}.$$

Nel calcolo si è utilizzato che:
- l'integrale tra 0 e π di $\cos^2 nt$ è uguale a quello di $\sin^2 nt$ per periodicità,
- tali integrali sono la metà di quello tra 0 e 2π delle medesime funzioni per parità,
- l'integrale tra 0 e π di $\sin(2nx)$ è nullo per periodicità.

Pertanto una base ortonormale di autofunzioni è data da $u_{-1}(t) = \sqrt{\frac{2}{1-e^{-4\pi}}}e^{-t}$, $u_n(t) = \frac{\sqrt{2}(n\cos(nt)+\sin(nt))}{\sqrt{\pi(n^2+1)}}$.

Per determinare la funzione di Green dobbiamo risolvere l'equazione $Au = g$. L'operatore A è iniettivo (0 non è autovalore), pertanto è possibile scegliere una soluzione u_1 tale che $Au_1 = 0$ e $u_1(0)+u_1'(0) = 0$ e una soluzione v_1 tale che $Av_1 = 0$ e $v_1(\pi)+v_1'(\pi) = 0$ in modo che u_1 e v_1 siano indipendenti. Nel nostro caso si ha $A\tilde{u} = 0$ se e solo se $\tilde{u}(t) = c_1 + c_2 t$, pertanto possiamo scegliere $u_1(t) = 1-t$ e $v_1(t) = 1+\pi-t$. Tali soluzioni sono indipendenti. Applichiamo il metodo della variazione delle costanti: cerchiamo soluzioni di $Au = g$, ovvero di $u'' = -g$ nella forma $f(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)v_1(x)$, si ottiene il sistema:

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_1' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} 1-t & 1+\pi-t \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Sviluppando il sistema, si ottiene $c_2' = -(1-t)g/\pi$ e $c_1' = -(t-\pi-1)g/\pi$. Risolviamo prendendo una primitiva nulla in π per c_1 e nulla in 0 per c_2:

$$c_1(x) = -\int_x^\pi -\frac{t-\pi-1}{\pi}g(t)\,dt, \qquad c_2(x) = \int_0^x -\frac{1-t}{\pi}g(t)\,dt,$$

quindi la soluzione è

$$f(x) = \int_0^x -\frac{1-t}{\pi}g(t)v_1(x)\,dt - \int_x^\pi -\frac{t-\pi-1}{\pi}g(t)u_1(x)\,dt$$

Poniamo

$$k(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}(t-\pi-1)(1-s), & \text{se } 0 \le s \le t, \\ \\ \dfrac{1}{\pi}(s-\pi-1)(1-t), & \text{se } t \le s \le \pi, \end{cases}$$

in modo da poter scrivere la soluzione:

$$f(t) = \int_0^\pi k(t,s)g(s)\,ds.$$

k è la funzione di Green cercata. Gli autovalori di T sono $\mu_{-1} = -1$ e $\mu_n = 1/n^2$, ovvero i reciproci di quelli di A, le autofunzioni sono le stesse. T è compatto e autoaggiunto e si ha:

$$Tf = -\langle f, u_{-1}\rangle\, u_{-1} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\langle f, u_n\rangle\, u_n.$$

Esercizio 47. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente sommabile su $\mathbb{R}$ e tale che:

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^2} \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

(1) Provare che esiste una successione $h_n \to 0^+$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x + h_n) - f(x)|}{h_n}\, dx = 0.$$

(2) Dedurre che f è una funzione costante quasi ovunque.

Svolgimento. Posto $y = x + h$, si ha che

$$\frac{|f(x + h) - f(x)|}{h^2} \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Sia $\varepsilon > 0$ e supponiamo che esista $\delta > 0$ dove si abbia

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x + h) - f(x)|}{h}\, dx \geq \varepsilon, \qquad \text{per q.o. } 0 < h < \delta$$

Allora si ottiene:

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x + h) - f(x)|}{h^2}\, dx\, dh \geq \int_0^\delta \frac{1}{h} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x + h) - f(x)|}{h}\, dx\right) dh \geq \varepsilon \int_0^\delta \frac{1}{h}\, dh = +\infty.$$

Questo fatto contraddice l'ipotesi su f, quindi per ogni $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ e $h_\delta \in]0, \delta[$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x + h_\delta) - f(x)|}{h_\delta} \leq \varepsilon$$

Posto $\varepsilon = 1/n$, $\delta_n = 1/n$ e $h_n = h_{\delta_n}$ si ha quanto richiesto.
Si ha allora per ogni $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \cdot \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n}\, dx\right| &\leq \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) \cdot \left(\int_0^x \frac{|f(t + h_n) - f(t)|}{h_n}\, dt\right) dx\right| \\ &\leq \|\varphi'\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t + h_n) - f(t)|}{h_n}\, dt \to 0.\end{aligned}$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \cdot \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n}\, dx &= \frac{1}{h_n}\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(y - h_n) f(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) f(y)\, dy\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y - h_n) - \varphi(y)}{h_n} f(y)\, dy \to -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(y) f(y)\, dy.\end{aligned}$$

Per l'unicità del limite si ha:

$$-\int_{\mathbb{R}} \varphi'(y) f(y)\, dy = 0,$$

quindi la derivata debole di f è nulla. Ma allora $f(x) = c$ q.o.

Esercizio 48. Sia $N \geq 2$, $f \in C^1([0, +\infty[)$ e poniamo $u(x) = f(|x|)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

(1) Si trovino condizioni necessarie e sufficienti per f affinchè $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.
(2) Sia $a > 0$. Si provi che per $r > 0$ si ha:

$$(r^{2a} f^2(r))' \leq [(r^a f(r))']^2 + (r^a f(r))^2 = r^{2a}[(f'(r))^2 + f^2(r)] + a(r^{2a-1} f^2(r))' - a(a - 1) r^{2a-2} f^2(r),$$

(3) Si provi che per ogni $N \geq 3$, $N \in \mathbb{N}$ e per ogni $r > N - 1$ si ha

$$r^{N-1} f^2(r) \leq 2 \int_0^r t^{N-1}[(f'(t))^2 + f^2(t)]\, dt,$$

(4) Si provi che per ogni $r > 1$,

$$r f^2(r) \leq 2 \int_r^{+\infty} t[(f'(t))^2 + f^2(t)]\, dt,$$

(5) Si provi che se $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 2$ allora
$$|u(x)| \leq \frac{C(N)}{|x|^{(N-1)/2}} \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^N)}$$
per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ con $|x| > N-1$.

Svolgimento.

(1) Per $x \neq 0$, derivando si ottiene $u'(x) = f'(|x|) \cdot x/|x|$, e quindi $|u'(x)| = |f'(|x|)|$ q.o. Si ricava allora:
$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(|x|)|^p \, dx = \omega_N \int_0^{+\infty} |f(r)|^p r^{N-1} \, dr,$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} |u'(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f'(|x|)|^p \, dx = \omega_N \int_0^{+\infty} |f'(r)|^p r^{N-1} \, dr,$$
dove ω_n è la misura $N-1$-dimensionale della superficie di $\mathbb{S}^{N-1}$, quindi una costante che dipende solo da N.

(2) Si ha:
$$\begin{aligned}(r^{2a} f^2(r))' &= \frac{d}{dr}[(r^a f(r))^2] = 2(r^a f(r)) \cdot (r^a f(r))' \leq (r^a f(r))^2 + \left(\frac{d}{dr}(r^a f(r))\right)^2 \\ &= r^{2a} f^2(r) + (r^a f'(r) + a r^{a-1} f(r))^2 = r^{2a} f^2(r) + r^{2a}[f'(r)]^2 + a^2 r^{2a-2} f^2(r) + 2a r^{2a-1} f'(r) f(r) \\ &= r^{2a}[f^2(r) + (f'(r))^2] + a(a r^{2a-2} f^2(r) + r^{2a-1}(f^2(r))') \\ &= r^{2a}[f^2(r) + (f'(r))^2] + a\frac{d}{dr}(r^{2a-1} f^2(r)) - a(a-1) r^{2a-2} f^2(r).\end{aligned}$$

(3) poniamo $2a = N-1$, $N \geq 3$. Si ha:
$$\begin{aligned}r^{N-1} f^2(r) &= \int_0^r \frac{d}{dt}(t^{N-1} f^2(t)) \, dt \\ &\leq \int_0^r \left(t^{N-1}[f^2(t) + (f'(t))^2] + \frac{N-1}{2} \frac{d}{dt}(t^{N-2} f^2(t)) - \frac{N-1}{2} \frac{N-3}{2} t^{N-3} f^2(t)\right) dt \\ &= \int_0^r t^{N-1}[f^2(t) + (f'(t))^2] \, dt + \int_0^r \frac{N-1}{2} \left(\frac{d}{dt}(t^{N-2} f^2(t)) - \frac{N-3}{2} t^{N-3} f^2(t)\right) dt\end{aligned}$$

Consideriamo il secondo addendo:
$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{N-1}{2} \left(\frac{d}{dt}(t^{N-2} f^2(t)) - \frac{N-3}{2} t^{N-3} f^2(t)\right) dt &= \frac{N-1}{2} r^{N-2} f^2(r) - \frac{(N-1)(N-3)}{4} \int_0^r t^{N-3} f^2(t) \, dt \\ &\leq \frac{N-1}{2} r^{N-2} f^2(r) \leq \frac{1}{2} r^{N-1} f^2(r),\end{aligned}$$
perché $N-1 < r$. Si ha perciò
$$r^{N-1} f^2(r) \leq \int_0^r t^{N-1}[f^2(t) + (f'(t))^2] \, dt + \frac{1}{2} r^{N-1} f^2(r),$$
da cui la tesi.

(4) Se $\liminf_{t \to +\infty} t f^2(t) \neq 0$ allora la disuguaglianza è vera. Supponiamo quindi $\liminf_{t \to +\infty} t f^2(t) = 0$. Poniamo $2a = 1$ e osserviamo che per $r > 1$:
$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}(r f^2(r)) &\leq r[f^2(r) + (f'(r))^2] + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} f^2(r) + \frac{1}{4r} f^2(r) \\ &\leq r[f^2(r) + (f'(r))^2] + \frac{3}{2} r \frac{d}{dr} f^2(r) + \frac{3}{2} f^2(r) \\ &= r[f^2(r) + (f'(r))^2] + \frac{3}{2} \frac{d}{dr}(r f^2(r)).\end{aligned}$$

Quindi:

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dr}(rf^2(r)) \leq r[f^2(r) + (f'(r))^2].$$

Integrando tra r e $M > r$ si ha:

$$rf^2(r) - Mf^2(M) \leq 2\int_r^M t[f^2(t) + (f'(t))^2]\, dt$$

da cui la tesi passando al $\liminf$ per $M \to +\infty$.

(5) Si osservi che:

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \omega_N \int_0^{+\infty} t^{N-1}[f^2(t) + (f'(t))^2]\, dt.$$

Se $N \geq 3$ dal punto (3) si ha la stima

$$r^{N-1}f^2(r) \leq 2\int_0^{+\infty} t^{N-1}[(f'(t))^2 + f^2(t)]\, dt = \frac{2}{\omega_N}\|u\|^2_{W^{1,2}}$$

che permette di concludere osservando che $r = |x|$ e che $f^2(r) = |u(x)|^2$.
Se invece $N = 2$ dal punto (4) si ottiene

$$rf^2(r) \leq 2\int_0^{+\infty} t[(f'(t))^2 + f^2(t)]\, dt,$$

che permette di concludere esattamente in modo analogo al caso precedente.

12. Esercitazione del 22 gennaio 2010 (2 ore): Cenni sulle distribuzioni.

Definizione 16. Ricordiamo che $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ se e solo se per ogni K compatto di $\mathbb{R}$ si ha $f\chi_K \in L^1(\mathbb{R})$. In questa sezione porremo $H(x) = \chi_{]0,+\infty[}(x)$ se $x \neq 0$, $H(0) = 1/2$ (*funzione a scalino di Heavyside*). Si ha $H \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. La distribuzione $\delta := H'$, derivata prima nel senso delle distribuzioni di H, è la *delta di Dirac con massa in* 0. Si ha

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0),$$

per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ (si ricordi che φ è nulla fuori da un compatto).
Se $a \in \mathbb{R}$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ poniamo $\tau_a f(x) = f(x-a)$ (traslazione di f). Questo permette di definire la traslazione di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ ponendo $\langle \tau_a T, f\rangle = \langle T, \tau_{-a} f\rangle$. Per abuso di notazione, scriveremo spesso $T(t-a)$ invece di $\tau_a T$ anche se $T \in \mathcal{D}' \setminus J(L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$ (si veda esercizio seguente). Scriveremo talvolta anche $\delta_{(a)}$ per indicare $\delta(t-a)$.

Definizione 17 (supporto)**.** Sia $T \in \mathcal{D}'$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un aperto. Diremo che $T = 0$ in Ω se $\langle T, \varphi\rangle = 0$ per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(x) = 0$ se $x \notin \Omega$. Se $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è collezione di aperti tale che $T = 0$ in Ω_λ per ogni $\lambda \in \Lambda$, si prova che $T = 0$ su $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda$. Pertanto, posto

$$\tilde{\Omega} = \bigcup\{\Omega \subseteq \mathbb{R} : \Omega \text{ aperto e } T = 0 \text{ in } \Omega\},$$

si ha che $\tilde{\Omega}$ è il più grande aperto dove T è nulla. Per definizione il supporto di T è $\text{supp}(T) = \mathbb{R}\setminus\Omega$.

Esercizio 49. Si provi che:

(1) se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ allora la posizione $\langle T_f, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx$ per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ definisce una distribuzione $T_f \in \mathcal{D}'$, il che permette di identificare $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ad un sottospazio di $\mathcal{D}'$ mediante la mappa $J : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'$ data da $J(f) = T_f$;
(2) $\delta \in \mathcal{D}' \setminus J(L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$;
(3) $T \in \mathcal{D}'$ è tale per cui $tT = 0$ se e solo se $T = c\delta$, $c \in \mathbb{R}$.

Svolgimento.

(1) Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. L'applicazione $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ è certamente lineare. Proviamo che è una distribuzione: sia K compatto di $\mathbb{R}$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ una successione di funzioni nulle al di fuori di K e che tendano a 0 uniformemente in K assieme a tutte le loro derivate. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_K f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_K f(x)\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\,dx = 0,$$

dove si è potuto applicare il Teorema della convergenza Dominata in quanto per n sufficientemente grande si ha $\|\varphi_n\|_\infty < 1$ e quindi l'integranda in modulo è maggiorata dalla funzione $\chi_K|f| \in L^1(\mathbb{R})$.

(2) Supponiamo per assurdo che esista $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ tale che $T_f = \delta$. Si ha che H è derivabile nell'intorno di quasi ogni punto con derivata classica 0, quindi $f = 0$ in L^1, ma in generale $\langle \delta, \varphi\rangle \neq 0$ non appena $\varphi(0) \neq 0$.

(3) Il fatto che $t(c\delta) = 0$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ è ovvio: $\langle tc\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, tc\varphi\rangle = 0 \cdot c\varphi(0) = 0$ per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Proviamo il viceversa. Supponiamo che $tT = 0$. Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Si ha:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) + t\int_0^t \varphi'(x)\,\frac{dx}{t} = \varphi(0) + t\int_0^1 \varphi'(st)\,ds$$

Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\phi(x) = 1$ in un intorno di $\mathrm{supp}(\varphi) \cup \{0\}$, si ottiene $\varphi = \phi\varphi$, quindi:

$$\langle T, \varphi\rangle = \varphi(0)\langle T, \phi\rangle + \langle T, t\phi\int_0^1 \varphi'(st)\,ds\rangle.$$

L'ultimo addendo è nullo, perché esso è $\langle tT, w\rangle$ con $w = \phi\int_0^1 \varphi'(st)\,ds \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e per ipotesi $tT = 0$. Rimane da provare che se ϕ_1 e ϕ_2 sono due funzioni tali che $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ in un intorno di $\mathrm{supp}(\varphi) \cup \{0\}$ allora $\langle T, \phi_1\rangle = \langle T, \phi_2\rangle =: c$, con $c \in \mathbb{R}$ che dipende solo da T. Per linearità, si deve avere $\langle T, \phi_1 - \phi_2\rangle = 0$. Per concludere è sufficiente provare che se Φ è nulla in un intorno di 0, allora $\langle T, \Phi\rangle = 0$. Definiamo la seguente funzione $v(t) = \Phi(t)/t$ se $t \in \mathrm{supp}(\Phi)$, $v(t) = 0$ se $t \notin \mathrm{supp}(\Phi)$. Tale funzione è $C_c^\infty(\mathbb{R})$ e si ha $tv = \Phi$, da cui $\langle T, \Phi\rangle = \langle T, tv\rangle = \langle tT, v\rangle = 0$ come voluto.

Osservazione 4. Se $T = T_f$ con $f \in C^0$ allora $\mathrm{supp}(T_f) = \mathrm{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$.

Esercizio 50. Sia T la distribuzione associata alla funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ definita da $f(x) = \log|x|$. Si provi che:

(1) vale la seguente rappresentazione: $\langle T', \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$.

(2) sia $S \in \mathcal{D}'$. Allora $tS = 1$ se e solo se $S = c\delta + T'$, $c \in \mathbb{R}$.

La distribuzione T' prende il nome di *valor principale di* $1/x$ e si indica con v.p.$(1/x)$.

Svolgimento. (1) Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Si ha ovviamente che $x \mapsto \varphi\log|x|$ appartiene ad L^1, quindi:

$$\begin{aligned}
\langle T', \varphi\rangle &= -\langle T, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \log|x|\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \log|x|\varphi'(x)\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\chi_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]}(x)\right)dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \log|x|\varphi'(x)\chi_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]}(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon} \log|x|\varphi'(x)\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-[\log|x|\varphi(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx - [\log|x|\varphi(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\log(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.
\end{aligned}$$

e l'ultimo termine ammette limite finito se $\varepsilon \to 0^+$. Si è usato che:

$$|\log(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))| \leq 2L\varepsilon|\log\varepsilon| \to 0^+$$

in quanto φ è regolare, quindi Lipschitziana in $[-1,1]$.
Proviamo che $t\text{v.p.}(1/t)=1$, si ha:

$$\langle t\text{v.p.}(1/t),\varphi\rangle = \langle v.p.(1/t), t\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} x\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx = \langle 1,\varphi\rangle.$$

Si ha quindi $tS = 1 = t\text{v.p.}(1/t)$, quindi $t(S-\text{v.p.}(1/t))=0$. Ciò è vero se e solo se $S-\text{v.p.}(1/t)=c\delta$ da cui la tesi.

Esercizio 51. Sia $\tau > 0$ e poniamo $\omega = 2\pi/\tau$. Il *nucleo di Dirichlet di ordine m e periodo τ* è definito da: $D_m(\omega t) = \displaystyle\sum_{k=-m}^{m} e^{ik\omega t}$. Si provi che nel senso delle distribuzioni $D_m \to \tau Ш_\tau$ dove $Ш_\tau = \displaystyle\lim_{m\to\infty}\sum_{k=-m}^{m}\delta_{(k\tau)}$ è la distribuzione nota come *pettine di Dirac di passo τ*. Il risultato si esprime nella *formula sommatoria di Poisson*:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\omega t} = \tau\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta_{(k\tau)}$$

Svolgimento. Sia $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ e supponiamo che $N>0$ sia tale per cui $\varphi(x)=0$ se $|x|\geq N\tau+\tau/2$.

$$\int_{\mathbb{R}} D_m(\omega t)\varphi(t)\,dt = \int_{-(N\tau+\tau/2)}^{N\tau+\tau/2} D_m(\omega t)\varphi(t)\,dt = \sum_{k=-N}^{N}\int_{k\tau-\tau/2}^{k\tau+\tau/2} D_m(\omega t)\varphi(t)\,dt.$$

Proviamo che per ogni $-N\leq k\leq N$ vale:

$$\lim_{m\to\infty}\int_{k\tau-\tau/2}^{k\tau+\tau/2} D(\omega t)\varphi(t)\,dt = \tau\varphi(k\tau).$$

Poniamo $\psi(t)=\varphi(t+k\tau)$ e ricordiamo che $D_m(\omega(x+k\tau)) = D_m(\omega x)$ per la periodicità di D_m:

$$\int_{k\tau-\tau/2}^{k\tau+\tau/2} D_m(\omega t)\varphi(t)\,dt = \int_{k\tau-\tau/2}^{k\tau+\tau/2} D_m(\omega t)\psi(t-k\tau)\,dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} D_m(\omega x)\psi(x)\,dx = \sum_{k=-m}^{m}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\psi(x)e^{ik\omega x}\,dx$$

$$= \tau\sum_{k=-m}^{m}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\psi(x)e^{-ik\omega x}\,\frac{dx}{\tau} = \tau\sum_{k=-m}^{m} c_k(\tilde{\psi}),$$

dove $\tilde{\psi}$ è la funzione ottenuta troncando ψ tra $]-\tau/2,\tau/2[$ e prolungando per τ-periodicità il troncato a tutto $\mathbb{R}$, e c_k sono i coefficienti di Fourier di $\tilde{\psi}$. La funzione $\tilde{\psi}$ è C^1 a tratti e continua in 0 (perché ψ era continua in 0), pertanto la serie converge a $\psi(0)=\varphi(k\tau)$.
Questo conclude la dimostrazione, infatti si ottiene

$$\lim_{m\to\infty}\langle D_m,\varphi\rangle = \sum_{k=-N}^{N}\tau\varphi(k\tau) = \tau\langle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta_{(k\tau)},\varphi\rangle = \tau\langle Ш_\tau,\varphi\rangle,$$

ricordando che per $|k|>N$ si ha $\varphi(k\tau)=0$.

Esercizio 52. Si calcolino le seguenti distribuzioni:

a.) $\dfrac{d}{dx}f_{a,b}$, con $f_{a,b}(x) = H(x)\log|ax| + H(-x)\log|bx|$, $a>0$, $b>0$;

b.) $e^t\delta''$;

c.) $\dfrac{d^2}{dt^2}[(H(t)-H(t-2))(t^2-t-2)]$;

d.) $\displaystyle\frac{1-\cos(2\pi t)}{t}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta'(t-k).$

Svolgimento.

a.) Poiché $a,b>0$, si ha:

$$f_{a,b}(x) = H(x)\log(ax) + H(-x)\log(-bx) = H(x)\log x + H(x)\log a + H(-x)\log(-x) + H(-x)\log b.$$

Derivando, si ottiene per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\langle f'_{a,b}, \varphi\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} f_{a,b}(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_0^{+\infty} \log x\varphi'(x)\,dx - \log a\int_0^{+\infty}\varphi'(x)\,dx - \int_{-\infty}^0 \log(-x)\varphi'(x) - \log b\int_{-\infty}^0 \varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_0^{+\infty}\log x\varphi'(x)\,dx + \log a\varphi(0) - \int_{-\infty}^0 \log(-x)\varphi'(x) - \log b\varphi(0) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \log|x|\varphi'(x)\,dx + \log(a/b)\varphi(0)
\end{aligned}$$

Pertanto si ha $f'_{a,b} = \text{v.p.}(1/x) + \log(a/b)\delta$.

b.) Data una $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, si ha:

$$\begin{aligned}
\langle e^t\delta'', \varphi\rangle &= \langle \delta'', e^t\varphi\rangle = \langle\delta, \frac{d^2}{dt^2}(e^t\varphi)\rangle = \langle\delta, \frac{d}{dt}(e^t\varphi + e^t\varphi')\rangle = \langle\delta, e^t\varphi + e^t\varphi' + e^t\varphi' + e^t\varphi''\rangle \\
&= \langle\delta,\varphi\rangle + 2\langle\delta,\varphi'\rangle + \langle\delta,\varphi''\rangle = \langle\delta - 2\delta' + \delta'', \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Quindi la distribuzione richiesta è $e^t\delta'' = \delta - 2\delta' + \delta''$.

c.) La funzione (t^2-t-2) è di classe C^∞, pertanto si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[(H(t)-H(t-2))(t^2-t-2)] &= (2t-1)(H(t)-H(t-2)) + (t^2-t-2)(\delta(t)-\delta(t-2)) \\
&= (2t-1)(H(t)-H(t-2)) - 2\delta(t). \\
\frac{d^2}{dt^2}[(H(t)-H(t-2))(t^2-t-2)] &= 2(H(t)-H(t-2)) + (2t-1)(\delta(t)-\delta(t-2)) - 2\delta'(t) \\
&= 2(H(t)-H(t-2)-\delta'(t)) - \delta(t) - 3\delta(t-2).
\end{aligned}$$

d.) La funzione $\frac{1-\cos(2\pi t)}{t}$ è di classe C^∞ se prolungata per continuità al valore 0 per $t=0$ (si calcoli lo sviluppo in serie di Taylor del coseno e lo si divida per t). Per ogni $k\in\mathbb{Z}$, $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, si ha:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1-\cos(2\pi t)}{t}\delta'(t-k), \varphi\right\rangle &= \left\langle \delta'(t-k), \frac{1-\cos(2\pi t)}{t}\varphi\right\rangle - \left\langle \delta(t-k), \frac{d}{dt}\left(\frac{1-\cos(2\pi t)}{t}\varphi(t)\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \delta(t-k), \left(-\frac{1-\cos(2\pi t)}{t^2} + 2\pi\frac{\sin(2\pi t)}{t}\right)\varphi(t) + \left(\frac{1-\cos(2\pi t)}{t}\varphi'(t)\right)\right\rangle,
\end{aligned}$$

dove le funzioni $\frac{1-\cos(2\pi t)}{t^2}$ e $\frac{\sin(2\pi t)}{t}$ sono prolungate per continuità in $t=0$ con i valori $1/2$ e 2π rispettivamente (e tali prolungamenti sono C^∞). Quindi per quanto riguarda il primo addendo si ha:

$$\left\langle \delta(t-k), \left(-\frac{1-\cos(2\pi t)}{t^2} + 2\pi\frac{\sin(2\pi t)}{t}\right)\varphi\right\rangle = \left(-\frac{1-\cos(2\pi k)}{k^2} + 2\pi\frac{\sin(2\pi k)}{k}\right)\varphi(k),$$

e tale valore è nullo se $k\neq 0$, altrimenti per $k=0$ è pari a $2\pi^2\varphi(0)$. Per quanto riguarda il secondo, si ha invece:

$$\left\langle \delta(t-k), \frac{1-\cos(2\pi t)}{t}\varphi'(t)\right\rangle = \frac{1-\cos(2\pi k)}{k}\varphi'(k) = 0.$$

In definitiva:
$$\frac{1-\cos(2\pi t)}{t}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta'(t-k)=2\pi^2\delta(t).$$

Esercizio 53. Per $n\in\mathbb{N}$, sia $\mathcal{I}_n(t):=\chi_{]2n\pi,2(n+1)\pi[}$ e sia $f_n=\mathcal{I}_n(t)\sin t$ ovvero
$$f_n(t):=\begin{cases}\sin t & \text{se } t\in]2n\pi,2(n+1)\pi[\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$
Si calcoli $g_n:=f_n''+f_n$.

Svolgimento. Poiché la distribuzione f_n è prodotto di una funzione C^∞ e di una distribuzione $\mathcal{I}_n(t)\in L^1\subset\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, è possibile applicare la formula di Leibnitz:
$$f_n'=\cos t\mathcal{I}_n(t)+\sin t(\delta(x-2n\pi)-\delta(x-2(n+1)\pi)=\cos t\mathcal{I}_n(t),$$
giacché $\sin(2n\pi)=\sin(2(n+1)\pi)=0$. Analogamente, si ha:
$$f_n''=-\sin t\mathcal{I}_n(t)+\cos t(\delta(2n\pi)-\delta(2(n+1)\pi)=-f_n+\delta(2n\pi)-\delta(2(n+1)\pi),$$
da cui $g_n=\delta(2n\pi)-\delta(2(n+1)\pi)$.

Esercizio 54. Studiare la convergenza (puntuale, in $L^1(\mathbb{R})$, in $L^2(\mathbb{R})$,in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) della successione di funzioni definita da
$$u_n(t):=\begin{cases}n^2\sin(nt) & \text{se } t\in\left]-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right[,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Svolgimento. Si ha $u_n(0)=0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, pertanto $\lim_{n\to\infty}u_n(0)=0$. Sia $\bar t\neq 0$. Se $n>\pi/|\bar t|$ si ha che $|\bar t|>\pi/n$ e pertanto per $n>\pi/|\bar t|$ si ha $u_n(\bar t)=0$ Quindi $\lim_{n\to\infty}u_n(\bar t)=0$. Si conclude che u_n converge puntualmente a 0.
Se la successione convergesse in $L^1(\mathbb{R})$ ad un limite f, dovrebbe ammettere una sottosuccessione convergente puntualmente quasi ovunque a f. Tutte le sottosuccessioni convergono puntualmente alla funzione nulla, pertanto se la successione converge in L^1 essa converge alla funzione nulla. Tuttavia si ha:
$$\int_{\mathbb{R}}|u_n(t)-0|\,dt=\int_{-\pi/n}^{\pi/n}n^2|\sin(nt)|\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}n|\sin s|\,ds=2n\int_0^\pi\sin s\,ds=4n,$$
che tende a $+\infty$ se $n\to+\infty$, quindi non si ha convergenza in L^1.
Analogamente, se la successione convergesse in L^2 dovrebbe convergere alla funzione nulla, tuttavia:
$$\int_{\mathbb{R}}|u_n(t)-0|^2\,dt=\int_{-\pi/n}^{\pi/n}n^4|\sin(nt)|^2\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}n^3\sin^2 s\,ds=\pi n^3,$$
che tende a $+\infty$ se $n\to+\infty$, quindi non si ha convergenza in L^2.
Per verificare se vi sia convergenza in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, sia $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e calcoliamo:
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}u_n(t)\varphi(t)\,dt&=\int_{-\pi/n}^{\pi/n}n^2\sin(nt)\,\varphi(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}n\sin s\,\varphi(s/n)\,ds=\int_{-\pi}^{\pi}s\sin s\,\frac{\varphi(s/n)}{s/n}\,ds,\\&=\int_{-\pi}^{\pi}s\sin s\,\frac{\varphi(s/n)-\varphi(0)}{s/n}\,ds+\int_{-\pi}^{\pi}s\sin s\frac{\varphi(0)}{s/n}\,ds\\&=\int_{-\pi}^{\pi}s\sin s\,\frac{\varphi(s/n)-\varphi(0)}{s/n}\,ds+n\varphi(0)\int_{-\pi}^{\pi}\sin s\,ds=\int_{-\pi}^{\pi}s\sin s\,\frac{\varphi(s/n)-\varphi(0)}{s/n}\,ds\end{aligned}$$
Passando al limite e utilizzando il Teorema della Convergenza Dominata, si ottiene:
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}u_n(t)\varphi(t)\,dt&=\varphi'(0)\int_{-\pi}^{\pi}s\sin s\,ds=2\varphi'(0)\int_0^\pi s\sin s\,ds=2\varphi'(0)\left([-s\cos s]_0^\pi+\int_0^\pi\cos s\,ds\right)\\&=2\pi\varphi'(0)=\langle\delta,2\pi\varphi'\rangle=\langle-2\pi\delta',\varphi\rangle,\end{aligned}$$
Quindi in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si ottiene $u_n\to-2\pi\delta'$.

Esercizio 55. Calcolare i limiti nel senso delle distribuzioni:

(1) $\lim_{n\to+\infty} u_n$ con $u_n := n(\delta(t-1/n)-\delta(t+5/n))$;

(2) $\lim_{n\to+\infty} u_n$ con $u_n := n\cos^2(nt)$;

(3) $\lim_{n\to+\infty} u_n$ con $u_n := n^2 t\delta(2nt-1)$ (Si presti attenzione al cambiamento di variabile nella δ);

(4) $\lim_{n\to+\infty} u_n$ con $u_n := \dfrac{n}{nt+i}$;

(5) $\lim_{n\to+\infty} v_n$ con $v_n := n^{-1}\left|\dfrac{n}{nt+i}\right|^2$;

(6) $\lim_{n\to+\infty} w_n$ con $w_n := n(\log(|t+1/n|)-\log|t|)$.

Svolgimento.

(1) Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Si ha:
$$\langle u_n, \varphi\rangle = \frac{\varphi(1/n)-\varphi(-5/n)}{1/n} = \frac{\varphi(1/n)-\varphi(0)}{1/n} + 5\frac{\varphi(-5/n)-\varphi(0)}{-5/n} \to 6\varphi'(0),$$
e pertanto il limite è $-6\delta'(t)$.

(2) Il limite non esiste. Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$, φ non identicamente nulla e poniamo
$$I_n := \int_{\mathbb{R}} n\cos^2(nt)\varphi(t)\,dt.$$
Si ha che per il Lemma di Riemann-Lebesgue:
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\cos^2(nt)\varphi(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos(2nt)+1}{2}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\cos(2nt)\varphi(t)\,dt + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,dt\end{aligned}$$
e quindi per n sufficientemente grande si ottiene $I_n \geq \dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,dt \to +\infty$.

(3) Data $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ponendo $s = 2nt-1$ e $t = (s+1)/2n$ si ha:
$$\begin{aligned}\langle n^2 t\delta(2nt-1), \varphi\rangle &= \langle \delta(2nt-1), n^2 t\varphi(t)\rangle = \langle \delta(s), n^2\frac{s+1}{2n}\varphi\left(\frac{s+1}{2n}\right)\frac{1}{2n}\rangle\\ &= \frac{1}{4}\langle \delta, (s+1)\varphi\left(\frac{s+1}{2n}\right)\rangle = \frac{1}{4}\varphi\left(\frac{1}{2n}\right) \to \frac{1}{4}\varphi(0).\end{aligned}$$
Pertanto il limite richiesto è $\delta/4$.

(4) Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(t) = 0$ se $|t| > R$ Poniamo $\varepsilon = 1/n$ e osserviamo che
$$\langle tu_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\frac{t}{t+i\varepsilon}\varphi(t)\,dt.$$
Si ha che
$$\left|\frac{t}{t+i\varepsilon}\varphi(t)\right| \leq |\varphi(t)| \in L^1(\mathbb{R})$$
in quanto $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Ne segue che è possibile applicare il teorema della Convergenza Dominata e quindi passare al limite sotto al segno di integrale:
$$\langle tu_n, \varphi\rangle \to \int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,dt = \langle 1, \varphi\rangle.$$
Quindi, detto u_∞ il limite delle u_n, si ha $tu_\infty = 1$. Ma allora otteniamo che $u_\infty = \text{v.p.}\dfrac{1}{x} + c\delta$ per qualche $c \in \mathbb{C}$ (le distribuzioni in questione sono definite su $\mathbb{R}$, ma a valori in $\mathbb{C}$).

Per determinare il valore di c, calcoliamo il valore di u_∞ su una particolare distribuzione. Fissato $R>0$, sia φ una funzione di $C_c^\infty(\mathbb{R})$ che valga 1 su $[-R,R]$. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u_n(t)\varphi(t)\,dt &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t+i\varepsilon}\varphi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{t-i\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{2t}{t^2+\varepsilon^2}\varphi(t)\,dt - i\varepsilon\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(t)\,dt}{t^2+\varepsilon^2}\\ &= \frac{1}{2}[\log(t^2+\varepsilon^2)\varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\log(t^2+\varepsilon^2)\varphi'(t)\,dt - i\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(\varepsilon s)\,ds}{s^2+1}\\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\log(t^2+\varepsilon^2)\varphi'(t)\,dt - i\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(\varepsilon s)\,ds}{s^2+1}.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il primo addendo si ha (ponendo $y=\sqrt{t^2+\varepsilon^2}$, $x=-\sqrt{t^2+\varepsilon^2}$)

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\log(t^2+\varepsilon^2)\varphi'(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{0}\log(t^2+\varepsilon^2)\varphi'(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty}\log(t^2+\varepsilon^2)\varphi'(t)\,dt\\ &= -\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\log(y^2)\varphi'(\sqrt{y^2-\varepsilon^2})\,\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-\varepsilon^2}} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\varepsilon}\log(x^2)\varphi'(-\sqrt{x^2-\varepsilon^2})\,\frac{x\,dx}{-\sqrt{x^2-\varepsilon^2}}\\ &= -\int_{\mathbb{R}}\left(\chi_{[\varepsilon,+\infty[}(y)\varphi'(\sqrt{y^2-t^2})+\chi_{]-\infty,-\varepsilon[}(y)\varphi'(-\sqrt{y^2-t^2})\right)\,\frac{|y|\log|y|\,dy}{\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}\end{aligned}$$

La funzione integrande sono in $L^1(\mathbb{R})$ infatti $\log|y|$ è in L^1_{loc}, φ è a supporto compatto ed è C_c^∞, e $\dfrac{y}{\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}$ è limitata in modulo. Pertanto è possibile applicare il Teorema della Convergenza Dominata ed è possibile passare al limite sotto il segno di integrale ottenendo:

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\log(t^2+\varepsilon^2)\varphi'(t)\,dt = -\int_{\mathbb{R}}\log|t|\varphi'(t)\,dt = \left\langle\frac{d}{dt}\log|t|,\varphi\right\rangle = \left\langle \text{v.p.}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle.$$

Nel secondo addendo, il passaggio al limite sotto il segno di integrale è giustificato perché la funzione integranda è limitata dalla funzione integrabile $\|\varphi\|_\infty/(1+s^2)$, si ottiene pertanto

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} i\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(\varepsilon s)\,ds}{s^2+1} = i\pi\varphi(0) = \langle i\pi\delta,\varphi\rangle.$$

Dai due risultati si ottiene $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = \text{v.p.}\dfrac{1}{x}+i\pi\delta$.

(5) Si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} v_n(t)\varphi(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{n}{|nt+i|^2}\varphi(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{n}{n^2t^2+1}\varphi(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+s^2}\varphi(s/n)\,ds\\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+s^2}\lim_{n\to\infty}\varphi(s/n)\,ds = \varphi(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{1+s^2} = \pi\varphi(0).\end{aligned}$$

Il passaggio del limite sotto al segno di integrale è giustificato dal fatto che l'integranda è limitata dalla funzione integrabile $\max\{|\varphi(x)|:\,x\in\mathbb{R}\}(1+s^2)^{-1}$. Quindi $\lim v_n=\pi\delta$.

(6) Sia $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp}(\varphi)\subset[-R,R]$. Posto $\varepsilon=1/n$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} w_n(t)\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}}\frac{\log|t+\varepsilon|-\log|t|}{\varepsilon}\,\varphi(t)\,dt.$$

Calcoliamo ora per $\delta>\varepsilon$:

$$\int_{\mathbb{R}}\log|t+\varepsilon|\,\varphi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}}\log|t|\,\varphi(t-\varepsilon)\,dt$$

Quindi:

$$\int_{\mathbb{R}} w_n(t)\varphi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}}\frac{\log|t+\varepsilon|-\log|t|}{\varepsilon}\psi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\log|t|\frac{\varphi(t-\varepsilon)-\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}\,dt$$

Non ci sono problemi nel passare al limite per $\varepsilon\to0^+$ (perché $\log|t|$ è integrabile e il rapporto incrementale è maggiorato da $2\max\{|\varphi(t)|:\,t\in\mathbb{R}\}$) Si ottiene:

$$\int_{\mathbb{R}} w_n(t)\varphi(t)\,dt \to -\int_{\mathbb{R}}\log|t|\varphi'(t)\,dt = \langle\frac{d}{dt}\log|t|,\varphi\rangle = \langle\text{v.p.}1/x,\varphi\rangle.$$

e il limite richiesto è v.p.$1/x$.

Esercizio 56. Calcolare il limite nel senso delle distribuzioni delle successioni di funzioni:

$$u_n(t) := \begin{cases} 1/t & \text{se } |t| > 1/n \\ 0 & \text{se } |t| \le 1/n \end{cases} \qquad v_n := \frac{\chi_{[1/2n,1/n]}(t)}{t}.$$

al tendere di n a $+\infty$. Dedurne il limite della successione:

$$w_n(t) := \begin{cases} 1/t & \text{se } t < -1/n \text{ o } t > 1/2n \\ 0 & \text{se } -1/n \le t \le 1/n \end{cases}$$

Svolgimento. Data $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-R, R]$, si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u_n(t)\varphi(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{-1/n} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1/n} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt - \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi(0)}{t}\,dt + \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi(0)}{t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1/n} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt - \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi(0)}{t}\,dt - \int_{-\infty}^{-1/n} \frac{\varphi(0)}{s}\,ds \\ &= \int_{\mathbb{R}\setminus[-1/n,1/n]} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,dt\end{aligned}$$

Passando al limite, si ottiene $u_n \to$ v.p.$1/t$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Per quanto riguarda v_n si ha posto $t = s/n$, $dt = ds/n$:

$$\int_{\mathbb{R}} v_n(t)\varphi(t)\,dt = \int_{1/2n}^{1/n} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = \int_{1/2}^{1} \frac{\varphi(s/n)}{s/n}\frac{ds}{n} = \int_{1/2}^{1} \frac{\varphi(s/n)}{s}\,ds.$$

Il passaggio al limite sotto il segno di integrale è lecito perché l'integranda è limitata, si ottiene quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} v_n(t)\varphi(t)\,dt = \int_{1/2}^{1} \lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi(s/n)}{s}\,ds = \varphi(0)\int_{1/2}^{1} \frac{1}{s}\,ds = (\log 1 - \log(1/2))\varphi(0) = \log 2 \cdot \varphi(0).$$

Si ottiene perciò $v_n \to \log 2 \cdot \delta(t)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Osserviamo che $w_n = v_n + u_n$, il limite della somma è la somma dei limiti e quindi vale v.p.$1/t + \log 2 \cdot \delta(t)$.

Esercizio 57. Calcolare la distribuzione $T =: t\log(t^2) * \delta'''(t-1) * H(t+1)$.

Svolgimento. Si ha:

$$\begin{aligned}T = t\log(t^2) * \delta'''(t-1) * H(t+1) &= t\log(t^2) * \delta''(t-1) * \delta(t-1) = t\log(t^2) * \delta''(t-1) * \delta(t+1) \\ &= (2t\,\text{v.p.}\frac{1}{t} + 2\log|t|) * \delta'(t-2) = 2(1+\log|t|) * \delta'(t-1) * \delta(t+1) \\ &= 2\text{v.p.}\frac{1}{t} * \delta(t-1) * \delta(t+1) = \text{v.p.}\frac{1}{t} * \delta = \text{v.p.}\frac{1}{t}.\end{aligned}$$

13. Appendice: Richiami di topologia

Definizione 18. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definiamo i seguenti insiemi:

(1) l'*intervallo aperto* $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;
(2) l'*intervallo chiuso* $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$;
(3) l'*intervallo* $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$;
(4) l'*intervallo* $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$;
(5) l'*intervallo degenere chiuso* $[a, a] := \{a\}$;
(6) l'*intervallo degenere aperto* $]a, a[:= \emptyset$;
(7) la *semiretta aperta illimitata superiormente* $]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$;
(8) la *semiretta aperta illimitata inferiormente* $]-\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$;

(9) la *semiretta chiusa illimitata superiormente* $[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$;
(10) la *semiretta chiusa illimitata inferiormente* $]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$;
(11) la *retta* $]-\infty, +\infty[:= \mathbb{R}$;

Chiameremo *intervalli aperti*[2] di $\mathbb{R}$ gli insiemi del tipo $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ e i due insiemi $\emptyset$ e $\mathbb{R}$.

Definizione 19. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Diremo che tale sottoinsieme è *aperto* se si può scrivere come unione finita o infinita di intervalli aperti. Un sottoinsieme $B \subseteq \mathbb{R}$ si dice *chiuso* se il suo complementare $\mathbb{R} \setminus B$ è aperto. L'insieme

$$\tau := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ è aperto di } \mathbb{R}\}$$

prende il nome di *topologia usuale* di $\mathbb{R}$.

Esercizio 58. Si provino i seguenti asserti basandosi sulle definizioni date:
(1) A è aperto se e solo se A concide con l'unione degli intervalli aperti contenuti in A;
(2) A è aperto se e solo se il suo complementare è chiuso;
(3) ogni intervallo chiuso è un chiuso di $\mathbb{R}$;
(4) $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ sono sia chiusi che aperti;
(5) $\mathbb{Q}$ non è né chiuso né aperto in $\mathbb{R}$;
(6) $\mathbb{Z}$ è chiuso in $\mathbb{R}$.

Definizione 20. Sia $r \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ e definiamo i seguenti insiemi:
(1) la *palla aperta di raggio r centrata in a*:
$$B(a, r[:= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} =]a - r, a + r[;$$
(2) la *palla chiusa di raggio r centrata in a*:
$$B(a, r] := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r].$$

A volte la palla aperta è indicata con $B(a, r)$

Definizione 21. Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice *limitato* se esiste $R > 0$ tale che $E \subseteq B(0, R]$.

Teorema 2. *Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ è aperto se e solo se per ogni $a \in A$ esiste $\delta_a > 0$ tale che $B(a, \delta_a[\subseteq A$*

Dimostrazione. Esercizio facile. □

Diamo ora un quadro delle proprietà dei sottoinsiemi aperti:

Teorema 3. *Gli aperti di $\mathbb{R}$ soddisfano le seguenti proprietà:*
(1) *$\emptyset$ e $\mathbb{R}$ sono aperti;*
(2) *unioni arbitrarie di aperti sono aperte: se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia finita o infinita di aperti di $\mathbb{R}$, allora $A := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ è aperto di $\mathbb{R}$;*
(3) *intersezioni finite di aperti sono aperte: se $A_1, ..., A_m$ è una famiglia finita di aperti di $\mathbb{R}$, allora $A = A_1 \cap ... \cap A_m$ è aperto.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Passando ai complementari si ottengono le proprietà dei sottoinsiemi chiusi:

Teorema 4. *I chiusi di $\mathbb{R}$ soddisfano le seguenti proprietà:*
(1) *$\emptyset$ e $\mathbb{R}$ sono chiusi;*
(2) *intersezioni arbitrarie di chiusi sono chiuse: se $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia finita o infinita di chiusi di $\mathbb{R}$, allora $C := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ è chiuso di $\mathbb{R}$;*
(3) *unioni finite di chiusi sono chiuse: se $C_1, ..., C_m$ è una famiglia finita di chiusi di $\mathbb{R}$, allora $C = C_1 \cup ... \cup C_m$ è chiuso.*

[2]Si noti che talvolta gli intervalli aperti in letteratura vengono indicati con (a, b), oppure con $(a, +\infty)$. Il contesto è fondamentale per capire se con la scrittura (a, b) si intenda l'intervallo reale $]a, b[$ oppure il punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Dimostrazione. Esercizio. □

Esercizio 59. Si provino i seguenti asserti:

(1) ogni sottoinsieme finito è chiuso;
(2) in generale, intersezioni di una famiglia infinita di aperti non sono aperte (sugg. si consideri $\{A_n = B(0, 1/n[\}_{n\in\mathbb{N}})$;
(3) in generale, unioni di una famiglia infinita di chiusi non sono chiuse (sugg. si consideri $\{A_n = B(0, 1-1/n]\}_{n\in\mathbb{N}})$.

Definizione 22. Sia $x \in \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che V è *intorno* di x se esiste A aperto di $\mathbb{R}$ tale che $x \in A$ e $A \subseteq V$. Ricordando le proprietà degli aperti, si ha che ogni intorno di x contiene x, se V è intorno di x e $V \subseteq U$ allora U è intorno di x, ogni intersezione di una famiglia finita di intorni di x è intorno di x. A volte l'insieme di tutti gli intorni di x viene chiamato *filtro degli intorni* di x. La nozione di intorno formalizza la nozione di "vicinanza": diremo che una proprietà è vera abbastanza vicino ad x se è vera in un intorno di x.

Definizione 23. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Definiamo la *chiusura* di E come l'intersezione di tutti i chiusi di $\mathbb{R}$ contenenti E. Tale famiglia di chiusi non è vuota perché $\mathbb{R}$ è chiuso e contiene E. Essendo un'intersezione di chiusi, la chiusura di E è un chiuso ed è il più piccolo chiuso di $\mathbb{R}$ contenente E:

$$\bar{E} := \bigcap\{C \subseteq \mathbb{R} : C \supseteq E,\ C \text{ chiuso}\}.$$

Un'altra scrittura usata per $\bar{E}$ è $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(E)$.

Proposizione 13. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Si ha che $x \in \mathbb{R}$ appartiene a $\bar{E}$ se e solo se per ogni intorno U di x in $\mathbb{R}$ si ha $U \cap E \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Si provi che $x \notin \bar{E}$ se e solo se esiste un intorno di x in $\mathbb{R}$ disgiunto da E. □

Definizione 24. Siano F, G sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Diremo che F è *denso* in G se $\bar{F} \subseteq G$. In particolare se F è denso in G, ogni intorno di ogni punto di G contiene punti di F.

Definizione 25. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $p \in \mathbb{R}$ si dice *di accumulazione* per E in $\mathbb{R}$ se in ogni intorno di p in $\mathbb{R}$ cadono punti di E distinti da p. Se $q \in E$ non è di accumulazione per E si dice *punto isolato* di E. Un sottoinsieme i cui punti siano tutti isolati si dice *discreto*.

Esercizio 60. Si provino i seguenti asserti:

(1) La chiusura di un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ è formata dai punti di E e dai punti di accumulazione di E.
(2) Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.
(3) Un insieme privo di punti di accumulazione è chiuso.

Teorema 5. *Sia E sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti:*

(1) *c è di accumulazione per E;*
(2) *esiste una successione $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di punti di E diversi da c che converge a c;*
(3) *in ogni intorno di c cadono infiniti punti di E.*

Proposizione 14. *Sia $c \in R$, $E \subseteq \mathbb{R}$. Allora $c \in \bar{E}$ se e solo se esiste una successione $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di punti di E che converge a c. Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}$ è chiuso se e solo se per ogni successione $\{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a $c \in \mathbb{R}$ si ha $c \in E$.*

Definizione 26. Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}$ si dice *sequenzialmente compatto* o *compatto per successioni* se ogni successione $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in K possiede una sottosuccessione $\{x_{j_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente ad un elemento $x \in K$.

Teorema 6. *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è sequenzialmente compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Definizione 27. Sia E sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Definiamo l'*interno* di E nel modo seguente:

$$\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(E) := \{x \in \mathbb{R} : E \text{ è intorno di } x\}.$$

Esso è il più grande (nel senso dell'inclusione) aperto contenuto in E, ovvero l'unione di tutti gli aperti contenuti in E.

Definizione 28. Sia E sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Diremo che $p \in \mathbb{R}$ è *di frontiera* per E se p non è interno né ad E, né al suo complementare. Equivalentemente, ogni intorno di p contiene punti di E e di $\mathbb{R} \setminus E$, ovvero p appartiene alla chiusura di E e alla chiusura del complementare. L'insieme dei punti di frontiera di E viene indicato con $\mathrm{fr}_{\mathbb{R}}(E)$, ∂E o $\mathrm{bdry}(E)$.

Definizione 29. Sia D sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia $c \in D$. Diremo che f è continua in c se e solo se per ogni intorno V di $f(c)$ esiste un intorno U di c tale che $f(U \cap D) \subset V$.

Osservazione 5. Si noti come molte delle definizioni e delle proprietà date *non siano legate in modo particolare* a $\mathbb{R}$, quanto piuttosto alla possibilità di operare alcune operazioni insiemistiche nelle classi degli insiemi aperti e chiusi. A tal proposito, individuate le proprietà opportune, sarà possibile adattare le definizioni date di aperto, chiuso eccetera ai sottoinsiemi di un *qualunque* insieme, non necessariamente dei numeri reali.

Definizione 30. Siano X un insieme, τ una collezione di sottinsiemi di X. Diremo che τ è una *topologia* su X se:

(1) $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$;
(2) se $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è una famiglia finita o infinita di elementi di τ, allora $A := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \tau$;
(3) se $A_1, ..., A_m$ è una famiglia finita di elementi di τ, allora $A := A_1 \cap ... \cap A_m \in \tau$.

Chiameremo *aperti* gli elementi di τ, e la coppia (X, τ) sarà detta *spazio topologico*. Per esercizio, si adattino a questo contesto le definizioni già date di chiuso, chiusura, intorno, frontiera, ecc... Si tenga presente che altre nozioni, come quelle di palla aperta o chiusa, non sono disponibili perché in uno spazio topologico generale non si ha una nozione di *modulo* o di *distanza* tra punti. Similmente, non può essere data una nozione di insieme limitato in un contesto così generale.

Definizione 31. Siano (X, τ_1) e (X, τ_2) due spazi topologici sopra lo stesso insieme X. Diremo che τ_1 è *più fine* di τ_2 se $\tau_1 \supseteq \tau_2$, diremo che è *strettamente* più fine se tale inclusione è stretta. Le due topologie si dicono *equivalenti* se $\tau_1 = \tau_2$. Si osservi che un intersezione finita di topologie è una topologia.

Esempio 1. Sia X un insieme. Poniamo $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ *topologia banale* e $\tau_2 = \{A : A \subseteq X\}$ *topologia discreta*. Tali insiemi sono topologie su X e sono rispettivamente la meno fine e la più fine topologia che si possa mettere su X.

Osservazione 6. Una descrizione completa di tutti gli aperti di un generico spazio topologico è spesso impossibile. A tal proposito si individua una particolare classi di aperti in grado di *ricostruire* l'intera topologia. Nel caso di $\mathbb{R}$, questa classe era data dagli intervalli aperti, o dalle palle centrate nei punti.

Definizione 32. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Diremo che $\mathcal{B} \subseteq \tau$ è una *base* per la topologia τ se ogni aperto di τ può essere scritto come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Ci si può porre anche il problema inverso: data una collezione $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di X, quali proprietà deve avere affinché esista una topologia τ su X tale che $\mathcal{B}$ ne sia una base?

Proposizione 15. *Sia X insieme e sia data una collezione $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di X. Allora $\mathcal{B}$ è base per una topologia su X se e solo se dati $A, B \in B$ e $x \in A \cap B$ esiste $C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in C$ e $C \subseteq A \cap B$. Gli aperti di tale topologia sono X, $\emptyset$ e le unioni arbitrarie di elementi di $\mathcal{B}$.*

Definizione 33. Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$ è continua in $a \in X$ se e solo se per ogni intorno V di $f(a)$ si ha che la controimmagine $f^{-1}(V) := \{x \in X : f(x) \in V\}$ è intorno di a in X. Se f è continua in ogni punto, diremo che è continua in X. Si ha che f è continua in X se e solo se la controimmagine di ogni aperto è aperta, o equivalentemente se la controimmagine di ogni chiuso è chiusa.

Osservazione 7. Non è detto invece che se U è aperto e $f : X \to Y$ è continua si abbia $f(U)$ aperto!

Ci poniamo ora il problema di porre una topologia su $X = \mathbb{R}^n$ che in qualche modo abbia le proprietà della topologia usuale di $\mathbb{R}$ e possa essere descritta allo stesso modo. La costruzione che presenteremo è valida per spazi più generali di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 16. *Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$. La* distanza euclidea *di $x = (x_1, ..., x_n)$ da $y = (y_1, ..., y_n)$ è data da:*

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Si ha $d(x, y) = d(y, x)$, $d(x, y) \geq 0$ e se $d(x, y) = 0$ allora $x = y$, inoltre se $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ si ha $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Definiamo per ogni $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$:

(1) *la* palla aperta di raggio r centrata in a $B(a, r[:= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$*;*
(2) *la* palla chiusa di raggio r centrata in a $B(a, r] := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$.

Si prova che l'insieme delle palle aperte è base per una topologia su $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Siano $B(x_1, r_1)$ e $B(x_2, r_2)$ due palle aperte. Sia $x \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ e proviamo che esiste $\delta_x > 0$ tale che $B(x, \delta_x) \subseteq B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$. Dato $z \in B(x, \delta_x)$ si ha $d(z, x_1) \leq d(z, x) + d(x, x_1) = \delta_x + d(x, x_1)$ e $d(z, x_2) \leq d(z, x) + d(x, x_2) = \delta_x + d(x, x_2)$. Affinché si abbia $z \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ si deve avere $d(z, x_1) < r_1$ e $d(z, x_2) < r_2$, e quindi è sufficiente scegliere $\delta_x < \min\{r_1 - d(x, x_1), r_2 - d(x, x_2)\}$. Si noti che $r_1 > d(x, x_1)$ e $r_2 > d(x, x_2)$, quindi $\delta_x > 0$. $\square$

Definizione 34. Diremo che la successione $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di $\mathbb{R}^n$ *converge a $x \in \mathbb{R}^n$* se si ha

$$\lim_{k \to +\infty} \|x_k - x\| = 0.$$

Con queste nozioni di palle e convergenza di successioni si vede che gli asserti enunciati per $\mathbb{R}$ rimangono validi anche in $\mathbb{R}^n$, inoltre è possibile dire quando un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è sequenzialmente compatto:

Teorema 7 (Heine-Borel)**.** *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è sequenzialmente compatto se e solo se è chiuso e limitato (per la distanza euclidea).*

In $\mathbb{R}^n$ è possibile definire un'altra distanza:

Definizione 35. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$. La *distanza ℓ^∞* di $x = (x_1, ..., x_n)$ da $y = (y_1, ..., y_n)$ è data da:

$$d_{\ell^\infty}(x, y) := \|x - y\|_{\ell^\infty} = \max\{|x_i - y_i|\}.$$

Valgono ancora $d_{\ell^\infty}(x, y) = d_{\ell^\infty}(y, x)$, $d_{\ell^\infty}(x, y) \geq 0$ e se $d_{\ell^\infty}(x, y) = 0$ allora $x = y$, inoltre se $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ si ha $d_{\ell^\infty}(x, y) \leq d_{\ell^\infty}(x, z) + d_{\ell^\infty}(z, y)$. Definiamo per ogni $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$:

(1) la *palla ℓ^∞-aperta di raggio r centrata in a*:

$$B_{\ell^\infty}(a, r[:= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_{\ell^\infty} < r\} =]x_1 - r, x_1 + r[\times \cdots \times]x_n - r, x_n + r[;$$

(2) la *palla ℓ^∞-chiusa di raggio r centrata in a*:

$$B_{\ell^\infty}(a, r] := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_{\ell^\infty} \leq r\} = [x_1 - r, x_1 + r] \times \cdots \times [x_n - r, x_n + r].$$

Se disegnamo le palle di questa topologia, ci accorgiamo che hanno l'aspetto di *ipercubi* (quadrati se $n = 2$, cubi se $n = 3$) di spigolo $2r$ centrati in x. Esattamente come prima, si prova che l'insieme delle palle ℓ^∞-aperte è base per una topologia su $\mathbb{R}^n$.

Ci si può chiedere quale sia il legame tra la topologia indotta dalla distanza euclidea e quella indotta dalla distanza ℓ^∞:

Teorema 8. *La distanza euclidea e quella ℓ^∞ su $\mathbb{R}^n$ sono topogicamente equivalenti, ovvero inducono topologie equivalenti su $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Ciascuna palla aperta contiene un cubo aperto ed è contenuta in un altro cubo aperto. Pertanto dato un aperto euclideo A e un suo punto x, per definizione esiste una palla euclidea aperta centrata in x e contenuta in A, ma tale palla contiene un cubo aperto centrato in x che, pertanto, risulta essere contenuto in A. Pertanto dato un punto $x \in A$, esiste un cubo aperto centrato in x contenuto in A, quindi A è intorno nella topologia indotta da ℓ^∞. Il viceversa è analogo. In verità si può provare che gli elementi di un'ampia classe di distanze possibili su $\mathbb{R}^n$ inducono la stessa topologia (tutte le distanze provenienti da una *norma*). $\square$

Una conseguenza di tale fatto, in realtà equivalente ad esso, è la seguente:

Proposizione 17. *Siano* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *successione di* $\mathbb{R}^n$ *e* $x = (x^{(1)}, ..., x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$*. Allora si ha*

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k - x\|_{\ell^\infty} = 0 \text{ se e solo se } \lim_{k\to+\infty} \|x_k - x\| = 0$$

e ciò è equivalente a dire che per ogni $j = 1, ..., n$ *si ha* $\lim_{k\to+\infty} x_k^{(j)} = x^{(j)}$*. Pertanto una successione in* $\mathbb{R}^n$ *converge se e solo se ciascuna delle componenti degli elementi di essa converge come successione in* $\mathbb{R}$*.*

Definizione 36. Se (X, τ) è spazio topologico e $D \subseteq X$ è un sottinsieme di X, esso riceve una naturale struttura di spazio topologico nel modo seguente: posto $\tau_{|}D = \{A \cap D : A \in \tau\}$, la coppia $(D, \tau_{|D})$ è spazio topologico. Si dirà che $\tau_{|D}$ è la topologia *indotta* da X su D. Gli aperti di $\tau_{|D}$ sono intersezioni di aperti di X con D, e se $\mathcal{B}$ è base per la topologia di X, l'insieme $\mathcal{B}_{|D} = \{B \cap D : B \in \mathcal{B}\}$ è base per la topologia indotta.

Definizione 37. Lo spazio topologico (X, τ) è detto:
1. T_0 se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste un intorno di x non contenente y oppure un intorno di y non contenente x (la topologia distingue i punti);
2. T_1 se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esistono due aperti U e V tali che $x \in U$ e $y \notin U$ e $y \in V$ e $x \notin V$ (i punti sono chiusi);
3. T_2 o *di Hausdorff* o *separato* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esistono U e V aperti disgiunti con $x \in U$ e $y \in V$ (punti distinti possiedono intorni disgiunti).

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ con la topologia usuale è di Hausdorff.

Esempio 2. Si provi che $\mathbb{R}$ dotato della topologia per cui gli aperti sono $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e $\{x \in \mathbb{R} : x > d\}$ al variare di $d \in \mathbb{R}$ è uno spazio T_0 ma non T_1.
Si provi che $\mathbb{R}$ dotato della topologia per cui i chiusi sono $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e tutti i sottinsiemi finiti di $\mathbb{R}$ è uno spazio T_1 ma non T_2.

Definizione 38. Diremo che V è *intorno aperto di* ∞ in $\mathbb{R}^n$ se $\mathbb{R}^n \setminus V$ è compatto.

Dipartimento di Informatica, Università di Verona
Strada Le Grazie 15 - I-37134 Verona, Italy.
E-mail address: antonio.marigonda@univr.it