Università degli Studi di Verona

Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 23/1/2009

Tipologia A

1 Si dia l'enunciato del teorema di Lagrange.

2 Supponiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Allora possiamo affermare che

- ☐ per ogni $x \in \mathbf{R}$ vale $f(x) > 1000$;
- ☐ esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) = 1000$;
- ☐ esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) < 1000$;
- ☒ esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) > 1000$;

3 Se una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ soddisfa $|f(x)| \leq x^2$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, allora certamente

- ☐ f è ovunque continua e derivabile;
- ☐ f è continua ma non necessariamente derivabile in 0;
- ☒ f è sia continua che derivabile in 0;
- ☐ f è derivabile ma non necessariamente continua in 0;

4 Tra le seguenti affermazioni, qual è l'unica corretta?

- ☐ Una funzione con derivata positiva in un punto è crescente in un intorno di quel punto;
- ☐ Una funzione continua in un punto è anche derivabile in quel punto;
- ☐ Una funzione continua su $\mathbf{R}$ ammette massimo e minimo;
- ☒ Una funzione con derivata positiva in un intervallo è strettamente crescente in quell'intervallo;

5 Se sappiamo che $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$, allora certamente

- ☐ f è continua in 0;
- ☐ f è positiva in 0;
- ☐ f è positiva in un intorno di 0, ma non in 0;
- ☒ f è positiva in un intorno di 0, tranne eventualmente in 0;

6 Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \sin x \log x}{3x^2 + 2x + 5}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + 1 - x - \cos(\frac{1}{2}x)}{x^2}.$$

7 Si svolgano, nell'ordine, i seguenti esercizi:

1. Studiandone la derivata prima, si trovino l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f(x) = x \log x$ sul dominio naturale della stessa. Si precisi anche se si tratta di massimo e/o di minimo.

2. Usando eventualmente il risultato precedente, provare che la funzione $g(x) = x^2 \log x + 2x - 1$ è strettamente crescente sul suo dominio. In particolare, mostrare che essa si annulla esattamente una volta in un certo punto $x_0 \in (0, 1)$.

3. Si studi la funzione $h(x) = e^x \log x$ e se ne tracci il grafico. Si provi, in particolare, che h ha esattamente un punto di flesso. Anche in questo caso, possono essere utili i risultati dei due punti precedenti.

8 Le autorità decidono di immagazzinare le scorie radioattive della centrale nucleare dismessa di Buttapietra nel nuovo sito di stoccaggio di Ca' Vignal. Le scorie vengono trasportate nel sito poco alla volta a ritmo costante, per cui la loro massa cresce in funzione lineare del tempo fino al completo trasferimento del materiale.

Supponiamo che il trasferimento delle scorie duri 50 anni. Siccome i nuclei radioattivi decadono con legge esponenziale, la massa del materiale radioattivo contenuto nelle scorie di Ca' Vignal al tempo t (misurato in anni) sarà

$$f(t) = \begin{cases} Cte^{-\alpha t} & se \ t \leq 50 \\ 50Ce^{-\alpha t} & se \ t > 50 \end{cases}$$

dove C, α sono delle costanti (ed in particolare $\alpha > 0$ è la costante di decadimento).

Assumendo $\alpha = 0.069$, si determini il momento in cui vi sarà massima radioattività durante tutta la vita futura del sito di stoccaggio.

9(Esercizio facoltativo) Si consideri la seguente funzione $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \ -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{n^2} & se \ \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}, \ n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

1. Si discuta la continuità e la derivabilità di f in $x = 0$. Si mostri poi che f è crescente e che i suoi punti di discontinuità sono $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$;

2. Si mostri che l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione crescente è al più numerabile (ha al massimo la cardinalità di $\mathbf{N}$) *(Sugg: In ogni punto di discontinuità, il limite sinistro è minore del limite destro: tali limiti esistono grazie alla crescenza della funzione. Si scelga un numero razionale compreso tra il limite destro ed il limite sinistro...)*

   ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Tipologia B

6 Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \sin x \log x}{4x^2 + 6x + 5}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + 1 - x - \cos(x)}{x^2}.$$

7 Si svolgano, nell'ordine, i seguenti esercizi:

1. Studiandone la derivata prima, si trovino l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f(x) = x \log x$ sul dominio naturale della stessa. Si precisi anche se si tratta di massimo e/o di minimo.

2. Usando eventualmente il risultato precedente, provare che la funzione $g(x) = x^2 \log x + 2x - 1$ è strettamente crescente sul suo dominio. In particolare, mostrare che essa si annulla esattamente una volta in un certo punto $x_0 \in (0, 1)$.

3. Si studi la funzione $h(x) = -e^x \log x$ e se ne tracci il grafico. Si provi, in particolare, che h ha esattamente un punto di flesso. Anche in questo caso, possono essere utili i risultati dei due punti precedenti.

8 Le autorità decidono di immagazzinare le scorie radioattive della centrale nucleare dismessa di Buttapietra nel nuovo sito di stoccaggio di Ca' Vignal. Le scorie vengono trasportate nel sito poco alla volta a ritmo costante, per cui la loro massa cresce in funzione lineare del tempo fino al completo trasferimento del materiale.

Supponiamo che il trasferimento delle scorie duri 50 anni. Siccome i nuclei radioattivi decadono con legge esponenziale, la massa del materiale radioattivo contenuto nelle scorie di Ca' Vignal al tempo t (misurato in anni) sarà

$$f(t) = \begin{cases} Cte^{-\alpha t} & se\ t \le 50 \\ 50Ce^{-\alpha t} & se\ t > 50 \end{cases}$$

dove C, α sono delle costanti (ed in particolare $\alpha > 0$ è la costante di decadimento).

Assumendo $\alpha = 0.023$, si determini il momento in cui vi sarà massima radioattività durante tutta la vita futura del sito di stoccaggio.

Tipologia C

6 Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \sin x \log x}{5x^2 + 12x + 5}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + 1 - x - \cos(2x)}{x^2}.$$

7 Si svolgano, nell'ordine, i seguenti esercizi:

1. Studiandone la derivata prima, si trovino l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f(x) = x \log x$ sul dominio naturale della stessa. Si precisi anche se si tratta di massimo e/o di minimo.

2. Usando eventualmente il risultato precedente, provare che la funzione $g(x) = x^2 \log x + 2x - 1$ è strettamente crescente sul suo dominio. In particolare, mostrare che essa si annulla esattamente una volta in un certo punto $x_0 \in (0, 1)$.

3. Si studi la funzione $h(x) = -2e^x \log x$ e se ne tracci il grafico. Si provi, in particolare, che h ha esattamente un punto di flesso. Anche in questo caso, possono essere utili i risultati dei due punti precedenti.

8 Le autorità decidono di immagazzinare le scorie radioattive della centrale nucleare dismessa di Buttapietra nel nuovo sito di stoccaggio di Ca' Vignal. Le scorie vengono trasportate nel sito poco alla volta a ritmo costante, per cui la loro massa cresce in funzione lineare del tempo fino al completo trasferimento del materiale.

Supponiamo che il trasferimento delle scorie duri 50 anni. Siccome i nuclei radioattivi decadono con legge esponenziale, la massa del materiale radioattivo contenuto nelle scorie di Ca' Vignal al tempo t (misurato in anni) sarà

$$f(t) = \begin{cases} Cte^{-\alpha t} & se\ t \leq 50 \\ 50Ce^{-\alpha t} & se\ t > 50 \end{cases}$$

dove C, α sono delle costanti (ed in particolare $\alpha > 0$ è la costante di decadimento).

Assumendo $\alpha = 0.014$, si determini il momento in cui vi sarà massima radioattività durante tutta la vita futura del sito di stoccaggio.

Tipologia D

6 Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \sin x \log x}{6x^2 + 20x + 5}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + 1 - x - \cos(\frac{3}{2}x)}{x^2}.$$

7 Si svolgano, nell'ordine, i seguenti esercizi:

1. Studiandone la derivata prima, si trovino l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f(x) = x \log x$ sul dominio naturale della stessa. Si precisi anche se si tratta di massimo e/o di minimo.

2. Usando eventualmente il risultato precedente, provare che la funzione $g(x) = x^2 \log x + 2x - 1$ è strettamente crescente sul suo dominio. In particolare, mostrare che essa si annulla esattamente una volta in un certo punto $x_0 \in (0, 1)$.

3. Si studi la funzione $h(x) = 3e^x \log x$ e se ne tracci il grafico. Si provi, in particolare, che h ha esattamente un punto di flesso. Anche in questo caso, possono essere utili i risultati dei due punti precedenti.

8 Le autorità decidono di immagazzinare le scorie radioattive della centrale nucleare dismessa di Buttapietra nel nuovo sito di stoccaggio di Ca' Vignal. Le scorie vengono trasportate nel sito poco alla volta a ritmo costante, per cui la loro massa cresce in funzione lineare del tempo fino al completo trasferimento del materiale.

Supponiamo che il trasferimento delle scorie duri 50 anni. Siccome i nuclei radioattivi decadono con legge esponenziale, la massa del materiale radioattivo contenuto nelle scorie di Ca' Vignal al tempo t (misurato in anni) sarà

$$f(t) = \begin{cases} Cte^{-\alpha t} & se\ t \leq 50 \\ 50Ce^{-\alpha t} & se\ t > 50 \end{cases}$$

dove C, α sono delle costanti (ed in particolare $\alpha > 0$ è la costante di decadimento).

Assumendo $\alpha = 0.0069$, si determini il momento in cui vi sarà massima radioattività durante tutta la vita futura del sito di stoccaggio.

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Il primo limite diventa di calcolo immediato se dividiamo numeratore e denominatore della frazione per x^2:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \sin x \log x}{3x^2 + 2x + 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \sin x \frac{\log x}{x^2}}{3 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{1}{3}.$$

Si noti infatti $\sin x$ è una funzione limitata, mentre la frazione $\frac{\log x}{x}$ tende a 0: il prodotto di questi due termini tende dunque a 0.

Il secondo limite può essere facilmente calcolato usando la regola di l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + 1 - x - \cos(\frac{1}{2}x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}x)}{2x} =$$
$$\lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{8}\frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{\frac{1}{2}x} \right) = -\frac{3}{8}.$$

Nei compiti delle tipologie B,C,D il procedimento per calcolare i due limiti è identico: cambia solo il valore numerico.

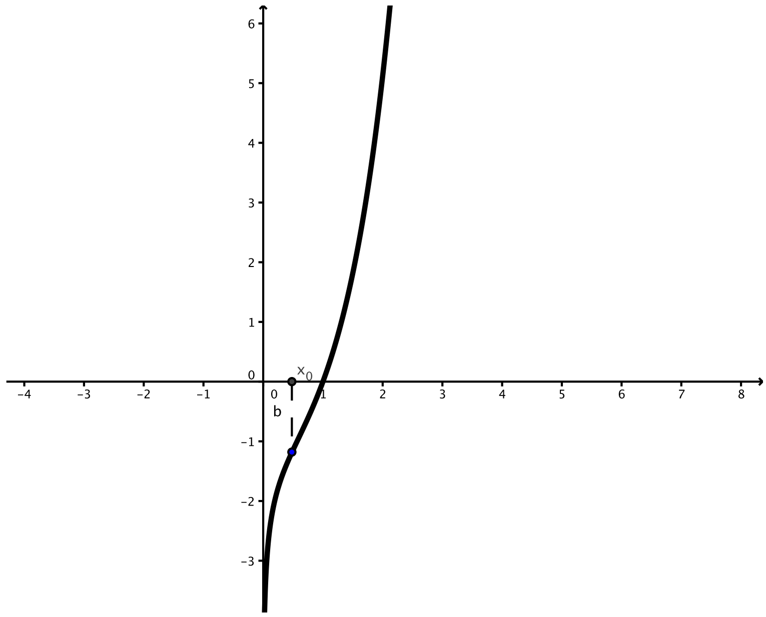
7 Vediamo le soluzioni punto per punto:

1. Abbiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (in particolare, f è illimitata superiormente).

   Inoltre $f'(x) = \log x + 1$: la derivata è negativa per $0 < x < 1/e$, mentre è positiva per $x > 1/e$. Se ne deduce che f ha minimo assoluto per $x = 1/e$: il valore di questo minimo è $-1/e$. Quindi $\inf f = \min f = -1/e$, mentre $\sup f = +\infty$.

2. Si ha $g'(x) = 2x\log x + x + 2$. Siccome abbiamo visto sopra che $x \log x \geq -1/e$, abbiamo $g'(x) \geq x + 2 - 2/e > 0$ (sul dominio $x > 0$ della funzione): g è quindi strettamente crescente. Poichè poi $\lim_{x\to 0} g(x) = -1$, $g(1) = 1$, il teorema di esistenza degli zeri ci assicura che g si annulla in un punto $x_0 \in (0, 1)$, e tale punto è unico grazie alla stretta monotonia di g.

3. La funzione h è definita per $x > 0$, è negativa in $(0, 1)$ e positiva in $(1, +\infty)$. Inoltre, $\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. Abbiamo $h'(x) = e^x(\log x + \frac{1}{x}) = e^x \frac{x\log x + 1}{x}$. Grazie al punto 1., $h'(x) \geq e^x(1 - 1/e) > 0$ e h è strettamente crescente. Poi $h''(x) = e^x(\log x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}) = \frac{e^x}{x^2} g(x)$: la derivata seconda ha lo stesso segno di $g(x)$. Grazie al punto precedente, abbiamo allora che $h''(x)$ è negativa per $x < x_0$ e positiva per $x > x_0$: h è rispettivamente concava e convessa in queste semirette. Il grafico della funzione è quindi come in figura:



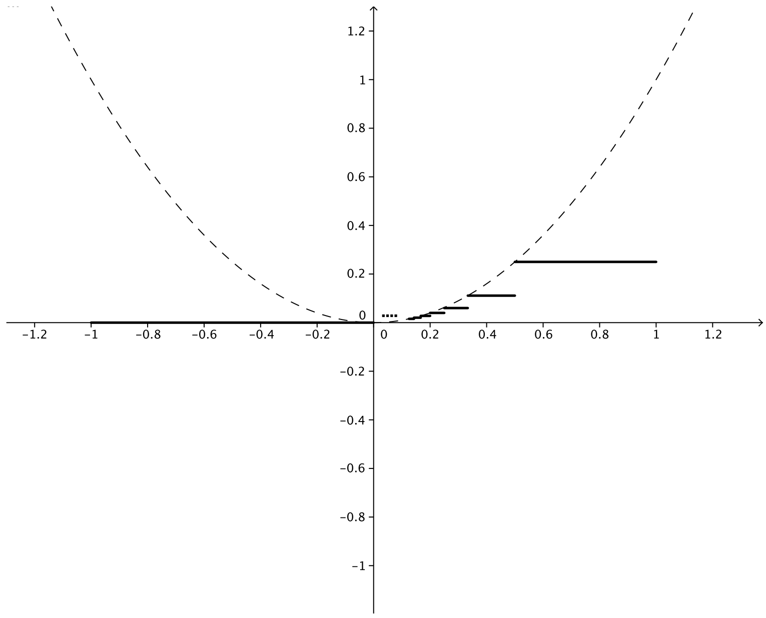
Nei compiti di tipologia B,C,D c'è solo una modifica minima: la funizone h è moltiplicata per una costante. Nella tipologia D tale costante è positiva, per cui il grafico ha lo stesso aspetto. Nei compiti di tipologia B e C la costante è negativa, per cui il grafico viene "sotto sopra"...

8. Consideriamo le funzioni $g(t) = te^{-\alpha t}$ e $h(t) = e^{-\alpha t}$ che compaiono nell'espressione di $f(t)$. La funzione h, che regola l'andamento della radioattività dopo i primi 50 anni, è strettamente decrescente e tende a 0. Studiamo invece la funzione g, che detta l'andamento della radioattività nei primi 50 anni: essa si annulla in 0, ed inoltre $g(t) \to 0$ per $t \to +\infty$. Abbiamo poi $g'(t) = e^{-\alpha t}(1-\alpha t)$. Se ne deduce subito che la funzione g ha un punto di massimo assoluto per $t = 1/\alpha \approx 14,49$. Poichè $14,49 < 50$, questo è proprio il momento di massima radioattività: dopo questo istante la radioattività decresce, e continua a decrescere anche dopo i 50 anni, quando l'espressione di f cambia.

Nella tipologia B, il momento di massima radioattività si ha per $t = 1/\alpha \approx 43$. Diverso il caso delle tipologie C e D: per i valori di α dati in quei compiti, abbiamo $1/\alpha > 50$, per cui g è crescente per tutti i primi 50 anni. Se ne deduce che il momento di massima radioattività si ha per $t = 50$.

9. Per come è definita la funzione, abbiamo $0 \leq x \leq x^2$. Per il teorema dei carabinieri, la funzione è quindi continua in 0. Inoltre, scrivendo il rapporto incrementale in 0 ed usando la stessa coppia di disuguaglianze si deduce subito che f è derivabile in 0, con $f'(0) = 0$.

I punti del tipo $1/n$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ sono evidentemente punti di discontinuità di salto. È anche abbastanza evidente che la funzione è crescente: è costante a tratti su intervallini che si accumulano a destra di 0, e il valore che la funzione assume su questi intervalli decresce man mano che questi si avvicinano a 0. Questo è dunque un esempio di funzione crescente con una quantità numerabile di discontinuità. Nella figura seguente, mostriamo un grafico (necessariamente approssimato) di questa funzione:



La seconda parte dell'esercizio chiede di far vedere che questo è "il peggio che possa capitare": una funzione crescente ha *al più* un insieme numerabile di punti di discontinuità! Infatti, una funzione crescente ammette limite destro e limite sinistro in ogni punto. Nei punti di continuità essi sono uguali, mentre nei punti di discontinuità il limite sinistro è *strettamente minore* del limite destro.

Inoltre, ricordiamo che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > x_0\},$$

per cui il limite sinistro in un punto è necessariamente maggiore o uguale del limite destro in tutti i punti che lo precedono!

Questo ci dice una cosa importante: gli intervalli aperti compresi tra limite sinistro e limite destro nei punti di discontinuità *sono due a due disgiunti*. Quindi, l'insieme dei punti di discontinuità di f è in corrispondenza biunivoca con la famiglia di questi intervalli.

Poiché, come detto nel suggerimento, è possibile scegliere un numero razionale in ciascuno di questi intervalli, ed i razionali sono numerabili, se ne deduce che una funzione crescente possiede al più un insieme numerabile di di punti di discontinuità.