Università degli Studi di Verona

Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 23/1/2009

FAC SIMILE: Attenzione, questa è un'esercitazione!

1.1 Enunciare il Teorema di Weierstrass. Illustrare la necessità delle ipotesi con qualche esempio.

1.2 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione ovunque derivabile, con $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e tale che $f'(x) = 0$ se e solo se $x \in \mathbf{Z}$. Allora

- f è crescente, ma di sicuro non è strettamente crescente;
- f è crescente, ma potrebbe non essere strettamente crescente;
- f potrebbe essere decrescente;
- f è strettamente crescente;

1.3 Sia f una funzione derivabile nel punto x_0. La retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0

- potrebbe non esistere;
- può intersecare il grafico di f in più punti;
- potrebbe non passare nemmeno per il punto $(x_0, f(x_0))$;
- non può essere orizzontale;

1.4 L'estremo inferiore dell'insieme $\{\cos q : \ q \in \mathbf{Q}, 0 < q < \pi/4\}$

- vale $\sqrt{2}/2$;
- vale 1;
- vale 0;
- è anche minimo;

1.5 Se sappiamo che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, allora possiamo dire che

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$;
- $f(x)$ è positiva in un intorno destro di 0, tranne eventualmente in 0;
- f può assumere sia valori positivi che negativi;
- f è continua in 0;

1.6 Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3+\cos x}{x^2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2\log(1+5x)}.$$

1.7 Si svolgano i seguenti esercizi, tra di loro collegati:

1. Si studi la crescenza della funzione $f(x) = 4x+\cos x$, nonché il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$. Localizzare la soluzione (o le soluzioni) con un errore inferiore all'unità.

2. Studiati gli intervalli di concavità e convessità di f, se ne tracci un grafico il più dettagliato possibile.

3. Si studi la funzione $g(x) = 2x^2 + \sin x$ e se ne tracci un grafico il più dettagliato possibile. Dopo aver osservato che $g(0) = 0$, si dica in particolare quante altre soluzioni possiede l'equazione $g(x) = 0$ (e le si localizzi con un errore inferiore all'unità).

1.8 Alle estremità di una strada rettilinea lunga $100m$ vi sono due lampioni. La luce emessa dal primo di essi ha un'intensità che è 2 volte quella emessa dal secondo. Sapendo che l'intensità della luce che raggiunge un punto è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente, si determini il punto meno illuminato della strada.

1.9 (Esercizio facoltativo) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^4\sin(\frac{1}{x}) & se\ x \neq 0, \\ 0 & se\ x = 0. \end{cases}$$

Si studino la derivata prima e seconda di f (ed in particolare la loro esistenza per $x = 0$). Si mostri che $x = 0$ è un punto in cui la retta tangente al grafico di f è orizzontale, pur non essendo né di massimo, né di minimo, né di flesso.