Esercizitazione di Analisi Matematica I

Stefano Zambon

24 Febbraio 2008

- Calcolare la derivata prima della seguente funzione:

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos(t^2+1)\, dt$$

- Data la funzione $f(x) = \pi + \int_{-1}^{x} \frac{e^{-t}}{2t+1}\, dt$, dimostrare che è invertibile nel suo intervallo di definizione e, denominata con g la sua inversa, calcolare $g'(\pi)$

- Studiare le seguenti funzioni (insieme di definizione, simmetrie, continuità, derivabilità, monotonia, concavità e convessità, limiti per $x \to \pm\infty$, grafico approssimato):

  1. $f(x) = \int_0^x e^{-\cos t}\, dt$
  2. $f(x) = \int_x^0 \sqrt{e^{t^2}+1}\, dt$
  3. $f(x) = \int_1^x (t^2)^{\frac{1}{t}}\, dt$

- Trovare e correggere gli errori nei seguenti passaggi:

  1. $\int_{-3}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-3}^{1} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$
  2. Sia $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \in [-2,1] \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$. Allora:

$$\int_{-2}^{1} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-2}^{\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\log\varepsilon - \log 2 - \log\varepsilon) = -\log 2$$

  3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{-k}^{k} \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \lim_{k \to +\infty} \left(\log(1+k^2) - \log(1+k^2)\right) = 0$

- Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono e, laddove possibile, calcolarne il valore:

  1. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\arctan x}}\, dx$
  2. $\int_1^{+\infty} x \sin\frac{1}{x^2}\, dx$
  3. $\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\log(\cos x)}\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}}\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}+x}\,dx$
7. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx$
8. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^2 x}\,dx$

- Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ i seguenti integrali impropri convergono:

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^\alpha x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\sin x\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \sin x\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x+2}{x^\alpha(x+1)}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\left(e^{2x}-1\right)^2\,dx$