Esercizitazione di Analisi Matematica I

Stefano Zambon

1/12/2008

- Dimostrare che le seguenti equazioni hanno un'unica soluzione in $\mathbb{R}$ e calcolarne una soluzione approssimata con un errore inferiore a $1/4$:

  1. $e^x \sqrt[3]{x} = 1$
  2. $2^x + x = 0$
  3. $3^{-x} = x^3 + 2x$

Nota Per gli esercizi che seguono, siano date per note le seguenti proprietà delle derivate: linearità, regole di derivazione del prodotto e della differenza, derivate delle funzioni elementari. Si usi anche la seguente proprietà: data $f(x)$ e la trasformazione $y = ax$, si può calcolare la derivata di $f(y)$ come

$$\frac{d}{dx} f(ax) = a \frac{d}{dy} f(y)$$

. Dimostrazione nel caso particolare di $f(x) = x^n$:

$$\frac{d}{dx}(ax)^n = a^n \frac{d}{dx} x^n = ana^{n-1}x^{n-1} = a\frac{d}{dy} y^n = af'(y)$$

.

- Per le seguenti funzioni, calcolare la derivata prima e studiarne il segno ove è definita:

  1. $\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$
  2. $x^4 - \dfrac{1}{x^2-1}$
  3. $\dfrac{6-3x^2+x^6}{x^4}$

- Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

  1. $y = \tan x$
  2. $y = \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4a}\sin 2ax\right) (= \sin^2 ax)$
  3. $y = \left(\dfrac{1}{a}\sin ax - \dfrac{1}{3a}\sin^3 ax\right) (= \cos^3 ax)$

- Si consideri la curva definita dal grafico della funzione $f(x) = 1/x$ per $x > 0$. Dato un generico punto $P = (x_0, f(x_0))$ su di essa, dimostrare che il triangolo definito dall'asse delle x, la tangente alla curva in P e la retta che congiunge P con l'origine è isoscele. Dimostrare poi che l'area è costante al variare di x_0 e calcolarne il valore.

- Un corpo si muove lungo una dimensione con la seguente legge oraria:

$$x(t) = A\cos(kt), \quad A, k \in \mathbb{R},\ A, k > 0$$

1. Dimostrare che[1] $\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = 0$.
2. Calcolare la quantità $E = (\dot{x}(t))^2 + k^2(x(t))^2$ e mostrare che essa è indipendente da t.

- Come nell'esercizio precedente, ma questa volta la legge oraria è data da:

$$x(t) = Ae^{-ct}\cos(kt), \ \ 0 < c < 1$$

1. Dimostrare che $\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k^2 x(t) = 0$.
2. Calcolare $E = (\dot{x}(t))^2 + k^2(x(t))^2$.

- (*facoltativo*, richiede un pizzico di algebra lineare)
Si vuole trovare una funzione che passi per i seguenti punti del piano: $(-2, 1), (-1, 0), (0, 1), (1, -1), (2, 1)$ e definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 & \text{se } -2 \le x \le 0 \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 & \text{se } 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Trovare i coefficienti a_k, b_k imponendo che, per $x = 0$, siano continue $f(x)$ e le sue prime due derivate $f'(x), f''(x)$.

- Sia $f(x)$ derivabile e positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcolare le seguenti derivate:

1. $\dfrac{d}{dx}\sin(\sqrt{f(x)})$
2. $\dfrac{d}{dx}\log((f(x))^2 + 1)$

- Studiare la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \dfrac{x}{|x| + |x-1|}$
2. $f(x) = \begin{cases} e^{x^2-2} & \text{se } -2 \le x \le 1 \\ \frac{1}{e}(x-1) + \frac{1}{e} & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$
3. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{|x|}}$

- Trovare i valori dei parametri reali a, b affinché le seguenti funzioni siano derivabili in tutto il loro dominio di definizione:

1. $f(x) = \begin{cases} a + bx^3 + 3x & \text{se } x < 0 \\ be^x - \sin(4x) & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + b & \text{se } 0 \le x < 1 \\ x|x-4| & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$

- Studiare la continuità e la derivabilità in $x = 0$ delle seguenti funzioni:

[1] È consuetudine in fisica indicare le derivate rispetto al tempo con la notazione $\dot{x}(t) = \dfrac{d}{dt}x(t), \ddot{x}(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}x(t)$.

1. $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

2. $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$