Esercizitazione di Analisi Matematica I

Stefano Zambon

27 Novembre 2008

- Dimostrare per induzione i seguenti risultati:
  1. (*disuguaglianza di Bernoulli*) $(1+h)^n \geq 1 + nh, \quad h \in \mathbb{R}, h > 1,\ n \in \mathbb{N}$
  2. $x^n - 1 = (x-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k$
  3. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  4. $\frac{d}{dx}(x^n) = n\, x^{n-1}$
- Dimostrare il *teorema binomiale*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

  dove $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

  Traccia:
  1. Si consideri prima l'espressione $(1+x)^n$, che può essere rappresentata come un polinomio di grado n, i.e. $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$
  2. Dimostrare per induzione che $c_k = \binom{n}{k}$
  3. Con un'opportuna sostituzione su x, sfruttare i risultati precedenti per dimostrare l'enunciato generale del teorema
- Dimostrare che le seguenti equazioni ammettono una sola soluzione $x_0 \in \mathbb{R}$:
  1. $e^x + x = 0$
  2. $e^x \sqrt[3]{x} = 1$
- *Bepi* è un giovane monaco buddhista. Ogni mattina parte dal tempio alle e percorre, con moto vario, un sentiero fino alla cima del monte. Alla sera, ripercorre lo stesso sentiero in verso opposto fino al tempio. Il tempo totale di percorrenza è di due ore sia per l'andata che per il ritorno; tuttavia, Bepi adora variare il ritmo impredicibilmente durante il percorso. Durante il viaggio, Bepi tiene con se un cronometro che azzerra ad ogni partenza. Dimostrare che esiste un punto lungo il sentiero dove Bepi passa nello stesso istante (indicato dal cronometro) sia all'andata che al ritorno.

  Hint: si tralasci pure il caso in cui Bepi è arrivato a sviluppare il potere dell'ubiquità, e quindi si descriva con opportune funzioni $f(t), g(t)$ la posizione di Gigi lungo il sentiero durante, rispettivamente, il viaggio di andata e di ritorno.