Argomenti delle lezioni del Corso di Equazioni alle Derivate Parziali ed Applicazioni

Corso di Laurea in Matematica

Quel che segue è il diario delle lezioni che ho tenuto per il corso di Equazioni alle Derivate Parziali e Applicazioni.

Lezione del 23/11/2004 (1 ora): Questa parte del corso sarà un'introduzione elementare alla teoria "moderna" delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Ci concentreremo soprattutto sulle equazioni differenziali lineari del secondo ordine, e cominceremo dalle equazioni ellittiche.

Un'equazione lineare del secondo ordine è un oggetto del tipo

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x),$$

dove la funzione regolare $u : \Omega \to \mathbf{R}$ (con Ω aperto di $\mathbf{R}^n$) è l'incognita, mentre i coefficienti a_{ij}, b_i e c sono funzioni date (pure regolari).

Un'equazione di questo tipo si dice *ellittica* se la forma quadratica associata alla matrice $(a_{ij}(x))$ è semidefinita positiva per ogni $x \in \Omega$. Diremo che l'equazione è *strettamente uniformemente ellittica* se esiste una costante $\nu > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbf{R}^n.$$

L'aggettivo "ellittico" deriva dal fatto che gli insiemi di livello della funzione $\xi \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$ sono degli ellissoidi in $\mathbf{R}^n$.

Il problema di Dirichlet per la nostra equazione consiste nel cercare una funzione $u(x)$, regolare fin sul bordo di Ω, che soddisfa l'equazione all'interno di Ω e tale che $u(x) = g(x)$ su $\partial\Omega$, dove $g : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ è una funzione data (condizione al contorno).

Per cominciare la nostra discussione sulle equazioni ellittiche, e in particolare per introdurre il concetto di soluzione debole, cominciamo ad occuparci del caso delle *equazioni in forma di divergenza con dato al bordo omogeneo*: precisamente, vogliamo occuparci di un problema del tipo

$$(*) \qquad \begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} = f(x) & se\ x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & se\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Supporremo che l'equazione sia strettamente uniformemente ellittica e che i coefficienti a_{ij} siano (regolari e) simmetrici.

Supponiamo che u sia una soluzione del nostro problema. Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per una funzione $\phi \in C_c^1(\Omega)$ e integriamo per parti: troviamo l'identità integrale

$$(**) \qquad \int_\Omega [\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i}(x) \phi_{x_j}(x) + f(x)\phi(x)]\, dx = 0.$$

Una funzione (per il momento regolare) che soddisfa la $(**)$ per ogni $\phi \in C_c^1(\Omega)$ si chiama *soluzione debole* dell'equazione differenziale. Si vede subito (tornando indietro nell'integrazione per parti e grazie all'arbitrarietà di ϕ) che una funzione C^2 che sia soluzione debole dell'equazione, è in realtà una una soluzione dell'equazione differenziale data.

C'è però un primo vantaggio nella definizione di soluzione debole, rispetto alla formulazione originaria dell'equazione differenziale: possiamo richiedere una minor regolarità della soluzione u e dei dati del problema a_{ij}, f. Precisamente, supponiamo che i coefficienti a_{ij} (sempre simmetrici e strettamente uniformemente ellittici) appartengano a $L^\infty(\Omega)$, e che $f \in L^2(\Omega)$. Una *soluzione debole* della nostra equazione differenziale sarà una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ che verifichi l'identità integrale $(**)$ per ogni funzione $\phi \in C_c^1(\Omega)$. Volendo introdurre la condizione al contorno, diremo che una soluzione debole del problema differenziale $(*)$ sarà una soluzione debole dell'equazione differenziale che appartenga allo spazio di Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$.

A questo proposito, val la pena di richiamare la definizione degli spazi di Sobolev: se $p > 1$, lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è composto dalle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ per le quali esistono delle funzioni $g_1, g_2, \dots, g_n \in L^p(\Omega)$ (dette *derivate deboli*) tali che

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega g_i(x)\phi(x)\, dx \qquad i = 1, \dots, n, \ \forall \phi \in C_c^1(\Omega).$$

Si vede subito che queste derivate deboli, se esistono, sono anche uniche: potremo dunque indicarle con i simboli usuali per le derivate parziali.

Lo spazio di Sobolev $W^{1,p}$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Nel caso particolare in cui $p = 2$, questa norma è Hilbertiana (lo spazio di Hilbert $W^{1,2}$ si denota talvolta $H^1(\Omega)$).

Un risultato importante sugli spazi di Sobolev è il teorema di Meyers-Serrin, che dice che ogni funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ può essere approssimata con una successione di funzioni $\{u_h\} \subset C^\infty(\Omega)$ in modo tale che $u_h \to u$ in $W^{1,p}$ per $h \to +\infty$.

Lo spazio di Sobolev "con lo zero" $W_0^{1,p}(\Omega)$ si definisce come la chiusura di $C_c^1(\Omega)$ nella norma di $W^{1,p}$: questo è un modo abbastanza naturale di definire le funzioni di Sobolev "nulle al bordo". Un modo di convincersi che questa definizione è quella giusta, sta nell'osservare che *se Ω è limitato, la sola funzione costante che appartiene allo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ è la funzione nulla.* Quest'ultimo fatto è una conseguenza della disuguaglianza di Poincaré (prossima volta!).

La prossima volta (ri-)vedremo anche come sia facile mostrare che esiste una (unica) soluzione debole del problema $(*)$ nello spazio di Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Lezione del 25/11/2004 (2 ore): La prima parte di questa lezione è stata dedicata in gran parte ad un ripasso sulla definizione e sulle proprietà elementari degli spazi di Sobolev.

In particolare, abbiamo detto che in $W_0^{1,2}(\Omega)$ vale la disuguaglianza di Poincaré: esiste una costante $C > 0$ (dipendente solo da Ω) tale che $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ per ogni $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Questa disuguaglianza è una conseguenza immediata del teorema di immersione di Sobolev (vedi seconda parte della lezione).

La disuguaglianza di Poincaré mostra che nello spazio $W_0^{1,2}(\Omega)$ la forma bilineare

$$((u, v)) := \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$$

è un prodotto scalare *equivalente a quello standard di $W^{1,2}$*.

Torniamo alla nostra equazione differenziale ellittica in forma di divergenza: stiamo cercando una funzione $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ che soddisfi

$$(*) \qquad \int_\Omega [\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i}(x) \phi_{x_j}(x) + f(x)\phi(x)]\, dx = 0 \quad \forall \phi \in C_c^1(\Omega),$$

dove di coefficienti a_{ij} sono simmetrici, uniformemente strettamente ellittici e in L^∞, mentre $f \in L^2$.

Grazie alla disuguaglianza di Poincaré, verifichiamo subito che anche la forma bilineare su $W_0^{1,2}$ data da

$$(((u, v))) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}(x) v_{x_j}(x)\, dx$$

è un prodotto scalare equivalente a quello standard di $W^{1,2}$: possiamo dunque vedere $W_0^{1,2}(\Omega)$ come uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare $(((\cdot,\cdot)))$.

Ora, l'applicazione $F : \phi \mapsto -\int_\Omega f(x)\phi(x)\ dx$ è un funzionale lineare e continuo su $W_0^{1,2}(\Omega)$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste dunque un unico elemento u dello spazio di Hilbert tale che $(((u,\phi))) = F(\phi)$ per ogni $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (e a maggior ragione per ogni $\phi \in C_c^1(\Omega)$). Ma questa è proprio l'equazione $(*)$: la funzione u che abbiamo trovato non è altro che la soluzione debole del nostro problema differenziale!

Dunque, trovare soluzioni deboli di un'equazione ellittica in forma di divergenza non è affatto difficile: con tecniche solo leggermente più raffinate si può trattare il caso di coefficienti non simmetrici, oppure equazioni più complicate che coinvolgano anche termini di ordine inferiore. Ci si propone però il problema della *regolarità delle soluzioni deboli*: sarebbero estremamente desiderabili dei risultati che ci assicurassero che, sotto opportune ipotesi sui dati del problema a_{ij} e f, la soluzione debole u è in realtà di classe C^2 e nulla al bordo. In questo caso potremmo infatti dedurre che u è una *vera* soluzione del problema di Dirichlet originario

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} = f(x) & se\ x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & se\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Il problema della regolarità è sostanzialmente più complicato di quello dell'esistenza di soluzioni deboli. Occorrono delle informazioni un pò più raffinate sulle proprietà delle funzioni di Sobolev. Questo è particolarmente facile in dimensione 1: in quel caso le funzioni di Sobolev sono assolutamente continue e la teoria della regolarità si può fare abbastanza rapidamente (vedi corso di Tamanini!). Purtroppo, in dimensione maggiore la situazione è più complicata, ed esistono funzioni di Sobolev discontinue.

Un primo risultato utile è il seguente:

TEOREMA DI IMMERSIONE DI SOBOLEV, I VERSIONE: Supponiamo che sia $p < n$ (dove n è la dimensione dello spazio ambiente). Esiste una costante $C > 0$, che dipende da p ma non da u né da Ω tale che

$$(**) \qquad \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

dove $p^* = \frac{np}{n-p}$ è detto esponente di Sobolev.

Questo teorema di immersione può essere visto come un primo rudimentale risultato di regolarità, in quanto ci assicura che la funzione u possiede una *maggiore sommabilità* di quella che potevamo inizialmente aspettarci (infatti $p^* > p$).

L'esponente di Sobolev appare a prima vista misterioso, ma non è difficile rendersi conto che è *l'unico* per cui la disuguaglianza $(**)$ possa essere vera per ogni $u \in C_c^1(\mathbf{R}^n)$. Precisamente, supponiamo che valga

$$\|u\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \qquad \forall u \in C_c^1(\mathbf{R}^n).$$

Allora necessariamente $q = p^*$.

Pre mostrarlo, fissiamo $u \in C_c^1(\mathbf{R}^n)$ non identicamente nulla: la nostra disuguaglianza deve essere vera per u. Per ipotesi, la disuguaglianza deve essere vera, con la stessa costante, anche per tutte le funzioni del tipo $v(x) = u(rx)$ con $r > 0$. Con un semplice conto si vede che questo implica

$$\|u\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \leq Cr^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}.$$

L'esponente di r nell'ultima disuguaglianza deve essere necessariamente 0: in caso contrario avremmo un assurdo perché facendo tendere r a 0 o a $+\infty$, potremmo sempre far tendere a zero il membro di destra della disuguaglianza, mentre a sinista abbiamo una quantità certamente positiva. L'esponente si annulla esattamente quando $q = p^*$.

La prossima volta vedremo la dimostrazione del teorema di immersione di Sobolev, e vedremo anche cosa succede quando $p > n$.

Lezione del 2/12/2004 (2 ore): Vediamo la dimostrazione del teorema di immersione di Sobolev.

Per il procedimento che segliamo di seguire, ci serve il seguente lemma:

LEMMA (Gagliardo): Siano $f_1, \ldots, f_n : \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$ funzioni non negative. Allora vale la disuguaglianza

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \prod_{i=1}^n f_i(\hat{x}_i)\, dx \leq \prod_{i=1}^n \left(\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} f_i^{n-1}(\hat{x}_i)\, d\hat{x}_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

La dimostrazione di questa disuguaglianza si può fare per induzione su n: per $n = 2$ è ovvia, mentre il passo induttivo è un po' tecnico ma non difficile.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di immersione di Sobolev.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI IMMERSIONE DI SOBOLEV PER $p < n$: Per la definizione dello spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$, è chiaro che basta dimostrare il teorema per le funzioni $u \in C_C^1(\mathbf{R}^n)$: facciamo dunque questa assunzione.

Cominciamo col dimostrare la disuguaglianza di Sobolev per $p = 1$ (per cui l'esponente di Sobolev è $1^* = \frac{n}{n-1}$).

Ora, è evidente che per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ e per $i = 1, \dots, n$ si ha

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx_i.$$

Dunque

$$|u(x)| \le \int_{\mathbf{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx_i \le \int_{\mathbf{R}} |\nabla u|\, dx_i,$$

da cui

$$\int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \le \int_{\mathbf{R}^n} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbf{R}} |\nabla u(x)|\, dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx.$$

Ora, ciascuna delle espressioni tra parentesi tonde nella produttoria è funzione di $\hat{x}_i$ (la dipendenza da x_i sparisce grazie all'integrazione!). Possiamo dunque utilizzare il lemma di Gagliardo, e l'ultima espressione può essere ulteriormente maggiorata come segue:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \le \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} d\hat{x}_i \int_{\mathbf{R}} |\nabla u(x)|\, dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u|\, dx \right)^{\frac{n}{n-1}},$$

che è quanto volevamo dimostrare (e per $p = 1$ la costante nella disuguaglianza di Sobolev è 1).

Dimostriamo ora la disuguaglianza per p qualunque. Il trucco è di applicare la disuguaglianza per $p = 1$ alla funzione $v(x) = |u(x)|^{1+r}$, dove $r > 0$ è una costante da scegliersi in seguito in dipendenza da p. Si noti che la funzione di una variabile $t \mapsto |t|^{1+r}$ è derivabile, per cui si ha $|\nabla v(x)| = (r+1)|u(x)|^r |\nabla u(x)|$. Applicando la disuguaglianza di Sobolev per $p = 1$ alla funzione v, ed utilizzando poi la disuguaglianza di Hölder otteniamo:

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^{\frac{(r+1)n}{n-1}}\, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \le (r+1) \int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^r |\nabla u(x)|\, dx \le$$

$$(r+1)\|\nabla u\|_{L^p} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^{\frac{pr}{p-1}}\, dx \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

A questo punto, possiamo scegliere r in modo che gli esponenti di $|u(x)|$ ai due lati della disuguaglianza siano uguali: con semplici conti troviamo proprio la disuguaglianza di Sobolev. Q.E.D.

Per $p = n$, se siamo in un aperto limitato Ω possiamo applicare il teorema di immersione per tutti gli esponenti inferiori e scopriamo che una funzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ appartiene a $L^q(\Omega)$ per tutti gli esponenti $q < +\infty$. Esistono invece degli esempi che mostrano che una tale funzione non è necessariamente in L^∞.

Per $p > n$ le cose vanno molto meglio: le funzioni di $W_0^{1,p}(\Omega)$ sono hölderiane.

TEOREMA (Morey): Se $p > n$, esiste una costante $C > 0$ che dipende solo da p e da n, tale che

$$[u]_\alpha \le \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

dove $\alpha = 1 - n/p$ e

$$[u]_\alpha = \sup\left\{\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} : \ x, y \in \Omega, x \neq y\right\}.$$

La disuguaglianza è da intendersi nel senso che nella classe di equivalenza di u in $L^p(\Omega)$, esiste un rappresentante hölderiano che soddisfa la stima.

DIM.: Come prima, è sufficiente provare la stima per le funzioni $u \in C_C^1(\mathbf{R}^n)$: infatti una funzione in $W_0^{1,p}(\Omega)$ si approssima in norma $W^{1,p}$ con funzioni di quel tipo, e non è restrittivo supporre che si abbia anche convergenza quasi ovunque (basta estrarre una sottosuccessione). La disuguaglianza di Morey per le funzioni approssimanti passa allora al limite, e abbiamo il teorema per tutte le funzioni in $W_0^{1,p}$.

Sia dunque $u \in C_0^1(\Omega)$, e siano $x, y \in \mathbf{R}^n$ punti distinti fissati. Poniamo $\delta = |x-y|$, e definiamo $S = B_\delta(x) \cap B_\delta(y)$. Per ogni $z \in S$ si ha $|u(x)-u(y)| \le |u(x) - u(z)| + |u(z) - u(y)|$. Integriamo ambo i membri della disuguaglianza su S rispetto alla variabile z. Otteniamo

$$(*) \qquad |S||u(x) - u(y)| \le \int_S |u(z) - u(x)|\, dz + \int_S |u(z) - u(y)|\, dz.$$

Si ha chiaramente $|S| = \kappa\delta^n$, con κ costante indipendente da δ. Maggioriamo il primo integrale a destra della disuguaglianza: il secondo si maggiorerà esattamente allo stesso modo. Evidentemente,

$$|u(z) - u(x)| = \left|\int_0^1 \frac{d}{dt} u(x + t(z - x))\, dt\right| =$$
$$\left|\int_0^1 \nabla u(x + t(z - x)) \cdot (z - x)\, dt\right| \le \delta \int_0^1 |\nabla u(x + t(z - x)|\, dt,$$

da cui, effettuando il cambio di variabili $w = x + t(z - x)$ ed usando la disuguaglianza di Hölder:

$$\int_S |u(z) - u(x)|\, dz \le \delta \int_0^1 dt \int_S |\nabla u(x + t(z-x)|\, dz\, dz \le$$

$$\delta \int_0^1 t^{-n}\, dt \int_{B_{t\delta}(x)} |\nabla u(w)|\, dw \le \delta \int_0^1 t^{-n} (\omega_n t^n \delta^n)^{1-1/p}\, dt \|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}.$$

Nell'ultima espressione, ω_n denota la misura della palla unitaria in $\mathbf{R}^n$. Si noti che l'integrale in t è finito (perché l'esponente di t è $-n/p > -1$).

La disuguaglianza $(*)$ diventa allora

$$\kappa \delta^n |u(x) - u(y)| \le C \delta^{1+n-n/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^n)},$$

che è la tesi. Q.E.D.

Lezione del 7/12/2004 (1 ora):

Ci si può chiedere a questo punto se esiste una versione dei teoremi di immersione di Sobolev per funzioni nello spazio $W^{1,p}(\Omega)$ (e non solo per il sottospazio $W_0^{1,p}(\Omega)$). La risposta è affermativa se l'aperto Ω è abbastanza regolare (altrimenti esistono dei controesempi).

Supponiamo per semplicità che Ω sia un aperto limitato di classe C^∞. Allora vale il seguente teorema di estensione:

TEOREMA (di estensione): Sia Ω un aperto limitato di classe C^∞, Ω' un altro aperto tale che $\Omega \subset\subset \Omega'$. Allora esiste una costante $C > 0$, dipendente solo da p, n, Ω e Ω', tale che ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ possiede un'estensione $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(\Omega')$ tale che

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\Omega')} \le C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Tralasciamo la dimostrazione del teorema di estensione: essa non è eccessivamente complicata, e si basa un un argomento di localizzazione (utilizzando una partizione dell'unità) e su un prolungamento per riflessione nelle carte locali.

Se applichiamo i teoremi di Sobolev e Morrey alla funzione estesa $\tilde{u}$, otteniamo facilmente il seguente enunciato:

TEOREMA (di immersione di Sobolev in $W^{1,p}(\Omega)$): Sia Ω un aperto limitato regolare, come nel teorema di estensione. Se $p < n$, esiste una costante $C > 0$ (dipendente solo da p, n e Ω) tale

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Se poi $p > n$, ogni funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ è hölderiana di esponente $\alpha = 1 - n/p$, ed esiste $C > 0$ (dipendente solo da p, n e Ω) tale che

$$[u]_\alpha \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

A questo punto, abbiamo modo di dimostrare che una funzione in uno spazio di Sobolev è continua: basta far vedere che essa, e le sue derivate deboli, sono sommabili con un esponente abbastanza alto. Esiste però anche un procedimento alternativo: le due metà del teorema di immersione di Sobolev (quella per $p < n$ e quella per $p > n$) possono essere fatte lavorare in tandem per mostrare che *una funzione di Sobolev con derivate deboli di ordine elevato* è in realtà una funzione regolare.

Precisamente, diamo la seguente definizione ricorsiva: diciamo che una funzione u appartiene allo spazio di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ (spazio delle funzioni L^p con derivate fino all'ordine k in L^p) se vale che $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{k-1,p}(\Omega)$ per $i = 1, \ldots, n$.

A questo punto, supponiamo che $p < n$ e che $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Allora, applicando il teorema di immersione di Sobolev a u ed alle sue derivate prime, vediamo che $u \in W^{1,p^*}(\Omega)$. Allo stesso modo, se $u \in W^{3,p}(\Omega)$ avremo $u \in W^{1,p^{**}}(\Omega)$ e così via...

Ora, si vede subito che $p^{*^{(k)}} = \frac{np}{n-kp}$... Dunque, una funzione in $W^{k,p}$ con *k abbastanza alto* starà in $W^{1,q}$ con $q > n$ e sarà dunque hölderiana. Aumentando ancora il numero di derivate deboli, avremo che anche le derivate prime sono hölderiane, e così via.

Se poi riusciamo a dimostrare che $u \in W^{k,p}(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbf{N}$, possiamo applicare il teorema di immersione di Sobolev quante volte vogliamo, e otteniamo che in realtà $u \in C^\infty(\Omega)$.

Un altro risultato molto importante sugli spazi di Sobolev è il seguente teorema di compattezza:

TEOREMA (Rellich): Sia Ω un aperto limitato regolare, $q < p^*$. Ogni successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ possiede una sottosuccessione che converge fortemente in $L^q(\Omega)$.

Per la dimostrazione di questo teorema abbiamo bisogno di un criterio di compattezza forte in L^q: è questo l'oggetto del lemma che segue.

Cominciamo con l'introdurre un po' di notazione. Indichiamo con ρ_h una successione di mollifiers simmetrici: precisamente, per ogni $h \in \mathbf{N}$, ρ_h è una funzione in $C_C^\infty(\mathbf{R}^n)$, non negativa, con simmetria radiale rispetto all'origine, supporto contenuto nella palla $B_{1/h}(0)$ e tale che $\int_{\mathbf{R}^n} \rho_h(x)\, dx = 1$. E' ben noto che per ogni $u \in L^q(\mathbf{R}^n)$ le regolarizzate per convoluzione $u * \rho_h$ sono funzioni C^∞ che convergono a u in L^q per $h \to +\infty$. Se questa convergenza è *uniforme* per tutte le funzioni di una certa successione limitata in L^q, allora questa successione è compatta:

LEMMA: Sia $\{u_k\} \subset L^q(\Omega)$ una successione limitata in norma. Se le regolarizzate per convoluzione $u_{k,h} = u_k * \rho_h$ sono tali che $u_{k,h} \to u_k$ in $L^q(\Omega)$ per $h \to +\infty$, e questa convergenza è uniforme *al variare di $k \in \mathbf{N}$, allora la successione data ammette una sottosuccessione che converge fortemente in L^q.*

Vedremo la dimostrazione del lemma la prossima volta.

Lezione del 9/12/2004 (2 ore): Dimostriamo il lemma di compattezza forte in L^q: dividiamo la prova in due passi.
PRIMO PASSO: mostriamo che per h fissato, la successione $\{u_{k,h}\}_k$ è precompatta in L^q.

Grazie alla definizione di prodotto di convoluzione, è immediato verificare che si ha

$$\|u_{k,h}\|_{L^\infty} \leq \|u_k\|_{L^1} \cdot \|\rho_h\|_{L^\infty},$$
$$\|\nabla u_{k,h}\|_{L^\infty} \leq \|u_k\|_{L^1} \cdot \|\nabla \rho_h\|_{L^\infty}.$$

Dunque la successione $\{u_{k,h}\}_k$ è equilipschitziana, poiché la successione $\{u_k\}$ è equilimitata in L^1 grazie all'ipotesi di equilimitatezza in L^q.

Il teorema di Ascoli-Arzelà ci assicura allora che è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in C^0, ed a maggior ragione questa sottosuccessione convergerà in L^q.
SECONDO PASSO: conclusione.

Con un procedimento diagonale, non è difficile costruire una successione crescente di indici k_j tale che *tutte* le successioni $\{u_{k_j,h}\}_j$ siano convergenti, per ogni $h = 1, 2, 3, \ldots$. Supponiamo precisamente che si abbia $u_{k_j,h} \to v_h$ in $L^q(\Omega)$ per $j \to +\infty$. Affermo che la successione u_{k_j} è di Cauchy in $L^q(\Omega)$.

Fissiamo infatti $\varepsilon > 0$. Grazie all'ipotesi di convergenza uniforme delle regolarizzate per convoluzione, possiamo trovare $\overline{h}$ tale che $\|u_k - u_{k,\overline{h}}\|_{L^q} < \varepsilon/4$ per ogni $k \in \mathbf{N}$. A questo punto, fissiamo $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\|u_{k_j,\overline{h}} - v_{\overline{h}}\|_{L^q} < \varepsilon/4$ per ogni $j \geq \nu$. Allora, per ogni $j, \ell \geq \nu$ avremo:

$$\|u_{k_j} - u_{k_\ell}\|_{L^q} \leq$$
$$\|u_{k_j} - u_{k_j,\overline{h}}\|_{L^q} + \|u_{k_j,\overline{h}} - v_{\overline{h}}\|_{L^q} + \|v_{\overline{h}} - u_{k_\ell,\overline{h}}\|_{L^q} + \|u_{k_\ell,\overline{h}} - u_{k_\ell}\|_{L^q} < \varepsilon.$$

Q.E.D.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI RELLICH: Sia $\mathcal{F} \subset W^{1,p}(\Omega)$ una successione limitata in norma (questa strana notazione serve solo a risparmiare la scrittura degli indici...). Non è restrittivo supporre che la successione sia formata da funzioni regolari, grazie al teorema di Meyers-Serrin.

Grazie al teorema di immersione di Sobolev, la nostra successione è equilimitata in L^{p^*}, e quindi lo è anche in L^q. Grazie al lemma, ci rimane soltanto da far vedere che $u * \rho_h \to u$ in $L^q(\Omega)$ per $h \to +\infty$ *uniformemente al variare di* $u \in \mathcal{F}$.

Cominciamo a mostrarlo per $q = 1$. Abbiamo, per ogni $u \in \mathcal{F}$,

$$\int\limits_{\Omega} |u(x) - u * \rho_h(x)| \, dx = \int\limits_{\Omega} | \int\limits_{B_{1/h}(x)} \rho_h(y)(u(x-y) - u(x)) \, dy| \, dx \leq$$
$$\int\limits_{B_{1/h}(x)} \rho_h(y) \, dy \int_{\Omega} |u(x-y) - u(x)| \, dy.$$

Cerchiamo di stimare l'integrale più interno. Innanzitutto, notiamo che se fissiamo un aperto $U \subset\subset \Omega$ sufficientemente grande, allora la quantità

$$\int\limits_{\Omega \setminus U} |u(x-y) - u(x)| \, dx$$

può essere resa uniformemente piccola al variare di $u \in \mathcal{F}$. Si ha infatti

$$\int\limits_{\Omega \setminus U} |u(x-y) - u(x)| \, dx \leq |\Omega \setminus U|^{1-1/p} \cdot \|u(x-y) - u(x)|_{L^p(\Omega \setminus U)} \leq$$
$$2\, |\Omega \setminus U|^{1-1/p} \cdot \|u|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

e la misura di $\Omega \setminus U$ può essere presa piccola a piacere, mentre la norma di Sobolev di u è equilimitata per ipotesi.

Ci basta dunque mostrare che

$$\int\limits_{U} |u(x-y) - u(x)| \, dx \to 0 \qquad \textit{per } h \to +\infty,$$

uniformemente al variare di $u \in \mathcal{F}$. Se h è sufficientemente grande, possiamo essere sicuri che per ogni $x \in U$ e per ogni $y \in B_{1/h}(0)$ avremo $x - y \in \Omega$. Allora

$$|u(x-y) - u(y)| = | \int_0^1 \frac{d}{dt}[u(x-ty)] \, dt| \leq \frac{1}{h} \int_0^1 |\nabla u(x-ty)| \, dt,$$

da cui

$$\int_U |u(x-y) - u(x)|\, dx \leq \frac{1}{h}\int_0^1 dt \int_U |\nabla u(x-ty)|\, dx \leq$$
$$\frac{1}{h}|\Omega|^{1-1/p|}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

L'ultima quantità tende a 0 uniformemente per $h \to +\infty$.

Per concludere, dobbiamo far vedere che vale la stessa cosa con un qualunque esponente $q < p^*$. L'idea è di scrivere

$$\int_\Omega |u - u*\rho_h|^q\, dx = \int_\Omega |u - u*\rho_h|^r |u - u*\rho_h|^{q-r}\, dx,$$

e di usare la disuguaglianza di Hölder con un certo esponente $t > 1$, scegliendo r e t in modo che si abbia $rt = p^*$ e $(q-r)t' = 1$. Il giochetto riesce a patto di scegliere

$$t = \frac{p^*-1}{q-1}, \quad r = p^*\frac{q-1}{p^*-1}.$$

Fatte queste scelte, la nostra espressione si maggiora con

$$\left(\int_\Omega |u - u*\rho_h|^{p^*}\, dx\right)^{1/t}\left(\int_\Omega |u - u*\rho_h|\, dx\right)^{1/t'}.$$

Il primo integrale si maggiora uniformemente grazie al teorema di immersione di Sobolev, mentre il secondo tende uniformemente a 0 grazie al conto fatto sopra nel caso $q = 1$.

Q.E.D.

Abbiamo visto in aula come, grazie al teorema di Rellich, si riesca a dimostrare la seguente versione della disuguaglianza di Poincaré: sia Ω un aperto connesso limitato e regolare, e data $u \in L^1(\Omega)$ denotiamo $u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\, dx$. Esiste una costante $C > 0$ (dipendente solo da p, n e Ω) tale che

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

(Se questa disuguaglianza fosse falsa, riusciremmo a trovare una successione $\{v_k\}$ di funzioni di Sobolev, tutte a media nulla e con norma L^p uguale a 1, tali che $\|\nabla u_k\|_{L^p} \to 0$. Grazie al teorema di Rellich, potremmo estrarre una sottosuccessione che converge in L^p a una certa funzione v. Si verifica che v ha media nulla ed appartiene allo spazio di Sobolev, con $\nabla v = 0$ quasi ovunque. Ne segue che v è costante su Ω, e dunque $v = 0$ perché la media è nulla. D'altra parte, v dovrebbe avere norma 1 in quanto limite di funzioni di norma 1: assurdo.)

Lezione del 14/12/2004 (2 ore): Un altro risultato che ci tornerà utile nella dimostrazione dei nostri risultati di regolarità, è una caratterizzazione delle funzioni di Sobolev tramite i loro rapporti incrementali. Come abbiamo già detto, una funzione di Sobolev in $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ha la proprietà di essere assolutamente continua su quasi ogni segmento. Ne segue che le derivate deboli sono quasi ovunque derivate parziali in senso classico (mentre in generale non è detto che ci sia la differenziabilità quasi ovunque). Un risultato un po' più preciso si può ottenere esaminando la convergenza in L^p dei rapporti incrementali.

Data una funzione misurabile $u : \Omega \to \mathbf{R}$, definiamo i suoi rapporti incrementali in direzione e_i nel solito modo:

$$\tau_{h,i}u(x) := \frac{1}{h}(u(x + he_i) - u(x)).$$

Questi oggetti sono ben definiti in $\Omega_{|h|} = \{x \in \Omega : \ dist(x, \partial\Omega) > |h|\}$. Ora, data una funzione $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, si può dire che la sua appartenenza allo spazio di Sobolev $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ è (sostanzialmente) equivalente all'equilimitatezza locale dei suoi rapporti incrementali in norma L^p:

TEOREMA: Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbf{R}^n$ e $1 \leq p < +\infty$. Allora se $\Omega' \subset\subset \Omega$, esistono $h_0 > 0$, $C > 0$ tali che

$$\|\tau_{h,i}u\|_{L^p(\Omega')} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall |h| < h_0, \ i = 1, \dots, n.$$

Viceversa, sia $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, con $1 < p < +\infty$ (il caso $p = 1$ è esplicitamente escluso!). Supponiamo che per ogni aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$ esistano $C > 0$, $h_0 > 0$ tali che $\|\tau_{h,i}u\|_{L^p(\Omega')} \leq C$ per ogni $|h| < h_0$, $i = 1, \dots, n$. Allora $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, e inoltre si ha $\tau_{h,i}u \to D_iu$ in $L^p(U)$ per ogni $U \subset\subset \Omega$.

DIM.: Cominciamo con la prima parte del teorema. Lo dimostreremo quando Ω' è un cubo contenuto in Ω, con lati paralleli agli assi coordinati: la disuguaglianza per un sottoaperto qualunque seguirà poi ricoprendolo con un numero finito di cubi siffatti. Abbiamo dunque $\Omega' = Q$ (Q cubo). Supponiamo per fissare le idee che sia $i = n$, scriviamo $Q = Q' \times [a, b]$ e denotiamo $\mathbf{R}^n \ni x = (x', x_n)$. Per quasi ogni x, h si ha allora $\tau_{h,n}u(x) = \frac{1}{h}\int_0^h D_nu(x + te_n)\, dt$, da cui

$$\begin{aligned}
\|\tau_{h,n}u\|^p_{L^p(Q)} &= \int\limits_Q dx \left|\frac{1}{h}\int_0^h D_nu(x + te_n)\, dt\right|^p \leq \\
&\frac{1}{h}\int_0^h dt \int\limits_{Q'} dx' \int_a^b |D_n(x + te_n)|^p\, dx_n \leq \\
&\frac{1}{h}\int_0^h dt \int\limits_{Q'} dx' \int_{a-h_0}^{b+h_0} |D_n(x + te_n)|^p\, dx_n \leq \int_\Omega |D_nu|^p\, dx.
\end{aligned}$$

Abbiamo usato la disuguaglianza di Hölder e il teorema di Fubini, ed abbiamo scelto h_0 in modo che $x + h \in \Omega$ per ogni $x \in Q$ e per ogni $|h| < h_0$.

Dimostriamo ora la seconda parte del teorema: sia dunque $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, e scegliamo $\Omega' \subset\subset \Omega$. Per ipotesi, sappiamo che i rapporti incrementali $\tau_{h,i}u$ sono equilimitati in $L^p(\Omega')$. Grazie al fatto che $1 < p < +\infty$, possiamo estrarre una sottosuccessione $h_j \downarrow 0$ tale che $\tau_{h_j,i}u \rightharpoonup g_i$ debolmente in $L^p(\Omega')$. Dico che g_i non è altro che la derivata debole di u in Ω'. Sia infatti $\phi \in C^1_c(\Omega')$: avremo

$$\int_{\Omega'} g_i\phi\, dx = \lim_{j\to+\infty} \int_{\Omega'} \tau_{h_j}u\phi\, dx = -\lim_{j\to+\infty} \int_{\Omega'} u\tau_{-h_j,i}\phi\, dx = -\int_{\Omega'} uD_i\phi\, dx.$$

La prima uguaglianza viene dalla convergenza debole, la seconda da una specie di formula di integrazione per parti con i rapporti incrementali al posto della derivata (essa è di dimostrazione assolutamente banale!), mentre la terza deriva dal fatto che i rapporti incrementali della funzione regolare ϕ convergono uniformemente alle sue derivate parziali.

A questo punto sappiamo che $u \in W^{1,p}(\Omega')$.

Resta da far vedere che $\tau_{h,i}u \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ in $L^p(\Omega')$, qualunque sia $\Omega' \subset\subset \Omega$. Per quasi ogni x possiamo scrivere $\tau_{h,i}u(x) = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + te_i)\, dt$, da cui

$$\|\tau_{h,i}u - \frac{\partial u}{\partial x_i}\|^p_{L^p(\Omega')} = \int_{\Omega'} |\frac{1}{h}\int_0^h [\frac{\partial u}{\partial x_i}(x + te_i) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)]|^p\, dx \leq$$
$$\frac{1}{h}\int_0^h dt \int_{\Omega'} |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x + te_i) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|^p\, dx,$$

dove nell'ultimo passiaggio si è usata la disuguaglianza di Hölder ed il teorema di Fubini. Grazie alla continuità delle traslazioni in L^p, è chiaro che l'ultima espressione tende a 0. Q.E.D.

Introduciamo un ultimo, importantissimo ingrediente per il nostro risultato di regolarità: la disuguaglianza di Caccioppoli.

Torniamo alla nostra equazione ellittica in forma di divergenza: per motivi che saranno chiari in seguito, consideriamo un'equazione leggermente più generale di quella che avevamo visto all'inizio del corso. Precisamente, supponiamo che $u \in W^{1,2}(\Omega)$ soddisfi

$$(*) \int_\Omega [a_{ij}(x)D_iuD_j\phi + f\phi + f_iD_i\phi]\, dx = 0 \qquad \forall\phi \in W^{1,2}_0(\Omega),$$

dove abbiamo adottato la convenzione di somma sugli indici ripetuti ed i coefficienti soddisfano le seguenti ipotesi: $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$, vale la condizione di ellitticità

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n,\ x \in \Omega,$$

e infine $f, f_i \in L^2(\Omega)$. Esattamente come nel caso visto, è facilissimo dimostrare che esiste una soluzione debole $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ di questa equazione.

PROPOSIZIONE (Disuguaglianza di Caccioppoli): Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una funzione che soddisfa (*), e siano poi $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset \Omega$. Allora esiste una costante $C > 0$, dipendente dai coefficienti dell'equazione e da r ma non dalla soluzione u, tale che

$$\int_{B_{r/2}(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \leq C \int_{B_r(x_0)} [|f|^2 + |f_i|^2 + |u|^2]\, dx.$$

Osserviamo che nel caso $f, f_i \equiv 0$, la disuguaglianza di Caccioppoli assume l'aspetto di una specie di "disuguaglianza di Poincaré alla rovescia con supporto crescente". Vedremo la dimostrazione la prossima volta.

Lezione del 16/12/2004 (2 ore): Dimostriamo la disuguaglianza di Caccioppoli per l'equazione ellittica (*) (vedi lezione precedente). Sia $\eta > 0$ una funzione regolare, compresa tra 0 e 1, supportata nella palla $B_r(x_0)$ ed identicamente uguale a 1 nella palla di raggio metà $B_{r/2}(x_0)$. Poniamo, nell'equazione (*), $\phi = \eta^2 u$. Con semplici conti e usando la condizione di ellitticità si trova subito

$$(**) \qquad \nu \int_{B_r} \eta^2 |\nabla u|^2\, dx$$
$$\leq -\int_{B_r} [2\eta u a_{ij} D_i u D_j \eta + f\eta^2 u + f_i \eta^2 D_i u + 2\eta u f_i D_i \eta]\, dx.$$

I vari termini nel membro di destra in (**) si stimano usando la semplice disuguaglianza tra numeri reali $2ab < \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$, valida per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$. Per esempio, ricordando la limitatezza dei coefficienti a_{ij} e delle derivate di η il primo addendo diventa:

$$-\int_{Br} 2\eta u a_{ij} D_i u D_j \eta\, dx \leq \varepsilon \int_{B_r} \eta^2 |\nabla u|^2 + \frac{C}{\varepsilon} \int_{B_r} |u|^2\, dx.$$

Stimando tutti gli addendi in modo analogo, si otterranno i termini nel membro di destra della disuguaglianza di Caccioppoli, nonché un certo numero di termini del tipo $\varepsilon \int_{B_r} \eta^2 |\nabla u|^2\, dx$. Questi ultimi possono essere spostati al primo membro della disuguaglianza (**), e a patto di scegliere ε sufficientemente piccolo la costante davanti all'integrale rimarrà positiva. Ricordando che η è identicamente uguale a 1 nella palla di raggio metà, otteniamo la disuguaglianza voluta. Q.E.D.

Siamo ora in grado di enunciare un primo risultato di *regolarità all'interno* per le soluzioni dell'equazione $(*)$.

TEOREMA (Regolarità all'interno): Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole dell'equazione (*). Supponiamo che i coefficienti a_{ij} dell'equazione siano lipschitziani, e che si abbia $f, f_i \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$. Allora $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$.

Questo teorema consente di dire che u soddisfa quasi ovunque l'equazione originale (è una soluzione forte e non solo debole)! Basta infatti integrare per parti la forma debole dell'equazione.

Le ipotesi fatte non sono ottimali: basterebbe infatti avere $f \in L^2_{loc}$, abbiamo messo un'ipotesi un po' più forte per semplificare leggermente la dimostrazione.

DIM.: L'idea della dimostrazione è relativamente semplice: si dimostra che i rapporti incrementali $\tau_{h,i}u$, in un opportuno sottoaperto di Ω, sono soluzioni deboli di un'equazione ellittica strettamente imparentata con la (*). Possiamo allora applicare la stima di Caccioppoli a questa nuova equazione, e scopriamo che *le derivate di $\tau_{h,i}u$ sono equilimitate in L^2*. Le derivate dei rapporti incrementali non sono altro che i rapporti incrementali delle derivate: il risultato dimostrato la volta scorsa ci dice allora che le derivate di u sono in $W^{1,2}_{loc}$, cioè $u \in W^{2,2}_{loc}$.

Vediamo i dettagli! Se $\Omega' \subset\subset \Omega$ e h è sufficientemente piccolo, varrà evidentemente l'equazione "traslata"

$$\int_{\Omega'} [a_{ij}(x+he_s)D_iu(x+he_s)D_j\phi(x)+f(x+he_s)\phi(x)+f_i(x+he_s)\phi(x)]\, dx = 0$$

per ogni $\phi \in C^1_c(\Omega')$. Sottraendo a questa equazione la (*) e dividendo per h si ottiene facilmente

$$(**) \qquad 0 = \int_{\Omega'} [a_{ij}(x)D_i(\tau_{h,s}u(x))D_j\phi(x) + \tau_{h,s}a_{ij}(x)D_iu(x+he_s)D_j\phi(x) + \\ + \tau_{h,s}f(x)\phi(x) + \tau_{h,s}f_i(x)\phi(x)]\, dx$$

In altre parole, la funzione $v := \tau_{h,s}u$ è soluzione debole in Ω' dell'equazione ellittica

$$\int_{\Omega'} [a_{ij}D_ivD_j\phi + g\phi + g_iD_i\phi]\, dx = 0,$$

con $g := \tau_{h,s}f$, $g_i(x) := \tau_{h,s}a_{ij}(x)D_ju(x+he_s) + \tau_{h,s}f_i(x)$. Grazie al teorema sui rapporti incrementali, le norme L^2 delle funzioni g, g_i, $\tau_{h,s}u$ sono controllate da una costante indipendente da h. La disuguaglianza di Caccioppoli ci dice allora che per ogni palla $B_r(x_0) \subset \Omega'$ avremo

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla \tau_{h,s}u|^2 \, dx \leq C,$$

da cui, grazie al teorema sui rapporti incrementali, $\nabla u \in W^{1,2}_{loc}$. In conclusione, $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$. Q.E.D.

La dimostrazione appena fatta ha una conseguenza interessante, che suggerisce anche come dimostrare un risultato di maggior regolarità di u quando le funzioni a_{ij}, f, f_i sono più regolari.

Grazie al teorema sui rapporti incrementali possiamo passare al limite per $h \to 0$ nell'equazione (**). Otteniamo così che la funzione $\tilde{v} := D_su$ soddisfa l'equazione ellittica

$$(***) \int_{\Omega'} [a_{ij}D_i\tilde{v}D_j\phi + \tilde{g}\phi + \tilde{g}_iD_i\phi] \, dx = 0 \qquad \forall \phi \in C^1_c(\Omega'),$$

con $\tilde{g} := D_sf$, $\tilde{g}_i(x) := D_sa_{ij}D_ju + D_sf_i$. Questa semplice osservazione consente di dimostrare il seguente

TEOREMA (Maggior regolarità): Supponiamo che si abbia $a_{ij} \in C^\infty(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$, $f_i \in W^{k,2}_{loc}(\Omega)$. Allora $u \in W^{k+1,2}(\Omega)$. In particolare, se $f_i \in C^\infty(\Omega)$ sarà anche $u \in C^\infty(\Omega)$.

DIM.: Dimostriamo il teorema per induzione su k. Per $k = 1$ il risultato è un caso particolare di quello dimostrato in precedenza.

Supponiamo che il risultato sia vero per $k-1$ e dimostriamolo per k. Grazie all'ipotesi induttiva, sappiamo che $u \in W^{k,2}_{loc}(\Omega)$.

D'altra parte, abbiamo visto sopra che la funzione $\tilde{v} := D_su$ soddisfa l'equazione (***), per la quale sappiamo che $\tilde{g} \in C^\infty$, mentre $\tilde{g}_i \in W^{k-1,2}_{loc}(\Omega)$ grazie alla regolarità di u che abbiamo appena dedotto. Possiamo allora applicare l'ipotesi induttiva all'equazione (***), scoprendo che $\tilde{v} \in W^{k,1}_{loc}(\Omega)$, da cui $u \in W^{k+1,2}_{loc}(\Omega)$. Q.E.D.

Rimarrebbe da dimostrare la regolarità al bordo delle soluzioni deboli del nostro problema differenziale. Per motivi di tempo, non ci è stato possibile farlo a lezione....Il lettore interessato troverà comunque di seguito qualche cenno sulla dimostrazione:

Sia $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$ l'unica soluzione debole "nulla al bordo" dell'equazione (*). Sappiamo già che $u \in C^\infty(\Omega)$, ma ci rimane da dimostrare che la funzione è C^∞ *fin sul bordo* (cioè le derivate sono prolungabili per continuità a $\partial\Omega$), e che u si annulla su $\partial\Omega$.

Supponiamo pure che i dati dell'equazione a_{ij}, f, f_i siano regolari in $\overline{\Omega}$, e anche che Ω sia un aperto limitato di classe C^∞. Evidentemente, ci basta far vedere che dato $x_0 \in \partial\Omega$, esiste una palletta centrata in x_0 tale che u è regolare in $B_r(x_0) \cap \Omega$. Ora, esiste un diffeomorfismo Ψ tra un opportuno intorno Udi x_0 e la palla $B_r(0)$, tale che $\Psi(U \cap \Omega) = B_r^+(0) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < r, \ x_n > 0\}$ e $U \cap \partial\Omega$ viene mandato nel piano equatoriale $S_r = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < r, \ x_n = 0\}$.

La nostra soluzione u dell'equazione differenziale può essere letta localmente attraverso la carta Ψ: essa diventa una funzione definita su B_r^+, che indicheremo ancora con u e che soddisfa un'equazione ellittca dello stesso tipo di (*) (questo è un semplice esercizio lasciato al lettore volenteroso!). Non dimentichiamoci che u era una soluzione "nulla al bordo",per cui la sua espressione in carte locali sarà "moralmente" nulla su S_r. Precisiamo questo concetto: diremo che u è nulla (in senso debole) su S_r se $\eta u \in W_0^{1,2}(B_r^+)$ per ogni funzione $\eta \in C_c^\infty(B_r)$: è sufficiente mandare a zero la u (tramite un'opportuna funzione C^∞) *sulla sola parte curva* del bordo di B_r^+, per avere che essa appartiene a $W_0^{1,2}$.

Se ripercorriamo la dimostrazione della regolarità di u in $W^{2,2}_{loc}$, vediamo che quasi tutto si può ripetere nel nostro caso, a patto di fare i rapporti incrementali solo nelle direzioni $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$, e non nella direzione e_n che ci farebbe uscire dalla semipalla. Ne ricaviamo allora che u possiede derivate seconde deboli $D_{ij}u \in L^2(B_{r/2})$ non appena $(i,j) \neq (n,n)$.

In realtà, anche $D_{nn}u \in L^2(B_{r/2})$: per dimostrarlo riscriviamo l'equazione isolando il termine $a_{nn}D_nuD_n\phi$ e integrando per parti. Otteniamo:

$$\int_{B^+_{r/2}} a_{nn}D_nuD_n\phi \, dx = \int_{B^+_{r/2}} [\sum_{(i,j)\neq(n,n)} D_j(a_{ij}D_iu) - f + D_if_i]\phi \, dx.$$

L'espressione tra parentesi quadre appartiene a L^2: essa è dunque la derivata debole di $a_{nn}D_nu$, che quindi appartiene a $W^{1,2}(B^+_{r/2})$. Poichè a_{nn} è regolare e si mantiene lontano da 0, ne deriva che $D_nu \in W^{1,2}$, come volevasi.

Abbiamo dimostrato la seguente

PROPOSIZIONE: Se u è una soluzione debole di (*) nella semipalla B_r^+, nulla su S_r, allora $u \in W^{2,2}(B^+_{r/2})$.

L'iterazione di questo risultato per ottenere una maggiore regolarità è un po' più complicata che per la regolarità all'interno. Il problema è che la tecnica precedente richiede che u "si annulli su S_r" (in senso debole), per cui non è immediatamente applicabile alle equazioni differenziali soddisfatte dalle *derivate* di u... Notiamo però che se $u \in W^{k,2}(B_r^+)$ è nulla su S_r, allora la funzione $D_\alpha u$ (con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un qualunque multiindice, $|\alpha| < k$) è ancora una funzione di Sobolev nulla su S_r nel caso in cui $\alpha_n = 0$ (non stiamo derivando in direzione x_n). Per le derivate di u di questo tipo, possiamo dunque impunemente iterare quanto visto in precedenza. Le derivate in direzione x_n si sistemano ragionando in modo simile a quello usato per dimostrare che $D_{nn}u \in L^2(B_r^+)$ (si usa opportunamente l'equazione...).

Lezione del 21/12/2004 (1 ora): In questa lezione cominceremo ad occuparci di equazioni paraboliche: vogliamo arrivare ad una nozione di soluzione debole per equazioni in forma di divergenza, e se possibile abbozzare una strategia per dimostrarne l'esistenza.

Il problema differenziale cui siamo interessati è il seguente:

$$(PP) \quad \begin{cases} u_t(t,x) - D_i(a_{ij}(t,x)D_ju(t,x)) = f(t,x) & in\ \Omega_T, \\ u(0,x) = g(x) & in\ \Omega, \\ u(t,0) = 0 & in\ (0,T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

dove Ω è un aperto di $\mathbf{R}^n$ e $\Omega_T = (0,T] \times \Omega$, mentre i dati del problema a_{ij}, f, g sono funzioni abbastanza regolari e i coefficienti $a_{ij}(t,x)$ sono simmetrici e rendono l'equazione *uniformemente strettamente parabolica*, cioè $a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j > \nu|\xi|^2$ per ogni $(t,x) \in \Omega_T$ e per ogni $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Un'idea che si rivela particolarmente efficace nello studio di questa equazione è quella di vedere la funzione di $(n+1)$ variabili $u(t,x)$ come *una* *funzione di una variabile, $t \mapsto u(t,\cdot)$, a valori in uno spazio di Banach di funzioni delle variabili spaziali x.* In questo modo, la nostra equazione alle derivate parziali diventa un'equazione ordinaria con incognita vettoriale (a valori in uno spazio di Banach)... e ci sono buone speranze che questo ci aiuti nella ricerca della soluzione!

In analogia con quanto abbiamo visto per le equazioni ellittiche e tenuto conto della condizione al bordo, una scelta naturale per il nostro spazio di Banach sembra essere $W_0^{1,2}(\Omega)$:

$$\begin{array}{rccc} u: & [0,T] & \rightarrow & W_0^{1,2}(\Omega) \\ & t & \mapsto & u(t,\cdot). \end{array}$$

Vedremo poi qual è la regolarità naturale da richiedere per questa funzione.

Comunque, per ogni t fissato l'equazione ci dice che $u_t(t, cdot) = D_i(a_{ij}D_ju)+f$, e l'espressione nel membro di destra contiene le derivate seconde di una funzione $W^{1,2}$...Queste possono essere viste in modo naturale come appartenenti allo spazio $W^{-1,2}(\Omega)$, lo spazio duale di $W_0^{1,2}(\Omega)$:

DEFINIZIONE: Denotiamo con $W^{-1,2}(\Omega)$ lo spazio dei funzionali lineari e continui su $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Poiché $W_0^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, possiamo usare il teorema di rappresentazione di Riesz e rappresentare in modo unico gli elementi di $W^{-1,2}(\Omega)$ tramite il prodotto scalare. Per varie ragioni, però, è utile avere un'altra caratterizzazione di questo spazio duale:

PROPOSIZIONE: Per ogni $F \in W^{-1,2}(\Omega)$ è possibile trovare $(n+1)$ funzioni $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$ tali che

$$(*) < F, \phi >= \int_\Omega [f_0\phi + f_iD_i\phi]\, dx \qquad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Inoltre

$$\|F\|_{W^{-1,2}(\Omega)} = \inf \left(\sum_{i=0}^n \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2},$$

dove l'inf viene fatto su tutte le $(n+1)$-uple di funzioni $f_0, \dots, f_n$ che soddisfano (*). Infine, se vale (*) usiamo la "naturale" notazione $F = f_0 - D_if_i$.

DIM.: Sia $F \in W^{-1,2}(\Omega)$. Il teorema di rappresentazione di Riesz mi garantisce che esiste un'unica funzione $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che $< F, \phi >= (u, \phi)_{W^{1,2}}$ per ogni $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Basta allora porre $f_0 = u$, $f_i = D_iu$ per $i = 1, \dots, n$ per avere la (*). Inoltre, lo stesso teorema ci garantisce che $\|F\|_{W^{-1,2}} = \|u\|_{W^{1,2}}$.

Se poi $f_0, f_1, \dots, f_n$ è una *qualunque* $(n+1)$-upla di funzioni L^2 che soddisfano (*), ponendo $\phi = u$ in questa identità ed usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz si ricava subito che $\|u\|_{W^{1,2}} \leq \left(\sum_{i=0}^{n} \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$. Q.E.D.

Alla luce di questa definizione, risulta piuttosto naturale aspettarsi che una soluzione debole del nostro problema sia una funzione di una variabile a valori in $W_0^{1,2}(\Omega)$ che possieda una derivata debole rispetto a t (in un senso opportuno) che sia una funzione a valori nello spazio duale $W^{-1,2}(\Omega)$.

È importante fare qualche precisazione riguardo allo spazio $W^{-1,2}(\Omega)$. Di fatto, l'identificazione di $W_0^{1,2}$ con $W^{-1,2}$ data dal prodotto scalare nello spazio di Sobolev, è certamente possibile ma spesso non è conveniente.

Conviene piuttosto considerare la seguente catena di inclusioni:

$$W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega),$$

nella quale si identifica $W_0^{1,2}(\Omega)$ con un sottinsieme di $L^2(\Omega)$ (e evidentemente l'inclusione è continua e densa), e si identifica L^2 con un sottospazio denso di $W^{-1,2}$, facendo corrispondere ad ogni $f \in L^2(\Omega)$ il funzionale $F \in W^{-1,2}$ dato da

$$< F, \phi >= \int_\Omega f\phi \, dx.$$

Conseguenza di questa coppia di identificazioni è che *nella quasi totalità dei casi*, quando si vuole far corrispondere ad un elemento $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ un funzionale $F \in W^{-1,2}(\Omega)$, tale identificazione è fatta usando il prodotto scalare in L^2 e non quello in $W^{1,2}$.

Lezione del 23/12/2004 (2 ore):

Per dare finalmente una definizione di soluzione debole per il problema parabolico (PP), dobbiamo prima definire un appropriato concetto di derivata debole per funzioni di una variabile a valori in uno spazio di Banach. Diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE: Sia X uno spazio di Banach separabile. Diremo che $u \in W^{1,2}(0,T;X)$ se $u \in L^2(0,T;X)$ ed esiste una funzione $v \in L^2(0,T;X)$ tale che

$$\int_0^T u(t)\psi'(t)\, dt = -\int_0^T v(t)\psi(t)\, dt \qquad \forall \psi \in C_c^1(0,T).$$

In modo analogo definiremo una funzione $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)$ con derivata debole $v \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega)$ (e naturalmente porremo $v = u'$). L'unica cosa che è importante precisare è che un elemento di $W_0^{1,2}(\Omega)$ viene identificato con un elemento di $W^{-1,2}(\Omega)$ tramite il prodotto scalare in L^2: in sostanza, dovrà essere soddisfatta la relazione

$$\left(\int_0^T u(t,\cdot)\psi'(t),\phi\right)_{L^2(\Omega)} = -< \int_0^T v(t,\cdot)\psi(t)\ dt, \phi >$$

per ogni $\psi \in C^1_C(0,T)$ e per ogni $\phi \in W^{1,2}_0(\Omega)$. Con $< \cdot, \cdot >$ vogliamo indicare la dualità tra $W^{-1,2}$ e $W^{1,2}_0$.

OSSERVAZIONE (Integrazione alla Bochner di funzioni vettoriali: Nelle due definizioni precedenti c'è qualcosa che può legittimamente preoccuparci un po': stiamo facendo integrali di funzioni (di una variabile) a valori in uno spazio di Banach! Se le funzioni sono continue, l'integrale si può definire alla Cauchy, e si vede facilmente che vale anche il teorema fondamentale del calcolo integrale. Per funzioni più generali, esistono varie versioni della teoria dell'integrazione per funzioni a valori vettoriali (integrali di Bochner, Dunford, Pettis...). Supponiamo per semplificare la trattazione che X sia riflessivo e separabile: in questo caso tutte le teorie citate sopra vengono a coincidere e possiamo dare le definizioni seguenti.

Una funzione $u : [a,b] \to X$ si dice *misurabile* se per ogni $F \in X'$ le funzioni reali $t \mapsto < F, u(t) >$ sono misurabili secondo Lebesgue. In tal caso, una conseguenza non difficile del teorema di Hahn-Banach assicura che anche la funzione $t \mapsto \|u(t)\|_X$ è misurabile. Diremo che u è *sommabile* se quest'ultima funzione ha integrale finito (e in maniera facilmente intuibile potremo definire gli spazi $L^p(a,b;X)$, che saranno spazi di Banach con le ovvie norme...).

Per le funzioni sommabili è facile definire l'integrale: il simbolo $\int_a^b u(t)\ dt$ denota l'*unico* elemento di X tale che

$$\left\langle F, \int_a^b u(t)\ dt \right\rangle = \int_a^b < F, u(t) >\ dt.$$

Infatti, la mappa $F \mapsto \int_a^b < F, u(t) >\ dt$ è un funzionale lineare e continuo su X', cioè è un elemento di X''...

Si vede senza troppa difficoltà che questo integrale si comporta come ci si aspetta sulle funzioni semplici e sulle funzioni continue, e si ha anche un risultato di approssimazione di ogni funzione sommabile con funzioni semplici: questa teoria dell'integrazione si riduce insomma a qualcosa di molto familiare! È anche vero che le funzioni continue sono dense in $L^1(0,T;X)$, e la regolarizzazione per convoluzione funziona perfettamente, esattamente come nel caso scalare!

Con tutte queste belle definizioni, siamo in grado di definire le soluzioni deboli del nostro problema parabolico (PP) iniziale:

DEFINIZIONE: Supponiamo che i coefficienti $a_{i,j}(t,x)$ siano in $L^\infty(\Omega_T)$ e uniformemente parabolici, e che si abbia $f \in L^2(\Omega_T)$, $g \in L^2(\Omega)$. Una funzione $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ è una soluzione debole di (PP) se $u' \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$, per quasi ogni $t \in [0,T]$ vale l'equazione

$$< u'(t,\cdot),\phi > + \int_\Omega a_{ij} D_i u(t,x) D_j \phi(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx \qquad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

e infine $u(0,x) = g(x)$ per quasi ogni $x \in \Omega$.

La condizione iniziale appare un po' dubbia, visto che la nostra funzione vettoriale ha a priori solo una regolarità L^2 nel tempo: fortunatamente, possiamo far vedere che una funzione $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ con $u' \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$ appartiene allo spazio $C^0(0,T;L^2(\Omega))$...per cui la condizione iniziale è perfettamente sensata!

PROPOSIZIONE: Sia $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ con $u' \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$. Allora $u \in C^0(0,T;L^2(\Omega))$. Inoltre la funzione $t \mapsto \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ è assolutamente continua e si ha

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2 < u'(t), u(t) > .$$

DIM.: La proposizione si dimostra abbastanza facilmente regolarizzando per convoluzione. Cominciamo con l'estendere la nostra funzione ad un intervallo leggermente più grande (per esempio per riflessione). Siano $u_h := u * \rho_h$ le regolarizzate per convoluzione. Si verifica abbastanza facilmente che rimane vero quel che succedeva per le funzioni scalari: le regolarizzate sono regolari e $u_h' = u' * \rho_h$. Inoltre, $u_h \to u$ quasi ovunque e nello spazio $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$, mentre $u_h' \to u'$ in $L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$.

A questo punto, dimostriamo che le regolarizzate formano una successione di Cauchy nello spazio $C^0(0,T;L^2(\Omega))$. Si ha infatti

$$\frac{d}{dt}\|u_h(t) - u_k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2(u_h'(t) - u_k'(t), u_h(t) - u_k(t))_{L^2(\Omega)},$$

da cui

$$\begin{aligned}
&\|u_h(t) - u_k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \\
&\|u_h(s) - u_k(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_s^t < u_h'(\tau) - u_k'(\tau), u_h(\tau) - u_k(\tau) > \, d\tau \leq \\
&\|u_h(s) - u_k(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_h' - u_k'\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} + \|u_h - u_k\|_{L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Se ora fissiamo s in modo che $u_h(s) \to u_s$ in $L^2(\Omega)$, la stima precedente (che è uniforme in t) ci dice che u_h è di Cauchy in $C^0(0,T;L^2(\Omega))$, e quindi converge a una qualche funzione nello stesso spazio. Tale funzione è proprio u, visto che c'è convergenza puntuale... Le ultime due affermazioni del lemma si dimostrano in modo analogo (sono banalmente vere per le regolarizzate per convoluzione...). Q.E.D.

Ritorniamo alla nostro problema parabolico ed alla sua formulazione debole. Vogliamo fare un'operazione un po' strana, che però si rivela spesso molto utile quando si ha a che fare con le equazioni alle derivate parziali: supponiamo *a priori* che esista una soluzione debole del problema, e proviamo ad ottenere delle stime su questa soluzione. Le stime così ottenute si chiamano (non sorprendentemente!) *stime a priori*, ed hanno un duplice effetto benefico: da un lato, ci convincono che la nostra scelta degli spazi nella definizione di soluzioni deboli è sensata (sono proprio gli spazi che rendono vere le stime), d'altra parte ci consentiranno di dimostrare l'*esistenza di soluzioni deboli* (una specie di miracolo!).

TEOREMA (Stime a priori per il problema parabolico (PP)): Sia u una soluzione debole del problema parabolico (PP). Allora esiste una costante $C > 0$ (indipendente da u, f e g) tale che

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C^0(0,T;L^2(\Omega))} \leq & \quad C(\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega_T)}), \\
\|u\|_{L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))} \leq & \quad C(\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega_T)}), \\
\|u'\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} \leq & \quad C(\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega_T)}).
\end{aligned}$$

Vedremo la dimostrazione all'inizio del 2005!

Lezione dell'11/1/2005 (1 ora):

Dimostriamo le stime a priori per l'equazione parabolica, enunciate nell'ultima lezione prima di Natale....

Per quasi ogni t è possibile scegliere come funzione test nell'equazione proprio $\phi = u(t, \cdot)$: si ottiene

$$< u_t(t, \cdot), u(t, \cdot) > + \int_\Omega (a_{ij} D_i u D_j u - fu)\, dx = 0,$$

da cui usando l'ultima Proposizione, l'uniforme stretta parabolicità e la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz in L^2:

$$0 \geq \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}\right) + \nu\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} - \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grazie alla disuguaglianza di Poincaré ne ricaviamo la stima:

$$(A)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\right)+C\|u(t,\cdot)\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le \frac{1}{2}\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Poniamo $\eta(t) = \|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\xi(t) = \|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}$: la stima (A) si riduce alla seguente disuguaglianza differenziale per la funzione assolutamente continua η:

$$\eta'(t) \le C_1\eta(t) + C_2\xi(t),$$

da cui (moltiplicando ambo i membri della disuguaglianza per e^{-C_1t})) si ottiene $(e^{-C_1t}\eta(t))' \le C_2e^{-C_1t}\xi(t) \le C_2\xi(t)$ e integrando

$$\eta(t) \le e^{C_1t}(\eta(0) + C_2\int_0^t \xi(s)\, ds).$$

Ritraducendo, questa implica la prima stima della tesi:

$$\max_{[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \le C(\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega_T)}.$$

La seconda stima nell'enunciato si ottiene integrando la (A) tra 0 e T ed utilizzando la prima stima.

Per ottenere l'ultima stima, prendiamo una funzione test $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ con $\|\phi\| \le 1$. Usando l'equazione in forma debole si ottiene subito

$$< u_t(t,\cdot), \phi >\le C(\|f(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(t,\cdot)\|_{W^{1,2}(\Omega)}),$$

da cui

$$\|u_t(t,\cdot)\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \le C(\|f(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(t,\cdot)\|_{W^{1,2}(\Omega)}).$$

Integrando questa disuguaglianza tra 0 e T ed utilizzando la seconda stima, si ottiene l'ultima parte dell'enunciato. Q.E.D.

Sorprendentemente, le stime a priori appena ottenute possono essere accoppiate con un'astuta discretizzazione del nostro problema per ottenere l'esistenza di soluzioni deboli del nostro problema parabolico.

Lezione del 13/1/2005 (2 ore): Ricordiamo che, per definizione, una soluzione debole è una funzione di una variabile a valori in uno *spazio a dimensione infinita* (precisamente $W_0^{1,2}(\Omega)$, con derivata temporale a valori in $W^{-1,2}(\Omega)$).

La nostra strategia di soluzione è nota come *metodo di Galerkin*: scegliamo una successione crescente X_h di *sottospazi di dimensione finita* di

$W^{1,2}_0(\Omega)$, e per ciascuno di questi cerchiamo la soluzione di una sorta di problema parabolico "proiettato", ambientato in $L^2(0,T;X_h)$. Il problema parabolico proiettato si riduce ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari, ed abbiamo quindi ottimi risultati di esistenza e unicità.

A questo punto, osserviamo che le stime a priori ottenute sopra si applicano anche ai problemi proiettati: questo ci permetterà di passare al limite per $h \to +\infty$ e di ottenere una soluzione debole del problema parabolico originale.

Vediamo i dettagli! Cominciamo con la scelta di una successione di funzioni regolari $\{w_k\} \subset C^\infty(\Omega)$, nulle al bordo, in modo che $\{w_k\}$ sia una base di Hilbert (cioè un sistema ortonormale massimale) di $L^2(\Omega)$.

A questo punto, per ogni $m \in \mathbf{N}$, cerchiamo una "soluzione debole approssimata" $u_m : [0,T] \to W^{1,2}_0(\Omega)$ del nostro problema parabolico, che sia a valori in $X_m = \mathrm{span}(w_1, \ldots, w_m)$, soddisfi l'equazione debole *per ogni funzione test in* X_m e per la quale valga la condizione iniziale g_m ottenuta proiettando g su X_m. In altre parole, cerchiamo una funzione del tipo

$$u_m(t,x) = \sum_{k=1}^{m} d^m_k(t) w_k(x)$$

tale che

$$(*_m) \quad \int_\Omega [u'_m(t,x)w_k(x)\ dx + a_{ij}(t,x)D_i u_m(t,x)D_j w_k(x) - f(t,x)w_k(x)]\ dx = 0$$

per $k = 1, 2, \ldots, m$, e che soddisfi la naturale condizione iniziale "proiettata" data da $d^m_k(0) = (g, w_k)_{L^2(\Omega)}$ per $k = 1, 2, \ldots, m$.

È immediato verificare che esiste un'unica funzione di questo tipo, e che i coefficienti $d^m_k(t)$ sono funzioni assolutamente continue. Infatti, se poniamo

$$e_{kl}(t) := \int_\Omega a_{ij}(t,x)D_i w_k(x)D_j w_l(x)\ dx, \quad f_k(t) := \int_\Omega f(t,x)w_k(x)\ dx$$

e teniamo conto dell'ortonormalità delle w_k in L^2, l'equazione $(*_m)$ si riduce al seguente sistema di equazioni ordinarie nelle incognite $d^m_1(t), \ldots, d^m_m(t)$:

$$d^{m\prime}_k(t) + \sum_{l=1}^{m} e_{kl}(t)d^m_l(t) = f_k(t), \quad k = 1, \ldots, m.$$

La teoria "alla Caratheodory" delle equazioni ordinarie ci assicura che esiste un'unica m-upla di funzioni AC che soddisfano la condizione inizale ed il sistema (quest'ultimo per quasi ogni $t \in [0,T]$).

Le soluzioni approssimate u_m soddisfano stime dell'energia del tutto simili a quelle valide per una soluzione debole u: infatti, per ottenere la stima della norma di u_m in $C^0(0,T;L^2(\Omega))$ e in $L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ possiamo scegliere come funzione test proprio u_m, che è a valori nello spazio "giusto" X_m. Si ricava che le due norme suddette sono controllate da $C(\|g\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{L^2(\Omega_T)})$.

In conclusione, visto che f,g sono fissate funzioni L^2 abbiamo che

$$\|u_m\|_{L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))} \leq C$$

Poiché stiamo lavorando dentro uno spazo di Banach riflessivo e separabile, questo ci dice che a meno di sottosuccessioni si ha

$$u_m \rightharpoonup u \quad \textit{debolmente in } L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)).$$

Dico che u è una soluzione debole dell'equazione parabolica.

Fissiamo infatti una funzione test $v \in C_0^1(0,T;X_N)$ con $v = \sum_{k=1}^{N} c_k(t)w_k$, e sia $m \geq N$. Usando l'equazione per u_m, moltiplicando per $c_k(t)$, sommando e integrando tra 0 e T si ottiene subito

$$(A) \quad \int_0^T \Big[< u_m', v > + \int_\Omega a_{ij}D_iu_mD_jv \; dx\Big]dt = \int_0^T (f,v)_{L^2(\Omega)} \; dt,$$

e integrando per parti rispetto al tempo

$$\int_0^T \Big[- < u_m, v' > + \int_\Omega a_{ij}D_iu_mD_jv \; dx\Big]dt = \int_0^T (f,v)_{L^2(\Omega)} \; dt,$$

Passando al limite debole abbiamo

$$\int_0^T \Big[- < u, v' > + \int_\Omega a_{ij}D_iuD_jv \; dx\Big]dt = \int_0^T (f,v)_{L^2(\Omega)} \; dt$$

per ogni v come sopra, per densità anche per ogni $v \in C_0^1(0,t;W_0^{1,2}(\Omega))$. Per definizione di derivata debole, questo implica che $u' \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$, e quindi otteniamo l'equazione

$$(B) \quad \int_0^T \Big[< u', v > + \int_\Omega a_{ij}D_iuD_jv \; dx\Big]dt = \int_0^T (f,v)_{L^2(\Omega)} \; dt,$$

ancora valida per ogni v regolare come sopra indicato, e quindi anche per ogni $v \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ (per densità). Ne segue che u soddisfa l'equazione debole per ogni $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e per quasi ogni $t \in (0,T)$.

Rimane da verificare che u soddisfa la condizione iniziale. Dalle equazioni soddisfatte da u e u_m otteniamo, per ogni fissato $v \in C^1(0,T;X_N)$ $N \leq m$ e con $v(T)=0$,

$$\int_0^T \Big[- < u_m, v' > + \int_\Omega a_{ij} D_i u_m D_j v \; dx \Big] dt = \int_0^T (f,v)_{L^2(\Omega)} \; dt + (u_m(0), v(0))_{L^2(\Omega)}$$

$$\int_0^T \Big[- < u, v' > + \int_\Omega a_{ij} D_i u D_j v \; dx \Big] dt = \int_0^T (f,v)_{L^2(\Omega)} \; dt + (u(0), v(0))_{L^2(\Omega)}$$

dove si è integrato per parti il primo termine rispetto a t.

Passando al limite per $m \to +\infty$ nella prima equazione otteniamo $(u(0),v(0))_{L^2(\Omega)} = (g, v(0))_{L^2(\Omega)}$, da cui $u(0)=g$ perché l'uguaglianza è valida al variare di v in un sottospazio denso di $L^2(\Omega)$.

Questo conclude la dimostrazione dell'esistenza di una soluzione debole. Mostriamo che essa è anche unica: basta far vedere che se $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ allora l'unica soluzione è $u \equiv 0$. Questo viene direttamente dalla stima dell'energia.

Abbiamo dimostrato il seguente

TEOREMA: Se i coefficienti $a_{ij} \in L^\infty(\Omega_T)$ sono simmetrici e uniformemente ellittici, $f \in L^2(\Omega_T)$, $g \in L^2(\Omega)$ allora esiste un'unica soluzione debole $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ con $u' \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$ del nostro problema parabolico.

Lezione del 18/1/2005 (1 ora):

Vediamo di applicare il metodo delle volte scorse alla dimostrazione dell'esistenza di soluzioni deboli del problema iperbolico

$$(P) \begin{cases} u_{tt} - \sum_{ij} D_i(a_{ij}(t,x) D_j u) = f(t,x) & in \; \Omega_T \\ u(t,x) = 0 & in \; (0,T] \times \partial\Omega \\ u(0,x) = g & in \; \Omega \\ u_t(0,x) = h & in \; \Omega \end{cases}$$

dove i coefficienti a_{ij} sono simmetrici e uniformemente ellittici. Questo problema è una naturale generalizzazione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde!

Analogamente a quanto abbiamo fatto nel caso parabolico, definiamo le soluzioni deboli di (P) nel modo seguente:

DEFINIZIONE: Supponiamo che i coefficienti $a_{ij}(t,x) \in C^1(\overline{\Omega}_T)$ siano simmetrici e strettamente uniformemente ellittici, $f \in L^2(\Omega_T)$, $g \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$.

Una funzione u è una soluzione debole di (P) se si ha $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ con $u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $u'' \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$, è soddisfatta l'equazione

$$< u'', v > + \int_\Omega a_{ij} D_i u D_j v \; dx = \int_\Omega f v \; dx \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega), \; q.o. \; t \in (0,T],$$

e infine valgono le condizioni iniziali $u(0,x) = g(x)$, $u'(0,x) = h(x)$ in Ω.

Si noti che ha senso prescrivere le condizioni iniziali, in quanto la regolarità che abbiamo assunto per u ci garantisce che $u \in C^0(0,T;L^2(\Omega)$ e $u' \in C^0(0,T;W^{-1,2}(\Omega)$.

Anche nel caso iperbolico, vogliamo provare l'esistenza delle soluzioni deboli utilizzando il metodo di Faedo-Galerkin. Il punto chiave è ancora la derivazione di stime a priori: dovremo però supporre per u una regolarità maggiore di quella che abbiamo supposto nella definizione di soluzione debole... Questo non è un vero problema, in quanto le soluzioni dei problemi approssimati che vengono dal metodo di Galerkin avranno la regolarità necessaria!

Supponiamo dunque che u sia una soluzione debole con tutta la regolarità necessaria (precisamente, dobbiamo supporre che $u' \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)))$. Per (quasi) ogni fissato t, possiamo scegliere come funzione test nell'equazione $u'(t,\cdot)$, e otteniamo

$$\int_\Omega u''u' + a_{ij}D_iuD_ju'\,dx = \int_\Omega fu'\,dx \quad \textit{per q.o. } t \in [0,T].$$

Quest'equazione può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega a_{ij}D_iuD_ju\,dx\right) = \int_\Omega a'_{ij}D_iuD_ju + \int_\Omega fu'\,dx.$$

Il primo termine a secondo membro può essere maggiorato con il quadrato della norma L^2 di Du, che a sua volta può essere maggiorato con $\int a_{ij}D_iuD_ju\,dx$ grazie alla condizione di ellitticità. Maggiorando nel modo ovvio anche l'altro termine si ottiene

$$\frac{d}{dt}\left(\|u'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega a_{ij}D_iuD_ju\,dx\right) \leq$$
$$C_1\left(\|u'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega a_{ij}D_iuD_ju\,dx\right) + C_2\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Poniamo

$$\eta(t) := |u'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega a_{ij}D_iuD_ju\,dx, \quad \xi(t) := \|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Proseguendo esattamente come nel caso parabolico, otteniamo la disuguaglianza

$$\eta(t) \le e^{C_1 t}\Big(\eta(0) + C_2 \int_0^t \xi(s)\, ds\Big) \le$$
$$C\Big(\|h\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega_T)}\Big).$$

Usando ancora la disuguaglianza di ellitticità per stimare dal basso la forma quadratica che compare in $\eta(t)$, otteniamo infine la stima a priori

$$(SAP) \qquad \max_{t\in[0,T]} (\|u'(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(t,\cdot)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}) \le$$
$$C\Big(\|h\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega_T)}\Big).$$

Applichiamo ora il metodo di Faedo-Galerkin: scegliamo al solito una base di Hilbert di $L^2(\Omega)$, fatta di funzioni regolari nulle al bordo che generino un sottospazio denso di $W_0^{1,2}(\Omega)$: denotiamo con $\{w_k\}_k$ tale base. Sia $X_m = \mathrm{span}(w_1, \ldots, w_m)$.

Siano rispettivamente g_m e h_m le proiezioni ortogonali di g ed h su X_m, relative rispettivamente ai prodotti scalari in $W_0^{1,2}$ e in L^2. Evidentemente avremo $g_m \to g$ in $W^{1,2}$, $h_m \to h$ in L^2, e inoltre le norme di g_m e di h_m nei loro spazi naturali sono maggiorate dalle analoghe norme di g e h.

Le nostre soluzioni approssimate u_m sono definite come le uniche funzioni del tipo $u_m(x,t) = \sum_{l=1}^m d_l^m(t) w_l(x)$ che risolvono il problema

$$\int_\Omega u_m'' w_k + a_{ij} D_i u_m D_j w_k \, dx = \int_\Omega f w_k \, dx \quad k = 1, \ldots, m$$

con le condizioni iniziali $u_m(0,x) = g_m(x)$, $u_m'(0,x) = h_m(x)$.

Non è difficile verificare che questo problema corrisponde ad un sistema di equazioni ordinarie per i coefficienti $d_1^m(t), \ldots, d_m^m(t)$ che ha un'unica soluzione in $W^{2,2}(0,T;\mathbf{R}^m)$. Inoltre, le nostre soluzioni approssimate u_m soddisfano tutte la stima a priori (SAP) con la stessa costante. Questo ci permette di passare al limite: a meno di sottosuccessioni avremo $u_m \rightharpoonup^* u$ in $L^\infty(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)$, $u_m' \rightharpoonup^* v$ in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)$. Si verifica subito (definizione di derivata debole) che $v = u'$. Vedremo la prossima volta che u altro non è che la soluzione debole del nostro problema iperbolico.

Lezione del 20/1/2005 (2 ore): Concludiamo la dimostrazione dell'esistenza di una soluzione debole per il nostro problema iperbolico. Scegliamo ora una funzione test $v \in C_0^1(0,T;X_N)$: integrando su $[0,T]$ e ancora per parti rispetto a t si ottiene, per ogni $m \geq N$, l'equazione

$$\int_0^T dt \int_\Omega -u_m' v' + a_{ij} D_i u_m D_j v \; dx = \int_0^T dt \int_\Omega fv \; dx,$$

che passando al limite debole diventa

$$\int_0^T dt \int_\Omega -u'v' + a_{ij} D_i u D_j v \; dx = \int_0^T dt \int_\Omega fv \; dx.$$

Per definizione di derivata debole, questo ci assicura che $u'' \in L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))$ e possiamo integrare per parti ottenendo

$$\int_0^T dt < u'', v > + \int_\Omega a_{ij} D_i u D_j v \; dx = \int_0^T dt \int_\Omega fv \; dx.$$

L'ultima equazione è valida per ogni $v \in L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))$ (densità), per cui u soddisfa l'equazione debole "puntuale".

Il fatto che siano verificate le condizioni iniziali si ottiene con un procedimento simile: scegliamo una funzione test $v \in C^2(0,T;X_N)$ con $v(T) = v'(T) = 0$. Per $m \geq N$ si ottiene, integrando per parti due volte nel tempo,

$$\int_0^T dt \int_\Omega u_m v'' + a_{ij} D_i u_m D_j v \; dx =$$
$$\int_0^T dt \int_\Omega f(t,x)v(t,x) - u_m(0,x)v'(0,x) + u_m'(0,x)v(0,x) \; dx.$$

Passando al limite otteniamo un'equazione dello stesso tipo soddisfatta da u, e tenendo conto delle condizioni iniziali soddisfatte dalle u_m si ottiene allora

$$\int_\Omega (u(0,x) - g(x))v'(0,x) - (u'(0,x) - h(x))v(0,x) \; dx = 0$$

e dall'arbitrarietà di $v(0,x)$, $v'(0,x)$ si ha la tesi. Q.E.D.

Nel caso delle equazioni iperboliche, l'unicità è meno ovvia che nel caso dell'analogo problema parabolico: le stime a priori non sono valide per la soluzione debole in quanto u_t non è abbastanza regolare da poterla sostituire nell'equazione come funzione test!

Il risultato di unicità è comunque vero, anche se di dimostrazione non semplice:

TEOREMA: L'unica soluzione debole del nostro problema iperbolico con $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, $h \equiv 0$ è la funzione identicamente nulla.

DIM.: Sia $s \in (0, T]$ e prendiamo come funzione test nell'equazione la funzione

$$v(t,x) := \begin{cases} \int_t^s u(r,x)\, dr & se\ t \in [0,s] \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Evidentemente, $v \in W^{1,2}(0,T; W_0^{1,2}(\Omega))$. Sostituiamola nell'equazione, integriamo rispetto al tempo tra 0 e s e integriamo per parti (sempre rispetto a t). Tenendo conto del fatto che $u'(0,x) \equiv 0$, $v(s,x) \equiv 0$ e osservando che $v'(t,x) = -u(t,x)$ per $t < s$ si ottiene allora:

$$\int_0^s dt \int_\Omega u'u - a_{ij} D_i v' D_i v \, dx = 0.$$

Quest'ultima equazione può essere riscritta

$$\int_0^s \frac{d}{dt}\left[\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega a_{ij} D_i v D_j v \, dx \right] dt = -\int_0^s dt \int_\Omega a'_{ij} D_i v D_j v \, dx.$$

Esplicitando l'integrale di sinista e tenendo conto della condizione di ellitticità se ne ricava che

$$\|u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v(0,\cdot)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C \int_0^s \|v(r,\cdot)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \, dr.$$

Se adesso definiamo $w(t,x) := \int_0^t u(r,x)\, dr$, sostituendo e maggiorando nel modo ovvio si ha

$$\|u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w(s,\cdot)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq 2C \int_0^s \|w(s,\cdot)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|w(r,\cdot)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \, dr$$

Scegliamo ora $\tilde{T} < T$ in modo tale che $1 - 2Cs > 1/2$: la disuguaglianza precedente fornisce, per $s < \tilde{T}$

$$\|u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w(s,\cdot)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C \int_0^s \|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w(t,\cdot)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \, dt.$$

Se poniamo $\eta(s) := \int_0^s \|u(t,\cdot)\|^2_{L^2} + \|w(t,\cdot)\|^2_{W_0^{1,2}} \, dt$, la disuguaglianza precedente è del tipo $\eta'(s) \leq C\eta(s)$, e sappiamo che $\eta(0) = 0$, $\eta(s) \geq 0$. Con il solito trucco di moltiplicare ambo i membri per e^{-Ct} e integrare, si deduce che $\eta(s) \leq 0$, per cui $\eta(s) \equiv 0$ (e quindi $u(t,\cdot) \equiv 0$) in $[0, \tilde{T}]$. Ripetendo lo stesso ragionamento sugli intervalli $[\tilde{T}, 2\tilde{T}], \ldots$ si ottiene che $u \equiv 0$ in $[0, T]$. Q.E.D.

Nonostante sia stato possibile provare l'esistenza di soluzioni deboli per il problema di Cauchy *iperbolico* usando gli stessi metodi che avevamo utilizzato per gli analoghi problemi *parabolici*, ci sono tuttavia importanti differenze qualitative circa il comportamento delle soluzioni: per esempio, le soluzioni dei nostri problemi iperbolici presentano il fenomeno della *velocità finita di propagazione delle perturbazioni.* L'idea è che se si perturbano le condizioni iniziali del nostro problema in una porzione B di Ω, la soluzione non se ne "accorge" subito in tutti i punti di $\Omega \setminus B$: più siamo lontani da B, più tempo dovrà passare perché si abbia un effetto sulla soluzione.

Per mostrare questo fenomeno, prendiamo il caso particolarmente semplice dell'equazione delle onde. Si ha il seguente

TEOREMA: Sia $u(t,x)$ una soluzione di classe C^2 dell'equazione delle onde $u_t - \Delta u = 0$. Se $u(0,x) \equiv 0$, $u_t(0,x) \equiv 0$ in $B(x_0, r_0$, allora $u(t,x) \equiv 0$ nel cono

$$C = \{(t,x) : \ 0 \leq t \leq r_0, \ |x - x_0| < r_0 - t\}.$$

DIM.: Definiamo la funzione energia

$$e(t) = \int\limits_{B(x_0, r_0 - t)} [u_t^2 + |Du|^2] \, dx.$$

Evidentemente, $e(0) = 0$ grazie alla nostra scelta delle condizioni iniziali.

Si ha poi

$$e'(t) = 2 \int\limits_{B(x_0, r_0 - t)} [u_t u_t t + Du \cdot Du_t] \, dx - \int\limits_{\partial B(x_0, r_0 - t)} [u_t^2 + |Du|^2] \, d\sigma(x),$$

dove σ indica la misura di superficie su ∂B. Integrando per parti il secondo termine del primo integrale si ottiene:

$$e'(t) = 2 \int\limits_{B(x_0, r_0 - t)} u_t [u_t t - \Delta u] \, dx +$$
$$2 \int\limits_{\partial B(x_0, r_0 - t)} \frac{\partial u}{\partial n} u_t \, d\sigma(x) - \int\limits_{\partial B(x_0, r_0 - t)} [u_t^2 + |Du|^2] \, d\sigma(x).$$

Il primo integrale si annulla grazie all'equazione delle onde, mentre il secondo si maggiora con l'opposto del terzo (maggiorando al solito un doppio prodotto con la somma dei quadrati...): in conclusione si ha $e'(t) \leq 0$, per cui $e(t) \equiv 0$. Q.E.D.

Per le equazioni paraboliche succede l'esatto contrario: una perturbazione locale della condizione iniziale si riflette immediatamente in tutti i punti del cilindro Ω_T. Questo deriva dal fatto che per le equazioni paraboliche vale il principio del massimo forte.

Una soluzione $u(t,x)$ (regolare) di un'equazione del tipo $u_t - D_i(a_{ij}D_j u) = 0$ ha la proprietà che

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Sigma} u,$$

dove Σ denota la *frontiera parabolica* $\overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T$ (principio del massimo: ovviamente vale l'analogo risultato per il minimo!). Inoltre, se u possiede un punto di massimo o di minimo*interno ad* Ω_T, allora u è costante (principio del massimo forte). Questo implica che la velocità di propagazione delle perturbazioni dei dati iniziali è infinita: supponiamo infatti di risolvere la nostra equazione (con $f \equiv 0$) con un dato iniziale che sia nullo, tranne che in una piccola palletta $B(x_0, r_0)$ dove è positivo. Allora la soluzione è non negativa per il principio del massimo (...in realtà del minimo!). Inoltre, essa non può assumere il valore minimo 0 in nessun punto di Ω_T, altrimenti dovrebbe essere costante per il principio del massimo forte: in conclusione $u(t,x) > 0$ in Ω_T, e la nostra perturbazione del dato iniziale si è ripercossa immediatamente in tutto il dominio!

BIBLIOGRAFIA:

1. H. Brezis: Analisi Funzionale. Liguori, Napoli (1986).

2. L.C. Evans: Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics vol. 19, A.M.S., Providence (1991).

3. M. Giaquinta: An Introduction to the Regularity Theory for Nonlinear Elliptic Systems, Birkhäuser, Basel (1993).

4. G. Gilardi: Dispense su equazioni paraboliche e iperboliche astratte, http://www-dimat.unipv.it/gilardi.