Argomenti delle lezioni del Corso di Calcolo delle Variazioni

Corso di Laurea in Matematica

Quel che segue è il diario delle lezioni che ho tenuto per il corso di Calcolo delle Variazioni. Le lezion precedenti sono state tenute da Silvano Delladio, alla cui pagina web [1] rimando per un elenco dettagliato degli argomenti.

- *Lezione del 25/5/2004 (2 ore):* Richiami (per fissare le notazioni): variazione prima e seconda di un funzionale integrale in dimensione uno, funzionale accessorio, equazione di Jacobi.

  Nozione di *minimo relativo debole e forte* per un funzionale integrale: un estremale $u \in C^1([a,b])$ si dice minimo relativo debole (risp. forte) per il funzionale integrale

  $$(*) \quad \mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x,u,u')\,dx$$

  se esiste $\eta > 0$ tale che per ogni v con $\|v-u\|_{C^1([a,b])} < \eta$ (risp. $\|v-u\|_{C^0([a,b])} < \eta$) e con $v(a)=u(a)$, $v(b)=u(b)$ si abbia $\mathcal{F}(v) \geq \mathcal{F}(u)$.

  Esempio di Scheeffer ([5], p. 266): il funzionale integrale

  $$\mathcal{F}(u) = \int_{-1}^1 [x^2(u')^2 + x(u')^3]\,dx$$

  ammette la funzione $u \equiv 0$ come estremale, e si ha anche $\delta^2\mathcal{F}(u,\phi) > 0$ per ogni $\phi \in C_0^1([-1,1])$, $\phi \not\equiv 0$. Eppure, 0 non è un punto di minimo relativo debole per $\mathcal{F}$: in dimensione infinita, un "punto critico" su cui la "derivata seconda" è strettamente definita positiva non è necessariamente di minimo relativo!

  PROPOSIZIONE (Condizione sufficiente per un minimo relativo debole, [5] p. 223):
  Se u è un estremale per un funzionale integrale $\mathcal{F}$ come in (*) (cioè $\delta\mathcal{F}(u,\phi)=0$ per ogni funzione test ϕ), e

  $$\delta^2\mathcal{F}(u,\phi) \geq \lambda \int_a^b [\phi^2 + (\phi')^2]\,dx \qquad \forall \phi \in C_0^1([a,b]),$$

  allora u è di minimo relativo debole per $\mathcal{F}$.

[1] http://www.science.unitn.it/~delladio

Richiamo di un risultato visto con S. Delladio: sia u un estremale di $\mathcal{F}$, v una soluzione strettamente positiva dell'equazione accessoria di Jacobi associata a u su $[a, b]$. Scriviamo poi per brevità $a(x) = F_{pp}(x, u(x), u'(x))$. Allora si ha

$$\delta^2 \mathcal{F}(u, \phi) = \int_a^b a(x) v^2(x) \left| \left(\frac{\phi}{v} \right)' \right|^2 dx.$$

Partendo da questa espressione e dalla proposizione precedente abbiamo ottenuto:

PROPOSIZIONE ([5], p. 280):
Siano u, v, $a(x)$ come sopra, e supponiamo che valga la condizione di Legendre stretta $a(x) > 0$ in $[a, b]$. Allora u è un punto di minimo relativo debole per il funzionale F.

Abbiamo anche osservato che, nelle condizioni sopra descritte, la condizione di Legendre $a(x) \geq 0$ è *necessaria* per avere un punto di minimo relativo debole (perché in caso contrario è facilissimo trovare una funzione test su cui la variazione seconda è negativa).

- *Lezione del 26/5/2004 (2 ore):* Qualche richiamo sulle proprietà delle soluzioni dell'equazione di Jacobi (e anche di qualunque altra equazione lineare omogenea del secondo ordine, vedi [5], p. 281 e ss.): una soluzione non banale ha zeri isolati, il wronskiano di due soluzioni indipendenti definite sullo stesso intervallo è una funzione di segno costante. Teorema di oscillazione di Sturm: se v_1 e v_2 sono soluzioni indipendenti, allora tra due zeri di v_1 c'è esattamente uno zero di v_2, e viceversa.

  Di conseguenza, se a non ha punti coniugati in $[a, b]$ non c'e' alcuna coppia di punti coniugati contenuta nell'intervallo.

  TEOREMA ([5], p. 283, Thm. 1): Se u è un estremale di $\mathcal{F}$ e vale la condizione di Legendre stretta $F_{pp}(x, u(x), u'(x)) > 0$ in $[a, b]$ allora

  - *Se a non ha punti coniugati in $[a, b]$, allora u è di minimo relativo debole.*
  - *Se esiste una coppia di punti coniugati in $[a, b]$, uno dei quali non cade in uno degli estremi, allora u non è un punto di minimo relativo debole.*

L'unico caso in cui non si può dire nulla è quando a è coniugato a b.

Ricerca di condizioni per un minimo relativo forte: ci sono esempi che mostrano come un minimo relativo debole non sia necessariamente un minimo relativo forte ([5], p. 226).

Funzione eccesso di Weierstrass associata all'integranda $F(x, z, p$: si tratta della funzione di 4 variabili $E(x, z, p, q) = F(x, z, q) - F(x, z, p) - F_p(x, z, p)(q - p)$. La positività della funzione $E(x, z, p, q)$ corrisponde a una sorta di disuguaglianza di convessità nella variabile q a (x, z) fissati: stiamo chiedendo che il grafico della funzione $q \mapsto F(x, y, q)$ stia sopra la sua retta tangente in p.

Condizione necessaria di Weierstrass (senza dimostrazione, vedi [5], pag. 233 con $N = 1$): se u è di minimo relativo debole per il funzionale $\mathcal{F}$, allora $E(x, u(x), u'(x), q) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$ e per ogni $q \in \mathbf{R}$.

- *Lezione del 28/5/2004 (2 ore):*

  (Per questa lezione si veda [5], cap. 6 e [4], cap. 9). Nozione di campo di estremali: dato il solito funzionale integrale

  $$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u, u')\, dx,$$

  una famiglia ad un parametro di funzioni $\phi(x, \alpha)$ con $x \in [a, b]$, $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ è un campo di estremali se

  - $\phi(\cdot, \alpha)$ è un estremale per $\mathcal{F}$ per ogni fissato α;
  - l'applicazione $(x, \alpha) \mapsto (x, \phi(x, \alpha))$ è un diffeomorfismo tra il rettangolo $[a, b] \times [\alpha_1, \alpha_2]$ e la sua immagine G.

  In queste condizioni, per ogni $(x, z) \in G$ passa uno ed un solo estremale della famiglia: definiamo allora la *pendenza* $\mathcal{P}(x, z)$ del campo di estremali in $(x, z) \in G$ come la derivata in x dell'unico estremale del campo che passa per (x, z). Più precisamente, la pendenza è definita dall'equazione

  $$\mathcal{P}(x, \phi(x, \alpha)) = \phi'(x, \alpha).$$

  Con un po' di conti (semplici ma in verità un po' tediosi), abbiamo visto che la condizione che $\phi(\cdot, \alpha)$ sia un estremale per ogni α si traduce nella seguente *equazione di Eulero per il campo*, nella quale entra in gioco la pendenza $\mathcal{P}$ del nostro campo:

  $$\frac{\partial}{\partial z}[\overline{F}(x, z) - \mathcal{P}(x, z)\overline{F}_p(x, z)] = \frac{\partial}{\partial x}\overline{F}_p(x, z).$$

In questa equazione abbiamo usato la seguente notazione: data una funzione di tre variabili $h(x, z, p)$ con $(x, z) \in G$, poniamo $\overline{h}(x, z) = h(x, z, \mathcal{P}(x, z))$.

L'equazione di Eulero per il campo equivale all'affermazione che la forma differenziale su G definita da

$$\omega(x, z) = [\overline{F}(x, z) - \mathcal{P}(x, z)\overline{F}_p(x, z)]\, dx + \overline{F}_p(x, z)\, dz$$

è chiusa. Siccome G è semplicemente connesso, questo implica che $\omega(x, z) = dS(x, z)$, dove S è una funzione scalare definita su G.

Diventa allora naturale definire, per ogni funzione $v : [a, b] \to \mathbf{R}$ il cui grafico sia contenuto in G, il seguente *integrale invariante di Hilbert*:

$$\mathcal{G}(v) = \int_a^b [\overline{F}(x, v(x)) + (v'(x) - \mathcal{P}(x, v(x))\overline{F}_p(x, v(x))]\, dx.$$

Questo integrale non è altro che l'integrale della forma esatta ω sul grafico della funzione v, per cui si ha $\mathcal{G}(v) = S(b, v(b)) - S(a, v(a))$: $\mathcal{G}$ assume lo stesso valore su tutte le funzioni v che hanno gli stessi valori al bordo.

Se $\tilde{u}(x) = \phi(x, \alpha_0)$ ($\alpha_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$) è un estremale *immerso nel campo*, è evidente dalla definizione di $\mathcal{G}$ che $\mathcal{G}(\tilde{u}) = \mathcal{F}(\tilde{u})$. Se poi v è una qualunque funzione che ha le stesse condizioni al contorno di $\tilde{u}$, allora

$$\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(\tilde{u}) = \mathcal{F}(v) - \mathcal{G}(\tilde{u}) = \mathcal{F}(v) - \mathcal{G}(\tilde{v}) = \\ \int_a^b E(x, v(x), \mathcal{P}(x, v(x)), v'(x))\, dx$$

dove E è la funzione *eccesso di Weierstrass* introdotta la volta scorsa.

Ne abbiamo dedotto, applicando la formula di Taylor con resto di Lagrange alla funzione eccesso, la seguente

PROPOSIZIONE ([5], p. 335): Se $\tilde{u} : [a, b] \to \mathbf{R}$ è un estremale immerso in un campo di estremali, e vale il seguente rafforzamento della condizione di Legendre:

$$F_{pp}(x, z, q) > 0 \qquad \forall (x, z, p) \in \mathcal{U} \times \mathbf{R},$$

dove $\mathcal{U}$ è un intorno aperto del grafico di u in $[a, b] \times \mathbf{R}$, allora $\tilde{u}$ è un punto di minimo relativo forte per il funzionale $\mathcal{F}$.

Abbiamo poi verificato che un dato estremale $\tilde{u}$ può essere immerso in un campo di estremali se *non ci sono coppie di punti coniugati relativi all'estremale u nell'intervallo* $[a, b]$ (cf. [5], p.290)

- *Lezione del 31/5/2004 (2 ore):*

  In estrema sintesi, tutta la teoria dei campi di estremali vista la volta scorsa si basa su una semplice osservazione: se a un "candidato minimo" $\tilde{u}$ possiamo associare un funzionale invariante $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{G}(\tilde{u}) = \mathcal{F}(\tilde{u})$, mentre per tutte le altre funzioni ammissibili si ha $\mathcal{G}(v) \leq \mathcal{G}(v)$, allora $\tilde{u}$ è effettivamente un minimo.

  Abbiamo applicato la stessa idea alla teoria delle superfici minime: supponiamo che $u \in C^2(\overline{\Omega})$ sia una soluzione dell'equazione dei grafici minimi
  $$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0.$$

  Sul cilindro $\overline{\Omega} \times \mathbf{R}$ possiamo definire il campo di vettori
  $$n(x,z) = \frac{(-\nabla u, 1)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}},$$
  che ha divergenza nulla grazie all'equazione sopra. Grazie al teorema della divergenza, possiamo dedurne che l'integrale del campo di vettori $n(x,z)$ è lo stesso sul grafico di qualunque funzione v che coincide con u su $\partial\Omega$. Tale integrale coincide con il funzionale area sul grafico di u, mentre è minore o uguale in tutti gli altri casi: ne deduciamo che il grafico di u minimizza l'area tra tutti i grafici di funzioni con lo stesso dato al bordo di u.

  Metodo diretto del calcolo delle variazioni: dato un funzionale integrale $\mathcal{F}$, si cerca di dimostrare direttamente che esiste un minimo assoluto.

  Il modello è il teorema di Weierstrass: una funzione continua su un compatto ammette massimo e minimo. Purtroppo negli spazi di dimensione infinita la compattezza diventa una rarità: per esempio, si può far vedere che la palla unitaria di uno spazio di Banach è compatta se e soltanto se la dimensione dello spazio è finita (teorema di Riesz).

  Si risolve questa difficoltà cercando di *indebolire* la topologia, e di indebolire nel contempo le pretese di continuità.

  Definizione: Sia X uno spazio metrico (basterebbe meno!), $\mathcal{F}: X \to \mathbf{R}$ una funzione. $\mathcal{F}$ si dice *sequenzialmente semicontinua inferiormente* se
  $$\mathcal{F}(\overline{x}) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathcal{F}(x_n) \qquad \forall \overline{x} \in X,\ \forall x_n \to \overline{x} \text{ in } X.$$

TEOREMA DI WEIERSTRASS (vedi p. es. [8], vol. I, pag. 66) : Se $\mathcal{F} : X \to \mathbf{R}$ è una funzione sequenzialmente semicontinua inferiormente con un sottolivello

$$S_C = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \leq C\}$$

non vuoto e (pre)compatto, allora $\mathcal{F}$ ha minimo in X.

Cerchiamo di applicare queste idee al *problema delle geodetiche*: dato un insieme $M \subset \mathbf{R}^N$ (connesso per archi lipschitz) e due punti $p, q \in M$, vogliamo dimostrare che esiste una curva continua di lunghezza minima che connette p a q entro M.

Nozione di lunghezza di una curva continua $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^N$: è l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte.

Si verifica subito che il funzionale lunghezza è semicontinuo inferiormente rispetto alla *convergenza puntuale* delle curve. Ci serve però un risultato di compattezza: lo avremo grazie al

TEOREMA DI ASCOLI ARZELÀ (vedi per es. [8], vol. 1, pag. 54): Sia $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ una successione di funzioni equicontinue ed equilimitate. Allora esistono una funzione continua f e una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_k} \to f$ uniformemente in $[a,b]$.

(Una successione di funzioni è equilimitata se esiste $K > 0$ tale che $|f_n(x)| \leq K$ per ogni $x \in [a,b]$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$. È equicontinua se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x, y \in [a,b]$, $|x - y| < \delta$, $n \in \mathbf{N}$ si abbia $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$.)

- *Lezione del 1/6/2004 (2 ore):*

  Dimostrazione del teorema di Ascoli-Arzelà: usando un procedimento diagonale abbiamo costruito una sottosuccessione convergente su $[a,b] \cap \mathbf{Q}$. A quel punto è facile dimostrare che la sottosuccessione così costruita è di Cauchy in $C^0([a,b])$ (grazie all'ipotesi di equicontinuità).

  Applicazione del teorema di Ascoli-Arzelà al problema delle geodetiche (vedi per esempio [8], vol. I, pag. 66). Vogliamo risolvere il problema seguente: sia $M \subset \mathbf{R}^N$ un insieme compatto connesso per archi lipschitziani. Siano poi p, q due fissati punti di M. Vogliamo dimostrare che esiste una curva continua $\gamma : [0,1] \to M$ con $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ avente lunghezza $L(\gamma)$ minima tra tutte le curve continue che connettono p e q.

Cominciamo col prendere una successione minimizzante, cioè una successione di curve $\gamma_h : [0,1] \to M$ con $\gamma_h(0) = p$, $\gamma_h(1) = q$ e $L(\gamma_h) \to I$ (dove con I denotiamo l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve ammissibili). Se fossimo in grado di estrarre una sottosuccessione $\{\gamma_{h_k}$ che converge uniformemente ad una curva γ, avremmo finito: infatti, grazie alla semicontinuità inferiore della lunghezza rispetto alla convergenza puntuale (dimostrata ieri), si avrebbe

$$L(\gamma) \leq \liminf_{k \to +\infty} L(\gamma_{h_k}) = I,$$

e γ sarebbe la geodetica cercata.

Sfortunatamente, non è possibile applicare direttamente il teorema di Ascoli-Arzelà: essendo il funzionale lunghezza *invariante per riparametrizzazioni*, in generale non c'è speranza che la nostra successione di curve sia equicontinua. Abbiamo però verificato che posiamo riparametrizzare le curve γ_h, costruendo nuove curve $\tilde{\gamma}_h : [0,1] \to M$ che hanno la proprietà di essere *percorse con velocità costante*: queste sono equilipschitziane, per cui è possibile applicare il teorema di Ascoli-Arzelà e concludere come sopra indicato.

La prossima volta mostreremo un risultato di regolarità per le geodetiche: precisamente, faremo vedere che se M è una sottovarietà C^∞ compatta, connessa e senza bordo di $\mathbf{R}^N$, allora le geodetiche minimizzanti sono curve C^∞.

- *Lezione del 4/6/2004 (2 ore):*

  Funzionale lunghezza e funzionale energia: per le curve lipschitziane $\gamma : [0,1] \to M \subset \mathbf{R}^N$ sono definiti rispettivamente come

  $$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt, \qquad E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\gamma'(t)|^2\, dt.$$

  Grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene subito che $L(\gamma) \leq \sqrt{2E(\gamma)}$, con il segno di uguaglianza che vale se e solo se γ è parametrizzata con velocità costante. Si deduce subito che una geodetica di lunghezza minima tra due punti, se parametrizzata con velocità costante, minimizza anche il funzionale energia. Viceversa, una curva che minimizza il funzionale energia (con estremi fissi) è una geodetica di lunghezza minima parametrizzata con velocità costante.

  Supponiamo ora che $M \subset \mathbf{R}^N$ sia una sottovarietà C^∞ compatta e senza bordo di dimensione n. Vogliamo verificare che una geodetica di lunghezza minima $\tilde{\gamma}$ tra due punti di M è una curva regolare che soddisfa l'equazione delle geodetiche.

Innanzitutto, osserviamo che la minimalità di $\tilde{\gamma}$ implica la sua locale minimalità, cioè la sua minimalità rispetto a variazioni con piccolo supporto. Scriviamo allora il funzionale energia per una curva contenuta in un aperto coordinato $U \subset M$, in corrispondenza con un aperto limitato V di $\mathbf{R}^n$ tramite una carta locale (diffeomorfismo) $\psi : V \to U$. Non è restrittivo supporre che ψ abbia tutte le derivate di ogni ordine limitate in V (basta prendere la restrizione di una carta locale definita su un aperto leggermente piú grande.

Se $\gamma : [0,1] \to V$ è una curva a valori in V, allora il funzionale energia della corrispondente curva $\psi(\gamma)$ su M si scrive

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 g_{ij}(\gamma(t))\gamma_i'(t)\gamma_j'(t)\,dt,$$

dove si sottintende la somma sugli indici ripetuti e abbiamo posto

$$g_{ij}(x) := \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j} \quad i,j = 1,\dots,n,\ x \in V.$$

I coefficienti g_{ij} sono la rappresentazione locale della metrica riemanniana di M (indotta da $\mathbf{R}^N$): la matrice g_{ij} è uniformemente definita positiva in V, e in particolare è invertibile con matrice inversa C^∞ avente derivate limitate.

Vogliamo mostrare che se una curva lipschitziana γ minimizza il funzionale energia rispetto alle variazioni compatte in V, essa è in realtà regolare.

Per farlo, ci occorrono alcuni prerequisiti (vedi [1], cap. 4 e cap. 8): abbiamo richiamato qualche nozione sugli spazi $L^p([a,b])$ e sulle funzioni assolutamente continue. Abbiamo poi definito gli spazi di Sobolev nel modo seguente (cf. [1], VIII.2):

$$W^{1,p}([a,b]) = \Big\{u \in L^p([a,b]) :\ \exists v \in L^p([a,b])\ t.c.$$
$$\int_a^b u\phi'\,dx = -\int_a^b v\phi\,dx\ \forall\phi \in C_0^1([a,b])\Big\}.$$

La funzione v (se esiste) è unica, si chiama *derivata debole* di u e si indica solitamente con u', anche se a priori essa non è una derivata in senso classico!

Lo spazio $W^{1,p}([a,b])$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ diventa uno spazio di Banach con una delle norme equivalenti

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \quad \text{oppure } \|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{1/p}.$$

Vogliamo mostrare che le funzioni di $W^{1,1}$ sono in realtà assolutamente continue (o meglio, in ogni classe di equivalenza di funzioni quasi ovunque uguali ce n'è una assolutamente continua), e la loro derivata debole è proprio la derivata classica della funzione assolutamente continua. Per farlo, cominciamo con il seguente

LEMMA (cf. [1], Lemma VIII.1): Se $u \in W^{1,1}([a,b])$ ha derivata debole quasi ovunque nulla, allora coincide quasi ovunque con una costante.

- *Lezione dell'8/6/2004 (2 ore):*

Proseguiamo la dimostrazione del fatto che le funzioni $u \in W^{1,1}([a,b])$ sono assolutamente continue: vale il seguente

LEMMA (cf. [1], Lemma VIII.2): Se u è assolutamente continua su $[a,b]$, allora $u \in W^{1,1}([a,b])$ e la derivata debole coincide con la derivata classica.

Come corollario otteniamo immediatamente

TEOREMA (cf. [1], Teorema VIII.2, Teorema VIII.7): Se $u \in W^{1,1}([a,b])$ esiste una funzione assolutamente continua $\tilde{u}$ che coincide con u quasi ovunque in $[a,b]$. Ogni funzione $u \in W^{1,p}([a,b])$ con $p > 1$ è $1/q$-hölderiana (q esponente coniugato di p). In particolare, le funzioni in $W^{1,\infty}$ sono lipschitziane.

Se poi $p > 1$ e $\{u_n\} \subset W^{1,p}$ è una successione equilimitata nella norma di $W^{1,p}$, allora esiste una sottosuccessione che converge uniformemente ad una funzione hölderiana.

Il risultato di hölderianità e compattezza alla fine dell'enunciato è una semplice conseguenza della disuguaglianza di Hölder e del teorema di Ascoli-Arzelà.

Alla luce di questo teorema, sappiamo che le funzioni di $W^{1,\infty}([a,b])$ sono tutte e sole le funzioni lipschitziane.

Come applicazione, riprendiamo il problema della regolarità delle geodetiche: abbiamo visto la volta scorsa che una geodetica letta in carte locali minimizza il funzionale energia

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 g_{ij}(\gamma(t))\gamma_i'(t)\gamma_j'(t)\, dt$$

tra tutte le curve con le stesse condizioni al contorno.

In particolare, se $\phi \in C_0^1([0,1];\mathbf{R}^n)$ la funzione

$$\varepsilon \mapsto \mathcal{E}(\gamma + \varepsilon\phi)$$

è definita per ε sufficientemente piccolo, ed ha un minimo per $\varepsilon = 0$. Ne segue che

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathcal{E}(\gamma + \varepsilon\phi) = 0.$$

Abbiamo visto (usando il teorema della convergenza dominata) che la derivazione sotto il segno di integrale è possibile anche quando sappiamo solo che γ è lipschitziana. Scegliendo in particolare $\phi = \eta e_s$ (con $\eta \in C_0^1([0,1])$ una funzione scalare e e_s il vettore della base canonica di $\mathbf{R}^n$), si ottiene il sistema

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_s} g_{ij}(\gamma(t))\ \gamma_i'(t)\gamma_j'(t)\eta(t) + 2g_{is}(\gamma(t))\gamma_i'(t)\eta(t)\right]\, dt = 0$$
$$\forall \eta \in C_0^1([0,1]),\ \forall s = 1, \ldots, n.$$

Questo ci dice che la complicata funzione L^∞

$$v(t) = \frac{\partial}{\partial x_s} g_{ij}(\gamma(t))\ \gamma_i'(t)\gamma_j'(t)$$

altro non è che la derivata debole dell'altrettanto complicata funzione

$$u(t) = 2g_{is}(\gamma(t))\gamma_i'(t),$$

che quindi appartiene a $W^{1,\infty}$. Siccome la matrice $\{g_{ij}(x)\}$ è invertibile con matrice inversa lipschitziana, se ne deduce che $\gamma'(t)$ è una funzione lipschitziana.

Vedremo domani come migliorare questa regolarità.

- *Lezione del 9/6/2004 (2 ore):* Conclusione del discorso sulla regolarità delle geodetiche: ieri abbiamo visto che una geodetica lipschitz γ deve verificare l'equazione di Eulero debole del funzionale energia. Grazie alla nozione di derivata debole ed alla particolare struttura dell'equazione di Eulero, ne abbiamo dedotto che anche γ' è lipschitziana (e quindi è derivabile ancora una volta nel senso delle funzioni assolutamente continue). A questo punto, utilizzando ancora una volta le proprietà delle funzioni assolutamente continue e integrando per parti l'equazione di Eulero debole, si vede che γ deve soddisfare quasi ovunque l'equazione di Eulero forte. Ma allora il gioco è fatto, grazie alla proprietà di "autoregolarizzazione" dell'equazione di Eulero forte: quest'ultima è piuttosto complicata da scrivere, ma comunque è un sistema che si presenta nella classica forma

$$\gamma''(t) = F(t, \gamma(t), \gamma'(t)),$$

con F una funzione C^∞. Allora, evidentemente, γ'' ha almeno la stessa regolarità di γ'... per cui $\gamma \in C^\infty$.

Per concludere il corso, vogliamo vedere un tipico risultato di esistenza di minimi di un funzionale integrale del tipo

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx$$

nello spazio di Sobolev $W^{1,2} * [a, b])$ (scegliamo $p = 2$ perché $W^{1,2}$ è uno spazio di Hilbert e la teoria è un po' più semplice).

Uno strumento essenziale sarà la convergenza debole (e la compattezza debole in $L^2([a, b])$. Richiamiamo alcuni fatti fondamentali: L^2 è uno spazio di Hilbert separabile col prodotto scalare

$$< u, v >= \int_a^b u(x)v(x)\, dx :$$

questo significa che la norma di L^2 deriva dal prodotto scalare ($\|u\|_{L^2} = \sqrt{< u, u >}$), che lo spazio normato così ottenuto è uno spazio di Banach e infine che esiste un sottinsieme denso numerabile.

In particolare, a L^2 possiamo applicare la teoria delle serie di Fourier astratte: sia $\{e_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ un insieme ortonormale massimale in L^2 (si può ottenere per esempio applicando il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt ad un insieme denso numerabile). Una tale famiglia di funzioni si chiama *base di Hilbert*, ed ha la proprietà che ogni $u \in L^2$ si può scrivere in modo unico come segue:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i, \text{ con } c_i =< u, e_i > .$$

I coefficienti c_i si dicono *coefficienti di Fourier* di u, e si ha anche

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2.$$

Viceversa, data una successione $\{c_i\}_i$ di numeri reali tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < +\infty,$$

la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ converge in L^2 ad un elemento dello spazio stesso.

Introduciamo ora il concetto di *convergenza debole* in L^2: si dice che una successione $\{u_n\} \subset L^2([a,b])$ converge debolmente a $u \in L^2$ (e si scrive $u_n \rightharpoonup u$) se

$$\int_a^b u_n v \, dx \to \int_a^b uv \, dx \qquad \forall v \in L^2.$$

Evidentemente, ogni successione che converge nella norma di L^2 converge anche debolmente, ma il viceversa non è vero: per esempio ci siamo divertiti a mostrare che la successione $u_n(x) = \sin nx$ converge debolmente a 0 in $L^2([0,1])$.

La convergenza debole in L^2 ha ottime proprietà di compattezza:

TEOREMA: Se $\{u_n\} \subset L^2([a,b])$ è una successione limitata in norma, allora è possibile estrarre una sottosuccessione debolmente convergente.

Vedremo la dimostrazione la prossima volta. A questo fine, sarà utile svolgere il seguente esercizio lasciato allo zelo del pubblico: indichiamo con $c_{n,i}$ i coefficienti di Fourier di u_n rispetto ad una fissata base di Hilbert $\{e_i\}$. Mostrare che esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che esiste finito il limite

$$c_i := \lim_{k \to +\infty} c_{n_k,i}$$

per ogni fissato $i \in \mathbf{N}$ (si usi un procedimento diagonale, dopo aver osservato che le successioni $n \mapsto c_{n,i}$ sono limitate).

- *Lezione del 9/6/2004 (2 ore):* Conclusione della dimostrazione del teorema di compattezza debole in L^2 enunciato la volta scorsa.

  Grazie a questo risultato siamo in grado di applicare il metodo diretto del calcolo delle variazioni a tutta una classe di funzionali:

TEOREMA: Si consideri il funzionale $\mathcal{F}(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx$, *dove la funzione integranda* $f : [a,b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *è di classe* C^1 *e soddisfa le seguenti ipotesi:*

- $p \mapsto f(x,z,p)$ *è una funzione convessa per ogni fissata coppia* $(x,z) \in [a,b] \times \mathbf{R}$,
- $f(x,z,p) \geq C|p|^2$ *per ogni* x, z, p.

Allora esiste una funzione $\tilde{u} \in W^{1,2}([a,b])$, *soluzione del problema variazionale*

$$\min \Big\{ \mathcal{F}(u) : \ u \in W^{1,2}([a,b]),\ u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta \Big\}.$$

Per dimostrare il teorema, abbiamo preso una successione minimizzante ed abbiamo osservato che è possibile estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che $u_{n_k} \to u$ uniformemente e $u'_{n_k} \rightharpoonup v$ debolmente in L^2. Abbiamo poi dimostrato, usando semplicemente la definizione di derivata debole, che v è la derivata di u e che quindi $u \in W^{1,2}$.

Per dimostrare che il limite u della sottosuccessione è il minimo cercato, abbiamo mostrato che il funzionale $\mathcal{F}(u)$ è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza uniforme delle funzioni e debole in L^2 delle derivate.

Infine, abbiamo osservato che l'ipotesi di convessità della funzione $f(x,z,p)$ rispetto alla variabile p è necessaria ai fini della semicontinuità rispetto a questo tipo di convergenza. Precisamente, abbiamo dimostrato questo fatto nel caso particolare $f(x,z,p) = f(p)$, anche se la dimostrazione nel caso generale porterebbe solo a qualche complicazione tecnica.

BIBLIOGRAFIA:

1. H. Brezis: Analisi Funzionale. Liguori, Napoli (1986). One-dimensional variational problems. Clarendon Press, Oxford (1998).

2. R. Courant: Calculus of variations. Courant Institute of Math. Sciences, New York University (1946).

3. R. Courant, H. Robbins: Che cos 'e la matematica? Bollati Boringhieri.

4. C. Fox: An introduction to the calculus of variations. Dover Publications, Inc., New York (1987).

5. M. Giaquinta, S. Hildebrandt: Calculus of variations I. Springer Verlag (1994).

6. E. Giusti: Minimal surfaces and functions of bounded variation. Birkhaeuser (1984).

7. H. Howards, M. Hutchings, F. Morgan: The isoperimetric problems on surfaces. Amer. Math. Monthly 106, 430-439 (1999).

8. A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin: Elements of the theory of functions and functional analysis. Dover (1999).