Argomenti delle lezioni del Corso di Teoria Geometrica della Misura

Dottorato di Matematica

Quest'anno il corso di *Teoria Geometrica della Misura* per gli studenti del Dottorato in Matematica è stato suddiviso in due parti: la prima (di 25 ore) è stata tenuta da Francesco Serra Cassano, mentre la seconda (di 16 ore) sarà tenuta da me. Nella mia sezione di corso, intendo fare una breve introduzione alla teoria delle correnti integrali di Federer e Fleming. Quella che segue è una lista, aggiornata volta per volta, degli argomenti trattati nelle lezioni:

- *Lezione del 10/6/2003 (2 ore):* Breve introduzione al corso: perché definire lo spazio delle correnti integrali? Cosa sono? Sono commestibili? Stima della densità k-dimensionale superiore di un insieme E con $\mathcal{H}^k(E) < +\infty$: essa è compresa tra 2^{-k} e 1 per $\mathcal{H}^k$-quasi ogni $x \in E$, mentre vale 0 per quasi ogni punto di $\mathbf{R}^n \setminus E$. Ci chiediamo quale ipotesi aggiungere affinché la densità sia 1 in quasi ogni punto dell'insieme... Insiemi (numerabilmente) k-rettificabili. Equivalenza delle seguenti due definizioni : un insieme di misura $\mathcal{H}^k$ finita è *rettificabile* se ha un ricoprimento numerabile (a meno di un insieme $\mathcal{H}^k$-trascurabile) fatto con sottovarietà C^1 embedded (di dimensione k), *oppure* se ne ha uno fatto con immagini di funzioni lipschitziane da $\mathbf{R}^k$ in $\mathbf{R}^k$. Un insieme rettificabile può essere scritto (a meno di un insieme $\mathcal{H}^k$-trascurabile) come unione numerabile disgiunta di sottinsiemi di varietà C^1.

- *Lezione dell'11/6/2003 (2 ore):* Spazio tangente approssimato ad un insieme di misura $\mathcal{H}^k$ finita: nel caso di una varietà di classe C^1 coincide con quello classico. Un insieme rettificabile possiede lo spazio tangente approssimato in $\mathcal{H}^k$-quasi ogni punto. Inoltre, se decomponiamo l'insieme come unione numerabile disgiunta di sottinsiemi di varietà C^1, lo spazio tangente approssimato coincide $\mathcal{H}^k$-quasi ovunque con lo spazio tangente (classico) alle varietà. Teorema di Besicovitch-Preiss: implica che un insieme di misura $\mathcal{H}^k$ finita è rettificabile se e soltanto se la sua densità k-dimensionale vale quasi ovunque 1. Insiemi puramente non rettificabili e teorema di struttura di Federer. Un esempio di insieme tipo Cantor puramente non rettificabile. Spazio tangente approssimato ad una misura. Grasmanniana degli m-piani non orientati in $\mathbf{R}^n$: caratterizzazione in termini di matrici di proiezione e proprietà di compattezza.

- *Lezione del 17/6/2003 (2 ore):* Spazio tangente approssimato k-dimensionale ad una misura positiva μ: un k-piano P è detto spazio tangente approssimato a μ nel punto x se le misure "esplose" $\mu_{x,\rho}$, definite da $\mu_{x,\rho}(A) = \rho^{-k}\mu(x + \rho A)$ convergono debolmente a $\mathcal{H}^k \llcorner P$ per $\rho \to 0^+$. Criterio di rettificabilità: se μ possiede lo spazio tangente approssimato P_x (di dimensione k) per μ-quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$, allora l'insieme $M = \{x \in \mathbf{R}^n : \textit{ esiste il piano tangente } P_x\}$ è rettificabile, e $\mu = \mathcal{H}^k \llcorner M$. Come corollario, un insieme di misura $\mathcal{H}^k$ finita che ammette k-piano tangente approssimato in $\mathcal{H}^k$-quasi ogni punto è rettificabile.

  Richiami sulle funzioni BV, sugli insiemi di perimetro finito e sulla frontiera ridotta. Approssimazione di funzioni BV con funzioni regolari (con convergenza in L^1 delle funzioni e convergenza delle variazioni totali). Disuguaglianza isoperimetrica per insiemi di perimetro finito limitati.

- *Lezione del 18/6/2003 (2 ore):* Lemma di "localizzazione" del perimetro: se E è un insieme di perimetro finito e definiamo $m(\rho) = |E \cap B_\rho(x_0)|$ (con x_0 punto fissato), allora per quasi ogni ρ abbastanza piccolo si ha $|D\mathbf{1}_{E\cap B_\rho}|(\partial B_\rho) \leq m'(\rho)$. Come conseguenza si ottiene che se x_0 è un punto della frontiera ridotta $\partial^* E$ e denotiamo $B_\rho = B_\rho(x_0)$, allora per ρ abbastanza piccolo si hanno le stime di densità $|D\mathbf{1}_E|(B_\rho) \leq C\rho^{n-1}$, $|E \cap B_\rho| \geq c\rho^n$. Si ha inoltre la seguente informazione sull'oscillazione delle normali:

  $$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^{n-1}} \int_{B_\rho} |\nu_E(x) - \nu_E(x_0)|^2 d|D\mathbf{1}_E|(x) = 0.$$

  Dalla prima stima di densità si ottiene facilmente che le funzioni caratteristiche degli *insiemi esplosi* $E_\rho = \{(x - x_0)/\rho : \ x \in E\}$ sono compatte in $L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$.

- *Lezione del 24/6/2003 (2 ore):* Blow-up di un insieme di perimetro finito E attorno a un punto $x_0 \in \partial^* E$: gli insiemi esplosi E_ρ convergono in L^1_{loc} a $H = \{x \in \mathbf{R}^n : x \cdot \nu_E(x_0) \geq 0\}$. Inoltre, $|D\mathbf{1}_{E_\rho}| \rightharpoonup \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial H$: la misura $|D\mathbf{1}_E|$ è dotata di spazio tangente approssimato in x_0, uguale a ∂H. Ne segue che $\partial^* E$ è rettificabile, $|D\mathbf{1}_E| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E$ e vale il teorema della divergenza

  $$\int_E \operatorname{div} \Phi(x)\, dx = -\int_{\partial^* E} \nu_E(x) \cdot \Phi(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x), \qquad \forall \Phi \in C^\infty_c(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n).$$

  Algebre esterne $\Lambda_* \mathbf{R}^n$ e $\Lambda^* \mathbf{R}^n$ associate a $\mathbf{R}^n$ e al suo duale: spazio $\Lambda_k \mathbf{R}^n$ dei k-vettori e spazio $\Lambda^k \mathbf{R}^n$ delle k-forme. Spazio $\mathcal{D}^k(\mathbf{R}^n)$ delle

k-forme C^∞ a supporto compatto. Operatore differenziale esterno e operatore pull-back sulle forme regolari.

- *Lezione del 25/6/2003 (2 ore):* Integrazione di una k-forma su una sottovarietà C^1 di $\mathbf{R}^n$, teorema di Stokes. Lo spazio $\mathcal{D}^k(\mathbf{R}^n)$ delle forme C^∞ a supporto compatto. Rappresentazione dei k-piani orientati di $\mathbf{R}^n$ tramite un k-vettore semplice di lunghezza 1: se V è un sottospazio vettoriale di dimensione k di $\mathbf{R}^n$, e $v_1, \dots, v_k$ è una sua base orientata ortonormale, allora $\xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ è un k-vettore di lunghezza 1. Inoltre, facendo il prodotto wedge dei vettori di una qualunque altra base orientata di V, si ottiene un multiplo positivo di ξ. Grazie a questa nozione ed alla formula dell'area, si vede che se M è una sottovarietà k-dimensionale orientata di classe C^1 in $\mathbf{R}^n$, allora

  $$\int\limits_M \omega = \int\limits_M < \tau(x), \omega(x) > \; d\mathcal{H}^k(x) \quad \forall \omega \in \mathcal{D}^k(\mathbf{R}^n),$$

  dove $\tau : M \to \Lambda_k \mathbf{R}^n$ è una funzione continua tale che $\tau(x)$ è un k-vettore semplice unitario che orienta lo spazio tangente $\mathrm{Tan}_x M$ per ogni $x \in M$.

  Lo spazio $\mathcal{D}_k(\mathbf{R}^n)$ delle correnti k-dimensionali: è il duale di $\mathcal{D}^k(\mathbf{R}^n)$.

  Un esempio importante sono le correnti rettificabili (a molteplicità intera): si ottengono come naturale generalizzazione dell'integrazione di forme su una varietà regolare. Se M è un insieme rettificabile, $\tau : M \to \Lambda_k \mathbf{R}^n$ una funzione $\mathcal{H}^k$-misurabile tale che $\tau(x)$ è un k-vettore semplice unitario che orienta lo spazio tangente approssimato $\mathrm{Tan}_x M$ per quasi ogni $x \in M$, $\theta : M \to \mathbf{R}$ una funzione misurabile a valori in $\mathbf{N}$ (la molteplicità), allora possiamo definire una corrente come

  $$T(\omega) = \int_M < \tau(x), \omega(x) > \theta(x) \; d\mathcal{H}^k(x).$$

- *Lezione del 27/6/2003 (2 ore):* Convergenza debole di correnti: $T_h \rightharpoonup T$ se $T_h(\omega) \to T(\omega)$ per ogni $\omega \in \mathcal{D}^k$.

  Bordo di una corrente: se $T \in \mathcal{D}_k$, il teorema di Stokes suggerisce di definire $\partial T(\alpha) = T(d\alpha)$ per ogni $(k-1)$-forma α. Questa nozione coincide con il bordo classico per le varietà di classe C^1, ed evidentemente si ha $\partial^2 = 0$.

  Massa di una corrente: se $T \in \mathcal{D}_k(\mathbf{R}^n)$, definiamo

  $$\mathbf{M}(T) = \sup\{T(\omega) : \; \omega \in \mathcal{D}^k(\mathbf{R}^n), \; |\omega(x)| \le 1 \; \forall x \in \mathbf{R}^n\}$$

(La definizione di massa data da Federer è leggermente diversa: al posto della condizione su $|\omega(x)|$, c'è un'analoga condizione sulla *comassa* di $\omega(x)$). Per il teorema di rappresentazione di Riesz, se $\mathbf{M}(T) < +\infty$, esiste un'unica misura positiva μ e un (essenzialmente unico) campo μ-misurabile di k-vettori unitari $\tau : \mathbf{R}^n \to \Lambda_k \mathbf{R}^n$ tali che

$$T(\omega) = \int < \tau(x), \omega(x) > \ d\mathcal{H}^k(x) \quad \forall \omega \in \mathcal{D}^k.$$

Evidentemente, una corrente rettificabile ha massa finita, e la massa è data da

$$\int_M \theta(x) \ d\mathcal{H}^k(x) :$$

si tratta della naturale generalizzazione del concetto di "area" di una varietà regolare.

Grazie alla compattezza delle misure, possiamo dire che una successione di correnti con masse equilimitate ammette una sottosuccessione che converge debolmente, ed inoltre la massa è evidentemente semicontinua rispetto alla convergenza debole. Possiamo quindi dedurne che, se $\Gamma \in \mathcal{D}_{k-1}$ è una corrente con $\partial\Gamma = 0$, allora esiste una corrente k-dimensionale di massa minima tra tutte quelle che hanno bordo Γ (dobbiamo solo dimostrare che Γ è il bordo di *almeno una* corrente di massa finita, ma vedremo che questo è facile). Questa soluzione del problema di Plateau non è però soddisfacente: una corrente di massa finita non è un oggetto geometricamente così significativo! Vogliamo ottenere un analogo risultato di esistenza in un opportuno spazio di *correnti rettificabili*.

Norma flat (integrale):

$$\mathcal{F}(T) = \inf\{\mathbf{M}(A) + \mathbf{M}(\partial B) : T = A + \partial B,\ A, B \text{ rettif. a supp. comp.}\}.$$

La *distanza flat* corrisponde abbastanza bene ad un'idea geometrica di "vicinanza di due superfici". Norma flat reale: analoga alla precedente,

$$\mathbf{F}(T) = \min\{\mathbf{M}(A) + \mathbf{M}(\partial B) : T = A + \partial B,\ A \in \mathcal{E}_k,\ B \in \mathcal{E}_{k+1}\},$$

dove $\mathcal{E}_k$ denota lo spazio delle correnti a supporto compatto. Grazie al teorema di Hahn-Banach, abbiamo fatto vedere che $\mathbf{F}(T) = \sup T(\omega)$, dove il sup è fatto su tutte le forme ω con $|\omega(x)| \leq 1$ e $|d\omega(x)| \leq 1$ per ogni x.

Alcuni spazi di correnti: le correnti normali $\mathbf{N}_k$ (correnti di massa finita con bordo di massa finita) e le correnti integrali $\mathbf{I}_k$ (correnti rettificabili con bordo rettificabile). Il risultato chiave di compattezza, che vedremo la prossima volta, ci dirà che una successione di correnti integrali con supporti equilimitate, masse equilimitate e masse dei bordi equilimitate è compatta rispetto alla norma $\mathcal{F}$.

Per concludere la lezione, abbiamo visto che le correnti normali di dimensione n in $\mathbf{R}^n$ altro non sono che le funzioni BV (ad una corrente T di dimensione massima, si può associare la distribuzione u data da $< u, \phi >= T(\phi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)$: a questo punto, il bordo della corrente T non è latro che il gradiente distribuzionale di u).

- *Lezione del 1/7/2003 (2 ore):* Push-forward di correnti: se $f : \mathbf{R}^n_x \to \mathbf{R}^m_y$ è una mappa C^∞ e propria e $T \in \mathcal{D}_k(\mathbf{R}^n_x)$, possiamo definire una corrente $f_\# T \in \mathcal{D}_k(\mathbf{R}^m_y)$ ponendo $f_\# T(\omega) = T(f^\# \omega)$ per ogni $\omega \in \mathcal{D}^k(\mathbf{R}^m_y)$. Se la corrente T è rettificabile, l'operazione di push-forward si comporta nel modo atteso (grazie ad una generalizzazione della formula dell'area agli insiemi rettificabili), ed e' generalizzabile a funzioni che siano soltanto lipschitziane e proprie.

  Prodotto cartesiano tra due correnti $S \in \mathcal{D}_k(\mathbf{R}^n_x)$, $T \in \mathcal{D}_h(\mathbf{R}^m_y)$: si tratta di una corrente $S \times T \in \mathcal{D}_{k+h}(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^m_y)$ definita in un modo abbastanza naturale, che fornisce il risultato che ci aspettiamo se S, T sono correnti rettificabili.

  Le due operazioni sulle correnti che abbiamo appena definito, ci permettono di eseguire importanti costruzioni geometriche: per esempio, possiamo proiettare una corrente su un piano, oppure costruire il cono con vertice l'origine su una corrente rettificabile $T \in \mathcal{R}_k$: si tratta della corrente $(k+1)$-dimensionale $g_\#([0,1] \times T)$, dove $[0,1]$ denota l'intervallo orientato con la sua naturale struttura di corrente 1-dimensionale in $\mathbf{R}^1$, e $g(t,x) = tx$. Grazie a questa semplice costruzione si vede che una corrente rettificabile senza bordo in $\mathbf{R}^n$ è sempre il bordo di una corrente rettificabile. (Partendo da questa semplice osservazione, si intuisce che è possibile definire dei *gruppi di omologia* usando le correnti integrali: nella categoria dei *lipschitz neighborhood retract*, si può dimostrare che questi gruppi coincidono con i classici gruppi di omologia singolare a coefficienti interi).

  Teorema di deformazione: ogni corrente normale T si può approssimare in norma flat con real polyhedral chains. Precisamente, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo scrivere $T = P + \partial S + Q$, dove P è poliedrale (con massa controllata dalla massa di T), mentre S e Q sono correnti normali la cui massa è controllata rispettivamente da $C\varepsilon\mathbf{M}(T)$ e da $C\varepsilon\mathbf{M}(\partial T)$. La corrente P è ottenuta proiettando T su una suddivisione cubica periodica di passo ε di $\mathbf{R}^n$. Inoltre, se T è una corrente rettificabile si vede facilmente che anche P ed S sono rispettivamente una integral polyhedral chain e una corrente rettificabile. Se poi T è una corrente integrale, allora anche Q è rettificabile.

Da questo teorema segue facilmente che l'insieme delle correnti integrali supportate in una fissata palla $B_R(0)$ che hanno masse e masse dei bordi limitate da una fissata costante C, è *totalmente limitato* in metrica $\mathcal{F}$. Questo insieme è anche *completo* grazie ad un importante *teorema di chiusura*: grazie a questo si ha un risultato di compattezza che permette di risolvere il problema di Plateau nell'ambito delle correnti integrali. In particolare, tra tutte le correnti rettificabili che hanno come bordo una fissata corrente Q (con $\partial Q = 0$), è possibile trovarne una di massa minima.

Il Teorema di Chiusura di Federer e Fleming dice che il gruppo delle correnti integrali $\mathbf{I}_k$ è $\mathbf{F}$-chiuso nello spazio $\mathbf{N}_k$ delle correnti normali. Da questo segue facilmente la completezza dell'insieme descritto sopra, ma anche il notevole *teorema di rettificabilità del bordo*:

$$I_k = \{T \in \mathcal{R}_k : \ \mathbf{M}(\partial T) < +\infty\}$$

(per capire che questo risultato è almeno "plausibile", si pensi al caso particolare degli insiemi di perimetro finito...).

La dimostrazione del teorema di chiusura può essere fatta per induzione su k, e il suo ingrediente principale è un *criterio di rettificabilità per slicing*: una corrente normale senza bordo T è rettificabile se e solo se per quasi ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$ e per quasi ogni $r > 0$, le *slice sferiche* $\partial(T \llcorner B_r(x_0))$ sono rettificabili. Per dimostrare il criterio di rettificabilità, Federer e Fleming usavano il (difficile) teorema di struttura di Federer-Besicovitch: esiste però una dimostrazione più semplice dovuta a B. White.