

Diario del Corso di Analisi - I Unità Didattica

Corsi di Laurea: Matematica, Fisica, Fisica Applicata

Docente: Sisto Baldo

ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso vuole essere un riassunto abbastanza dettagliato di quello che è stato detto in aula, e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione. D'altra parte, queste brevi paginette NON possono sostituire completamente un libro di testo, la lezione in aula o un'interazione diretta con il docente o l'esercitatrice: siete quindi invitati a servirvi ANCHE di queste altre opportunità per approfondire le vostre conoscenze!

Lezione del 24/9/2002 (2 ore): Presentazione del corso: orario, esercitazioni, ricevimento studenti, sito web, tempi e modalità delle prove di valutazione (provetta in itinere, prova finale, recuperi). Argomento del corso: calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale.

Idea intuitiva di funzione $f : A \rightarrow B$, dove A, B sono insiemi (A si chiama dominio, B codominio): si tratta di una “scatola nera” o di una “regola” che ad ogni elemento $a \in A$ associa uno ed un solo elemento $f(a) \in B$. Qualche esempio di funzioni che “esistono in natura”: la temperatura nella nostra aula o il valore di una certa azione alla Borsa di Milano (entrambe in funzione del tempo), la forza elastica esercitata da una molla in funzione dell'elongazione, il segnale acustico raccolto da un microfono in funzione del tempo...

Caso particolarmente importante per noi: le funzioni reali di variabile reale, cioè quelle per cui $A \subset \mathbf{R}$ e $B \subset \mathbf{R}$. Grafico di una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$: è il sottinsieme del piano cartesiano

$$G_f = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y = f(x)\}.$$

Tra i sottinsiemi del piano cartesiano, come distinguere quelli che sono grafici di una funzione reale di variabile reale? Sono i sottinsiemi G tali che per ogni $x \in \mathbf{R}$ troviamo una ed una sola $y \in \mathbf{R}$ tale che $(x, y) \in G$.

Caso generale: prodotto cartesiano $A \times B$ di due insiemi A e B , grafico di una funzione $f : A \rightarrow B$ come sottinsieme di $A \times B$. Identifichiamo i sottinsiemi di $A \times B$ che sono grafici di una funzione $f : A \rightarrow B$: otteniamo una “ricetta”, simile a quella sopra, che può essere adottata come definizione rigorosa di funzione tra due insiemi.

Cosa sono i numeri reali di cui abbiamo parlato (e che abbiamo usato) fino adesso? Prima possibile risposta: sono tutti i numeri decimali, eventualmente con infinite cifre dopo la virgola. Impariamo a identificare, tra tutti

questi numeri, i numeri razionali: ci accorgiamo che un numero razionale si rappresenta sempre come un numero decimale finito o periodico (infatti, se svolgiamo la divisione per calcolare una dopo l'altra le cifre dopo la virgola, ad ogni passo c'è solo un numero finito di resti che possiamo ottenere: prima o poi, ritroveremo un resto che abbiamo già avuto, e le cifre successive si ripeteranno!). Problemino: se *definiamo* i reali come numeri decimali infiniti, non è poi tanto facile definire le operazioni!

Cosa vorremmo avere: proprietà delle operazioni e della relazione d'ordine su \mathbf{R} (i reali sono un "campo ordinato", direbbe un algebrista). Anche i razionali hanno tutte queste proprietà, ma sono "troppo pochi": non si possono fare operazioni utili come calcolare $\sqrt{2}$, $\log 3$ oppure il seno di un angolo di 60° ... Cosa manca? La risposta alla prossima lezione...

Lezione del 30/9/2002 (2 ore): Rivediamo l'affermazione secondo cui "i razionali sono troppo pochi" per fare l'analisi matematica: mostriamo che non esiste alcun numero razionale il cui quadrato faccia 2 (detto altrimenti, la radice quadrata di 2 *non esiste tra i numeri razionali*).

Assioma di completezza di \mathbf{R} : *ogni sottinsieme non vuoto e superiormente limitato di \mathbf{R} ammette estremo superiore (ed ogni sottinsieme non vuoto e inferiormente limitato ammette estremo inferiore...) in \mathbf{R}* . Suona esoterico? Vediamo di capire!

Massimo e minimo di un sottinsieme di \mathbf{R} . Ogni sottinsieme *finito* di \mathbf{R} ammette massimo e minimo, ma questo può non essere vero per i sottinsiemi *infiniti*: ad esempio, \mathbf{Z} e $\{\frac{n-1}{n} : n = 1, 2, 3, 4, \dots\}$ sono sottinsiemi di \mathbf{R} , il primo dei quali non ammette né massimo né minimo, il secondo non ammette massimo anche se è *limitato*. Sottinsiemi di \mathbf{R} limitati inferiormente e superiormente, maggioranti e minoranti. Definizione di *estremo superiore* e di *estremo inferiore*: sono rispettivamente il minimo dei maggioranti e il massimo dei minoranti.

Cerchiamo di convincerci che l'assioma di completezza è soddisfatto nel *modello dei decimali infiniti* di \mathbf{R} : semplice algoritmo per identificare l'estremo inferiore di un insieme (di cui, per semplicità, 0 sia un minorante).

Esempio: *dimostriamo* che l'estremo superiore di uno degli insiemi considerati poco sopra è effettivamente quello che pensavamo!

Lezione del 1/10/2002 (2 ore): Caratterizzazione dell'estremo superiore (ed inferiore): se A è un sottinsieme di \mathbf{R} non vuoto e superiormente limitato, allora $M = \sup A$ ($M \in \mathbf{R}$) se e soltanto se succede che

- per ogni $a \in A$ si ha che $a \leq M$ (cioè M è un maggiorante di A);

- per ogni $k > 0$, esiste $a \in A$ tale che $M - k < a$ (ossia $M - k$ non è un maggiorante di A per nessun $k > 0$).

Qualche esempio di calcolo del sup e dell'inf di un insieme usando la caratterizzazione.

Estremo superiore ed estremo inferiore degli insiemi illimitati (superiormente o inferiormente) e dell'insieme vuoto.

Interpretazione geometrica dell'assioma di completezza, confronto con un'altra sua comune formulazione (esistenza di un *elemento separatore* di due sottinsiemi A e B di \mathbf{R} , tali che A stia tutto a sinistra di B sulla retta reale).

Recuperiamo l'esistenza della radice quadrata usando l'estremo superiore: se $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, definiamo $\sqrt{a} = \sup\{x \in \mathbf{R} : x^2 \leq a\}$. Facciamo vedere che questo in effetti definisce un numero reale non negativo, e che il quadrato di questo numero reale è proprio a .

Interpretiamo quel che abbiamo fatto utilizzando il grafico della funzione $f(x) = x^2$: idea geometrica del "teorema dei valori intermedi" per le funzioni continue (concetto, questo, da precisare in seguito!), e perché esso non potrebbe funzionare per funzioni che hanno dei salti, o sono definite solo sull'insieme \mathbf{Q} dei numeri razionali.

Elevamento a potenza: potenze ad esponente naturale, intero, razionale (la definizione è "obbligata" se vogliamo che valgano le proprietà delle potenze!). Potenze ed esponente reale: se $a > 1$ e $x \in \mathbf{R}$, definiamo

$$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbf{Q}, q \leq x\}.$$

Lezione del 7/10/2002 (2 ore): Decidiamo di capire come è fatto il grafico della funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, funzione reale definita su $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Osserviamo che questa è una funzione pari (cioè $f(-x) = f(x)$) e che per $x > 0$ ha lo stesso segno della funzione seno ed è compresa tra le funzioni $-1/x$ e $1/x$. Quello che non è per niente chiaro a priori, è come si comporta la funzione per *valori piccoli della x* ...

Attraverso semplici considerazioni geometriche, scopriamo che per $0 < x < \pi/2$ valgono le disuguaglianze $x \leq \tan x$ e $\sin x < x$, da cui

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{se } 0 < x < \pi/2.$$

Geometricamente, questo dice che il grafico della funzione $f(x)$, per angoli piccoli, è compreso tra i grafici della funzione $\cos x$ e della funzione costante 1: possiamo quindi concludere che quando x si avvicina a 0, il valore della

funzione $f(x)$ deve necessariamente avvicinarsi ad 1. Esprimiamo questo fatto scrivendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Diamo la seguente “definizione” informale di limite: la scrittura

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

esprime il fatto che, se si avvicina sufficientemente la x a x_0 , il valore di $f(x)$ diventa arbitrariamente vicino al numero ℓ .

Osserviamo che non è affatto necessario che la funzione f sia definita in x_0 (e, se lo fosse, conveniamo comunque di *non tenerne conto quando andiamo a verificare la relazione di limite*). Quel che serve, è solo che la funzione f sia definita in punti *arbitrariamente vicini ad x_0* (in matematica, x_0 deve essere un punto di accumulazione del dominio di f).

Per il momento, non diamo una definizione precisa di limite: essa arriverà inesorabilmente prima della fine dell’unità didattica. Ci teniamo l’idea intuitiva scritta sopra, e decidiamo di *credere* ad alcune plausibili affermazioni (che verranno anch’esse):

1. si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - \ell| = 0$;
2. vale il *Teorema dei carabinieri*: se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell,$$

allora esiste anche il limite di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, e questo limite vale ℓ ;

3. vale il *Teorema della permanenza del segno*: se una funzione ammette limite finito ℓ in un punto x_0 , allora essa è limitata in un intorno di x_0 . Se poi $\ell \neq 0$, allora f ha lo stesso segno di ℓ in un intorno di x_0 ;
4. per il *limite di funzioni composte*, vale che se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ con $f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0 , e $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell$;
5. vale che $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ (per $x_0 > 0$);

Utilizzando questi “assiomi”, potremo facilmente convincerci che il limite della somma è la somma dei limiti, il limite del prodotto è il prodotto dei limiti e il limite del rapporto è il rapporto dei limiti (se il limite del denominatore è diverso da 0)... Verifichiamo poi facilmente che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

e abbiamo i nostri primi “limiti fondamentali”.

Lezione del 8/10/2002 (2 ore): Risultati principali sull'*algebra dei limiti*: se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ (con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbf{R}$), allora

- esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$;
- esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$;
- se $\ell_2 \neq 0$, esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x)) = \ell_1/\ell_2$.

Infatti, per il limite della somma osserviamo che $0 \leq |f(x) + g(x) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2|$. I due addendi a destra diventano piccoli a piacere per x abbastanza vicino a x_0 , per cui il membro di destra della nostra catena di disuguaglianze tende a 0 (questo fatto verrà reso assolutamente rigoroso quando daremo la definizione di limite!). L'enunciato segue allora dal teorema dei carabinieri.

Per il limite del prodotto si ha poi:

$$0 \leq |f(x) \cdot g(x) - \ell_1 \ell_2| = |f(x)g(x) - f(x)\ell_2 + f(x)\ell_2 - \ell_1 \ell_2| \leq |f(x)||g(x) - \ell_2| + |f(x) - \ell_1||\ell_2|$$

Osserviamo l'ultima espressione di destra: per ipotesi sappiamo che $|f(x) - \ell_1| \rightarrow 0$ e $|g(x) - \ell_2| \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$. Grazie al teorema della permanenza del segno, la quantità $|g(x)|$ si mantiene limitata vicino a x_0 , e quindi tutta l'espressione tende a zero: ancora una volta, l'enunciato discende dal teorema dei carabinieri.

Per il limite del rapporto, osserviamo che

$$|1/g(x) - 1/\ell_2| = |g(x) - \ell_2|/(|g(x)||\ell_2|).$$

La frazione a destra tende a zero in quanto il numeratore tende a zero per ipotesi, mentre il denominatore si mantiene limitato e lontano da zero in quanto tende ad un limite diverso da zero. Ne deduciamo che $1/g(x) \rightarrow 1/\ell_2$ per $x \rightarrow x_0$, e l'enunciato generale segue perchè il limite del prodotto è il prodotto dei limiti.

Purtroppo, il limite non sempre c'è. Ad esempio non esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ (la funzione compie un'oscillazione completa tra -1 e 1 in ogni periodo, e quindi per valori grandi di x essa *non* può stabilizzarsi attorno ad alcun valore preciso), e non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ (questa funzione compie *infinite* oscillazioni tra -1 e 1 in *ogni* intorno comunque piccolo di 0).

Introduciamo alcune variazioni sul tema: limiti destro e sinistro, limiti all'infinito e limiti infiniti (e mostriamo qualche esempio di ciascuno).

La possibilità di avere limiti infiniti rende problematico il calcolo del limite di rapporti, prodotti e somme in alcuni casi particolarmente delicati, detti *forme indeterminate*.

Infatti non è difficile convincersi che se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = 0$. Invece, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, (*forma indeterminata 0/0*) non è così chiaro cosa succeda al limite del rapporto!

Questo per un buon motivo: il limite del rapporto di due funzioni che tendono entrambe a 0 può combinare *qualunque cosa*. Può essere un qualunque numero reale, essere infinito o non esistere. Per vederlo prendiamo $x_0 = 0$ e (i) $f(x) = g(x) = x$: in questo caso il limite del rapporto è 1; (ii) $f(x) = x$, $g(x) = x^3$: in questo caso il limite è $+\infty$; (iii) $f(x) = x \sin(1/x)$, $g(x) = x$: in questo caso il limite non esiste.

Altre forme indeterminate (cioè situazioni come quella appena vista, in cui la sola conoscenza del limite delle funzioni f e g non permette di stabilire quanto fa il limite di f/g , $f \cdot g$, $f + g$ oppure f^g) sono ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 ...

A titolo di esempio, ripetiamo l'esercizio sopra per la forma indeterminata ∞/∞ (rapporto di due funzioni che esplodono all'infinito), mostrando che anche in questo caso il limite del rapporto può essere finito, infinito o non esistere.

Come fare a trattare queste forme indeterminate? In certi casi, può essere utile la conoscenza a priori di alcuni *limiti fondamentali*: ad esempio, utilizzando il limite fondamentale della lezione precedente facciamo vedere che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Lezione del 14/10/2002 (2 ore): Supponiamo di avere una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, e di voler capire come è fatto il suo grafico: questo può avere un notevole interesse applicativo, per esempio se vogliamo massimizzare o minimizzare una quantità fisica rappresentata da f .

Se guardiamo il grafico di una funzione "a caso" (che sia però abbastanza regolare: supponiamo che il grafico sia una linea continua e senza spigoli vivi), ci accorgiamo che ci sarebbe estremamente utile saper identificare i tratti "in salita" e i tratti "in discesa" del grafico della funzione! Per far questo, abbiamo bisogno di una definizione di *pendenza del nostro grafico in un punto*.

Se la funzione è un polinomio di primo grado, cioè se $f(x) = mx + q$, il grafico è una retta e la risposta è facilissima: la pendenza del grafico (in senso "stradale": rapporto tra quanto si sale e quanto ci si sposta in orizzontale!)

è data *dal coefficiente angolare* m . In sostanza, per chi si sposta da sinistra verso destra, se $m > 0$ il grafico è in “salita”, se $m = 0$ è “piano” e se $m < 0$ è in “discesa”!

Se prendiamo però una funzione il cui grafico non sia una retta, la pendenza non sarà più costante, ma potrà cambiare da punto a punto. Se però prendiamo due punti *abbastanza vicini* sulla retta reale, x_0 e $x_0 + h$, è ragionevole pensare che la “pendenza” del grafico di f in x_0 (qualunque cosa questo significhi!), sia vicina alla pendenza della retta che passa per i due punti corrispondenti sul grafico, $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0) + h)$. Tale pendenza è data dall’espressione

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

detta “rapporto incrementale”.

E’ ragionevole supporre che prendendo h sempre più piccolo (e quindi i due punti sempre più vicini), avremo un’approssimazione sempre migliore della pendenza del grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. Diamo dunque la seguente

DEFINIZIONE: La pendenza del grafico di f per $x = x_0$ si chiama derivata di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$. Essa si definisce ponendo

$$f'(x_0) =_{def} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

purché il limite esista finito.

Se il limite non esiste o è infinito, non è definita la pendenza e diciamo che la funzione non è derivabile in x_0 .

Se $f'(x_0)$ esiste, la *retta tangente* al grafico di f per $x = x_0$ sarà la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ la cui pendenza coincide con quella del grafico stesso: essa avrà dunque equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Diamo altre possibili interpretazioni del rapporto incrementale e della derivata: velocità media e velocità istantanea di un corpo che si muove di moto rettilineo, velocità media e istantanea di una reazione chimica, tasso di interesse (o tasso di aumento dell’inflazione...).

Passiamo ad un esempio che mostra la potenza della nozione di derivata. Consideriamo la funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$: si tratta di un polinomio di terzo grado, un oggetto non tanto complicato il cui grafico non è comunque facile da indovinare!

Calcoliamo il rapporto incrementale di f (pendenza media del grafico) tra x_0 e $x_0 + h$: troviamo

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 6x_0^2 + 6x_0h + 2h^2 - 6x_0 - 3h,$$

e il limite di questo oggetto per $h \rightarrow 0$ è $f'(x_0) = 6x_0^2 - 6x_0$. Studiando il segno di questa espressione, scopriamo che il grafico di f “è in salita” per $x_0 < 0$, in “discesa” tra 0 e 1, e di nuovo “in salita” per $x_0 > 1$... Se calcoliamo f in -1 e in 0 , e osserviamo che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ possiamo tracciare un grafico ragionevolmente preciso di f !

(Facciamo anche vedere, molto brevemente, come si possa studiare la convessità del grafico di f andando a vedere in quali intervalli la pendenza cresce, e in quali cala. Comunque, di questo parleremo più diffusamente in seguito.)

Lezione del 15/10/2002 (2 ore): Cerchiamo di arrivare ad una definizione rigorosa del concetto di limite. Avevamo detto che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se succede che, avvicinando *sufficientemente* x a x_0 (con $x \neq x_0$), $f(x)$ diventa *arbitrariamente vicina* a ℓ . Possiamo tradurre questa frase nella seguente **DEFINIZIONE:** *Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 . Diciamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se e soltanto se, comunque scegliamo un intervallo I_ℓ centrato in ℓ , piccolo quanto vogliamo, è possibile trovare un intervallo J_{x_0} centrato in x_0 tale che $f(x) \in I_\ell$ per ogni $x \in J_{x_0}$, $x \neq x_0$.*

Se scriviamo $I_\ell = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ e $J_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, la definizione si può tradurre nella seguente (che è assolutamente equivalente a quella sopra, ed è quella che ha sempre riscosso il maggior successo di pubblico e di critica):

DEFINIZIONE: *Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 . Diciamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se e soltanto se, per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile trovare $\delta > 0$ tale che*

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \quad (P)$$

(Si noti che la stessa definizione vale anche se f è definita su un insieme qualunque A , di cui x_0 sia un punto di accumulazione. Ovviamente, in tal caso la proprietà (P) andrà verificata solo per gli $x \in A$. Ricordo che x_0 si dice *punto di accumulazione* di A , se esistono punti di A vicini quanto si vuole ad x_0 .)

Verifichiamo che con la definizione di limite appena vista, valgono le proprietà elencate a Pag. 4 (lezione dell'8/10).

La 1. è immediata.

Vediamo di dimostrare la 2. (Teorema dei Carabinieri):

sia $\varepsilon > 0$, e scegliamo $\delta > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ ogni qual volta $0 < |x - x_0| < \delta$ (a priori, la definizione di limite potrebbe darci due valori diversi di δ per f e per h : perché sia vero quanto appena scritto, basta prendere il più piccolo dei due).

Le due disuguaglianze per f e per h possono anche essere scritte: $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$, $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$. Usando l'ipotesi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ otteniamo allora (per ogni x tale che $0 < |x - x_0| < \delta$):

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon,$$

cioè $|g(x) - \ell| < \varepsilon$, Q.E.D.

La 3. (Permanenza del segno) segue facilmente:

prendendo un qualunque $\varepsilon > 0$, si ottiene la limitatezza di f in un intorno di x_0 , mentre prendendo $\varepsilon = |\ell|/2$ si ha l'esistenza di un intorno in cui la funzione ha lo stesso segno del limite.

Per la 4. (Limite di funzione composta), diamo un enunciato preciso:

TEOREMA: Sia f definita in un intorno di x_0 tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, e tale che $f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0 . Sia poi g definita in un intorno di y_0 tale che $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell$. Allora si ha anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell.$$

DIMOSTRAZIONE: Dato $\varepsilon > 0$, troviamo $\eta > 0$ tale che $|g(y) - \ell| < \varepsilon$ se $0 < |y - y_0| < \eta$.

Troviamo poi δ tale che, se $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - y_0| < \eta$ (e questa quantità è positiva per ipotesi, a patto di prendere η abbastanza piccolo!). Usando dunque la disuguaglianza valida per g , otteniamo

$$|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon \quad \text{se } |x - x_0| < \delta,$$

Q.E.D.

Verifichiamo infine la 5:

Il primo dei due limiti segue immediatamente prendendo $\delta = \varepsilon$. Per il secondo, osserviamo che se $x_0 > 0$, allora

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}},$$

e basta prendere $\delta = \varepsilon \sqrt{x_0}$. La verifica per $x_0 = 0$ è lasciata per esercizio...

Possiamo dimostrare facilmente anche il *Teorema sull'algebra dei limiti (lezione del 15/10)*: a titolo di esempio, verifichiamo il risultato sul limite del prodotto. Per ogni $\varepsilon > 0$, troviamo δ tale che $|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$, $|g(x) - \ell_2| < \varepsilon$ quando $0 < |x - x_0| < \delta$. Allora, usando la disuguaglianza a pagina 5 si ha

$$|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| \leq |f(x)||g(x) - \ell_2| + |\ell_2||f(x) - \ell_1| < ((|\ell_1| + \varepsilon) + |\ell_2|)\varepsilon,$$

e l'ultima quantità può essere resa piccola a piacere.

Lezione del 21/10/2002 (2 ore): Limiti infiniti: diciamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ implica $f(x) > M$ (e c'è una definizione analoga per il limite $-\infty$).

Limiti all'infinito: diciamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che $x > N$ implica $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Analogamente, si definisce il limite a $-\infty$, e anche i limiti infiniti all'infinito...

Si noti che per parlare di limite a $+\infty$ di una funzione f , basta che il dominio di f sia un insieme *illimitato superiormente*: in particolare, data una funzione $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, ha senso chiedersi se esiste il $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$.

Una funzione definita su \mathbf{N} si chiama *successione*. Di solito, per le successioni si adotta una notazione differente da quella usata per le funzioni: si usa una scrittura del tipo $\{a_n\}$, dove il simbolo a_n rappresenta il valore della successione in $n \in \mathbf{N}$.

Facendo l'opportuna traduzione, scopriamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Abbiamo già visto un paio di lezioni fa che il limite di una funzione in un punto non necessariamente esiste, così come non necessariamente esiste il limite di una successione per $n \rightarrow +\infty$: per esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ non ha limite.

Ci piacerebbe avere un risultato che dica almeno che le successioni *fatte in un certo modo* hanno limite. Ancora una volta, ci viene in aiuto la completezza di \mathbf{R} :

TEOREMA: Sia $\{a_n\}$ una successione *crescente* (cioè $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni n). Allora $\{a_n\}$ ammette limite per $n \rightarrow +\infty$, e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}.$$

Dimostrazione: Sia $S = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$. Supponiamo che $S \in \mathbf{R}$: il caso $S = +\infty$ è lasciato per esercizio.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome S è un maggiorante dei valori assunti dalla successione, abbiamo che $a_n \leq S < S + \varepsilon$ per ogni n . D'altra parte, $S - \varepsilon$ non è più un maggiorante (per definizione di sup), per cui esiste un elemento della successione, chiamiamolo $a_{\bar{n}}$, tale che $a_{\bar{n}} > S - \varepsilon$. Siccome la successione è crescente, se $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n \geq a_{\bar{n}} > S - \varepsilon$.

Mettendo insieme le due disuguaglianze ottenute sopra, abbiamo che per $n > \bar{n}$ si ha $|a_n - S| < \varepsilon$. Q.E.D.

In maniera del tutto analoga, si mostra che una funzione crescente ammette limite a $+\infty$, e che questo limite è uguale al sup. Analogamente, una

funzione crescente $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ammette limite destro e sinistro in ogni punto: precisamente,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > x_0\}.$$

Usiamo ora il teorema sui limiti delle successioni monotone per *definire il numero di Nepero e (la base dei logaritmi naturali)*: poniamo per definizione

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Naturalmente, occorre far vedere che questo limite *esiste ed è finito!*

L'idea della dimostrazione non è difficile: mostriamo dapprima che la successione $a_n = (1 + 1/n)^n$ è crescente (e quindi il limite esiste!). Questo può essere dimostrato usando la disuguaglianza di Bernoulli.

Per mostrare poi che il limite è finito, occorre mostrare che la successione è superiormente limitata. Per far questo prendiamo la successione $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$, e mostriamo che questa è *decrescente* (con un procedimento analogo a quello usato per mostrare la crescita di a_n). Si ha allora $2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4$, e possiamo essere certi che e è un numero reale compreso tra 2 e 4.

Concludiamo la lezione mostrando come da questa definizione segue il seguente *limite fondamentale* (di funzione reale!):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e.$$

La cosa può essere dimostrata senza troppa difficoltà giocando con le parti intere...

Lezione del 22/10/2002 (2 ore): Concetto di funzione continua: se $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ e $x_0 \in A$ è anche di accumulazione per A , diciamo che f è continua in x_0 se e solo se

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

(Se x_0 è un punto isolato di A , decidiamo *d'ufficio* che f è continua in x_0 ...)

Che significa, in soldoni? Che se x “varia di poco” attorno a x_0 , il valore della funzione cambia anch'esso poco rispetto a $f(x_0)$...

Conosciamo già un bel po' di funzioni continue: i polinomi, le funzioni razionali (nei punti in cui non si annulla il denominatore), le funzioni trigonometriche, la radice quadrata, le funzioni ottenibili da queste con operazioni algebriche e di composizione...

Anche le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$ (con $a > 0$, $a \neq 1$) sono continue. Grazie alle proprietà delle potenze, è sufficiente verificarne la continuità in $x_0 = 0$: ci basta far vedere che $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$. Questo segue facilmente dal limite di successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1,$$

che a sua volta si può dimostrare con la disuguaglianza di Bernoulli.

Cosa dire della continuità di logaritmi, radici, funzioni trigonometriche inverse? Essa segue da un fatto generale: mostreremo tra breve che *l'inversa* di una funzione continua e strettamente crescente definita su un intervallo, è anche lei continua!

Usando il limite fondamentale dimostrato ieri, e la continuità della funzione esponenziale e della funzione logaritmo, dimostriamo senza eccessiva difficoltà che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Uno dei risultati fondamentali sulle funzioni continue, è il **TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI**: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione: A lezione abbiamo visto la cosiddetta *dimostrazione per bisezione* di questo teorema. Vogliamo ora proporre un'altra, forse leggermente più rapida.

Poniamo $c = \sup A$, dove $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Questo è evidentemente un numero reale compreso tra a e b . Dico che $f(c) = 0$.

Infatti, se per assurdo avessimo $f(c) > 0$, per il teorema della permanenza del segno avremmo $f(x) > 0$ anche per tutti gli x in un certo intorno sinistro $[c - \delta, c]$ di c . Quindi $c - \delta$ sarebbe un maggiorante di A più piccolo di c , contro la definizione di estremo superiore.

Se poi fosse $f(c) < 0$, dovrebbe essere $c < b$ (perché $f(b) > 0$). Sempre per il teorema della permanenza del segno, troveremo $\delta > 0$ tale che $f(x) < 0$ per $x \in [c, c + \delta]$, e c non sarebbe più un maggiorante di A . Q.E.D.

Questo teorema dall'aria innoqua si rivela in realtà assai utile. Per esempio, consideriamo la funzione continua $f(x) = x^2 - a$ (con $a > 0$) sull'intervallo $[0, a+1]$. Si vede subito che $f(0) = -a < 0$, mentre $f(a+1) = a^2 + a + 1 > 0$. Il teorema ci assicura che esiste un punto c dell'intervallo tale che $c^2 - a = 0$: abbiamo così dimostrato che esiste la radice quadrata di a . Essa è poi unica

perché la funzione considerata è strettamente crescente sulla semiretta dei reali positivi (e quindi non si può annullare due volte).

In maniera analoga (come vedremo meglio la prossima volta), possiamo dimostrare l'esistenza del logaritmo, delle funzioni trigonometriche inverse, delle radici di ogni ordine....Non sarà nemmeno difficile verificare che tutte queste funzioni sono continue.

Lezione del 28/10/2002 (2 ore): Un immediato corollario del teorema di esistenza degli zeri è il seguente

TEOREMA (dei valori intermedi): Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua, essa assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Dimostrazione: Sia y_0 un valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$. Basta applicare il Teorema di esistenza degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - y_0$...

Q.E.D.

Da questo teorema segue che se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua e strettamente crescente (che è evidentemente iniettiva!), essa è *surriettiva* sull'intervallo $[f(a), f(b)]$: in altre parole, essa è *invertibile*. Questo ci assicura l'esistenza di radici, logaritmi, funzioni inverse delle funzioni trigonometriche...

Sarebbe però piacevole sapere che queste funzioni inverse sono continue! La risposta si può facilmente desumere dal seguente

TEOREMA (Continuità delle funzioni monotone): Una funzione crescente $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è continua se e solo se

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

Un risultato analogo vale per le funzioni decrescenti.

Dimostrazione: Diamo qualche dettaglio di una dimostrazione che in classe abbiamo solo "raccontato" velocemente...

Se f è continua, la tesi è una conseguenza immediata del Teorema dei valori intermedi. Viceversa, supponiamo che f non sia continua, e sia x_0 un suo punto di discontinuità (supponiamo per semplicità $x_0 \in (a, b)$: le semplici modifiche necessarie nei casi $x_0 = a$ o $x_0 = b$ sono lasciate per esercizio).

Abbiamo visto che le funzioni crescenti ammettono sempre limite destro e sinistro, che evidentemente devono essere diversi in x_0 :

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : a \leq x < x_0\} < \\ \ell_2 &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x_0 < x \leq b\}. \end{aligned}$$

Per la crescenza di f , segue subito che $f([a, b])$ non può contenere nessun punto dell'intervallo (ℓ_1, ℓ_2) , e f non può essere suriettiva.

Q.E.D.

Da quest'ultimo teorema segue che *la funzione inversa di una funzione continua e strettamente crescente definita su un intervallo $[a, b]$, è anche lei continua*. Infatti, la funzione inversa è strettamente crescente e suriettiva da $[f(a), f(b)]$ in $[a, b]$.

Un altro, importante risultato sulle funzioni continue è il

TEOREMA (di Weierstrass): Una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ammette massimo e minimo. (Attenzione: è importante che il dominio della funzione sia un *intervallo chiuso e limitato*, e che la funzione sia continua. Abbiamo visto con qualche esempio che senza queste ipotesi la tesi può anche essere falsa!).

Dimostrazione: Sia $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Dobbiamo mostrare che M è il massimo di f , cioè che esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = M$.

Dimostriamo questo teorema con un procedimento di bisezione: dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in due intervalli uguali tramite il suo punto medio $c = (a + b)/2$. Su almeno uno dei due semiintervalli $[a, c]$ o $[c, b]$, l'estremo superiore di f sarà ancora M . Questo nuovo intervallo potrà poi essere ancora suddiviso in due, e su una delle due metà il sup sarà necessariamente M ...

Proseguendo con questo procedimento, possiamo costruire una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) tali che

1. $[a_0, b_0] = [a, b]$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ per $n = 1, 2, \dots$,
2. $\sup\{f(x) : x \in [a_n, b_n]\} = M$,
3. $b_n - a_n = (b - a)/2^n$.

Esattamente come nella dimostrazione del teorema di esistenza degli zeri, ci accorgiamo che la successione a_n è crescente, per cui esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0 \in [a, b]$, e che $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x_0$ (a causa di 3.).

Dico che $f(x_0) = M$. Infatti, $f(x_0) \leq M$ per definizione di sup. Supponiamo per assurdo che $f(x_0) < M$, e sia ε tanto piccolo che $f(x_0) + \varepsilon < M$. Per la continuità di f , esiste un intorno I di x_0 tale che, per ogni $x \in I$, si abbia

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

In particolare, $\sup\{f(x) : x \in I\} \leq f(x_0) + \varepsilon < M$. Questo è assurdo perché per $n \rightarrow +\infty$ abbiamo $a_n \rightarrow x_0$ e $b_n \rightarrow x_0$: in particolare, per n abbastanza grande deve essere $[a_n, b_n] \subset I$, per cui $\sup\{f(x) : x \in I\} = M$.
Q.E.D.

Lezione del 29/10/2002 (2 ore): Torniamo alle questioni di derivabilità. Un risultato assai semplice ma importante è il seguente

TEOREMA: Se f è una funzione definita in un intorno di x_0 derivabile in x_0 , allora f è anche continua in x_0 .

Dimostrazione: Si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h = 0.$$

Infatti, nell'ultima espressione la frazione tende a $f'(x_0)$, mentre il fattore h tende a 0.

Q.E.D.

Osserviamo che il viceversa non è vero: una funzione può essere continua ma non derivabile in un punto, come ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ in 0.

Come abbiamo fatto con i limiti, possiamo chiederci cosa sia la derivata della somma, del prodotto o del rapporto di due funzioni:

TEOREMA (Algebra delle derivate): Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni definite in un intorno di x_0 , derivabili in x_0 .

- (i) La somma di f e g è derivabile in x_0 , e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- (ii) Il prodotto di f e g è derivabile in x_0 , e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
- (iii) se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Dimostrazione: Dimostriamo per esempio la (ii): le altre due formule sono lasciate per esercizio.

Abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ & \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h) + f(x_0)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ & \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}g(x_0 + h) + f(x_0)\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \end{aligned}$$

e passando al limite per $h \rightarrow 0$ (tenendo conto anche della continuità delle funzioni derivabili) si ottiene (ii).

Q.E.D.

Usando queste semplici regole, e la stessa definizione di derivata, verifichiamo senza difficoltà che $(x^n)' = nx^{n-1}$ per $n \in \mathbf{Z}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(e^x)' = e^x$ (e analogamente $(a^x)' = a^x \log a$), $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

Vediamo ora come si deriva una funzione composta:

TEOREMA (Chain Rule): Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 , derivabile in x_0 , e sia g una funzione definita in un intorno di $y_0 = f(x_0)$, derivabile in y_0 . Allora la funzione composta $g \circ f(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Dimostrazione: Introduciamo la seguente funzione ausiliaria, definita in un intorno di 0:

$$A(k) = \begin{cases} \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} & \text{se } k \neq 0, \\ g'(y_0) & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Evidentemente, questa funzione è *continua in 0*, per definizione di derivata.

Costruiamo ora il rapporto incrementale della funzione $g \circ f$, e passiamo al limite per $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} &= \\ A(f(x_0 + h) - f(x_0)) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &\rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Usando questa formula possiamo calcolarci altre derivate. Per esempio, se $x > 0$ e $a \in \mathbf{R}$ abbiamo: $(x^a)' = (e^{a \log x})' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$. Un caso particolare di questa formula è stato visto a esercitazione (derivata di \sqrt{x} ...).

Analogamente

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \log f(x)})' = \dots$$

Lezione del 4/11/2002 (2 ore): Ci poniamo ora la questione della derivabilità dell'inversa di una funzione derivabile (ed invertibile).

TEOREMA (Derivata della funzione inversa): Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua e strettamente crescente, $g : (c, d) \rightarrow (a, b)$ la sua inversa (con $c = f(a)$, $d = f(b)$). Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, e $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$. In altre parole,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Dimostrazione: Osserviamo che se *sapessimo già* che la funzione inversa g è derivabile in y_0 , la formula per la derivata di g sarebbe facilissima da trovare. Infatti $g(f(x)) = x$, e derivando ambo i membri si ha $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1$, da cui la formula voluta.

Siccome però non sappiamo che g è derivabile in y_0 , dobbiamo proprio trovare il limite del rapporto incrementale $(g(y_0 + h) - g(y_0))/h$ per $h \rightarrow 0$.

Se poniamo $y_0 + h = f(x_0 + k)$, applicando la g ad ambo i membri troviamo $g(y_0 + h) = x_0 + k = g(y_0) + k$, da cui $g(y_0 + h) - g(y_0) = k$. Siccome sappiamo che con le nostre ipotesi la funzione inversa g è continua, vediamo che quando $h \rightarrow 0$ anche $k \rightarrow 0$. Dunque

$$g'(y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{f(x_0 + k) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Q.E.D.

Utilizziamo per esempio questo teorema per trovare la derivata di $\arcsin y$:

$$\begin{aligned} (\arcsin y)' &= \frac{1}{(\sin)'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos \arcsin y} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga troviamo che $(\arccos y)' = -1/\sqrt{1 - y^2}$, e che $(\arctan y)' = 1/(1 + y^2)$ (per quest'ultima formula, si ricordi l'identità $\cos^2 \alpha = 1/(1 + \tan^2 \alpha)$).

Grazie a questi risultati, determiniamo la semplice relazione che sussiste tra le funzioni arcoseno e arcocoseno, e ci divertiamo a studiare la funzione $f(x) = \arcsin \sin x$.

Ora abbiamo a disposizione un arsenale di risultati sufficiente a calcolare le derivate di tutte le funzioni esprimibili in termini di funzioni elementari tramite operazioni algebriche e di composizione. Quindi, in linea di principio, siamo in grado di studiare l'andamento di un gran numero di funzioni studiando il segno delle loro derivate.

Come abbiamo accennato nella lezione dello scorso 14 ottobre, per determinare in modo più accurato l'andamento del grafico di una funzione, è utile saper trovare gli intervalli di concavità e di convessità del grafico stesso.

Cominciamo con una definizione rigorosa di convessità *per una funzione derivabile*: vedremo poi come si possa dare una definizione più generale, valida anche per funzioni non derivabili.

Definizione: Diciamo che una funzione derivabile $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è *convessa sull'intervallo* $[a, b]$ se il grafico di f giace tutto al di sopra di ogni retta

tangente al grafico stesso, condotta per un punto qualunque di $[a, b]$. Con linguaggio simbolico, vogliamo che per ogni $x_0 \in [a, b]$ e per ogni $x \in [a, b]$ valga

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Se vale sempre la disuguaglianza opposta, diremo che la funzione è *concava*.

Se disegniamo il grafico di una funzione convessa, osserviamo come la pendenza delle rette tangenti cresca man mano che il punto di tangenza si sposta verso destra: in effetti, questa è una caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili!

TEOREMA: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Allora f è convessa se e solo se la funzione derivata f' è *crescente* sull'intervallo $[a, b]$.

Dimostrazione: Supponiamo che f sia convessa, e prendiamo x_1, x_2 in $[a, b]$. Per la disuguaglianza di convessità abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1), \\ f(x) &\geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2), \end{aligned}$$

disuguaglianze valide per ogni $x \in [a, b]$. In particolare, prendiamo $x = x_2$ nella prima disuguaglianza, $x = x_1$ nella seconda, e sommiamo: si ottiene

$$(f'(x_1) - f'(x_2)) \cdot (x_2 - x_1) \leq 0,$$

che è proprio la crescita della funzione derivata.

Viceversa, supponiamo che la funzione derivata sia crescente e prendiamo $x_0 \in [a, b]$. Consideriamo la funzione derivabile $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$. Si ha $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, per cui g' è una funzione crescente che è negativa per $x < x_0$, mentre è positiva per $x > x_0$. Ne deduciamo che la funzione g ha un *minimo assoluto* per $x = x_0$. Poichè $g(x_0) \geq 0$, abbiamo $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$: questa è proprio la disuguaglianza di convessità! Q.E.D.

Grazie a questo teorema, abbiamo un comodo criterio di convessità per funzioni la cui derivata sia ancora derivabile (ossia per funzioni derivabili due volte): una funzione f derivabile due volte in un intervallo sarà *convessa* se $f''(x) \geq 0$ per ogni x nell'intervallo, sarà invece *concava* se $f''(x) \leq 0$ in ogni punto x dell'intervallo.

Concludiamo la lezione accennando alla definizione generale di convessità, valida per funzioni qualunque definite su un intervallo: $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ si dice convessa se per ogni $x_1, x_2 \in [a, b]$ e per ogni $t \in [0, 1]$ vale che

$$f(tx_2 + (1 - t)x_1) \leq tf(x_2) + (1 - t)f(x_1).$$

Geometricamente, questo significa che il grafico della funzione f tra i punti x_1 e x_2 , giace tutto al di sotto del segmento che congiunge i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Lezione del 5/11/2002 (1 ora): Continuiamo il nostro discorsetto sulla definizione generale di funzione convessa. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è convessa e $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$, vediamo (senza dimostrarlo) che il grafico di f è tutto *sotto* la retta che passa per $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ quando x varia nell'intervallo (x_1, x_2) , mentre giace *sopra* la stessa retta quando x è *fuori* dall'intervallo (x_1, x_2) .

Grazie a questo, vediamo che per una funzione convessa che sia anche derivabile è verificata la definizione che abbiamo dato ieri (cioè il grafico della funzione giace al di sopra della retta tangente condotta per un qualunque punto).

Vediamo anche come si può dimostrare che una funzione convessa è *continua* nei punti interni dell'intervallo $[a, b]$, mentre può essere discontinua agli estremi dell'intervallo.

Concludiamo la lezione dimostrando due “limiti fondamentali” di cui finora ci siamo fidati senza una deduzione rigorosa: affermiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0$$

per ogni $a > 1$ e per ogni $b > 0$.

Cominciamo con l'osservare che, grazie alla disuguaglianza di Bernoulli, $a^n / \sqrt{n} = (1 + (a-1))^n / \sqrt{n} \geq (1 + n(a-1)) / \sqrt{n} = 1/\sqrt{n} + \sqrt{n}(a-1) \rightarrow +\infty$, e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n}} = +\infty$.

Si ha poi, per $x > 0$,

$$\frac{a^x}{\sqrt{x}} \geq \frac{a^{[x]}}{\sqrt{[x]+1}} = \frac{a^{[x]+1}}{a\sqrt{[x]+1}}.$$

La quantità a destra, per $x \rightarrow +\infty$ tende a $+\infty$ grazie al limite di successione appena visto. Ne consegue che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{\sqrt{x}} = +\infty$. Da questo segue facilmente il primo dei due limiti fondamentali scritti sopra, in quanto

$$\frac{a^x}{x^b} = \left(\frac{a^{x/(2b)}}{\sqrt{x}} \right)^{2b} \dots$$

Per verificare il secondo “limite fondamentale”, è sufficiente cambiare variabile ponendo $y = \log x$.