Primi passi tra i sistemi dinamici

Nicola Sansonetto

PLS Corso di Aggiornamento per Insegnanti - **GeoGebra via Modelli Matematici**
Dipartimento di Informatica, Università degli Studi di Verona

19/09/2017

Linee guida di oggi

1. Introduzione
2. Sistemi dinamici differenziali

Idea di base

Idea di base: i sistemi discreti sono in genere più complicati di quelli "differenziali"!!!

A questo livello non è semplice definire cosa sia un sistema dinamico (differeziale): possiamo però di che
Un sistema dinamico differenziale è un'equazione differenziale ordinaria assieme all'insieme delle sue soluzioni, detto anche *flusso*.
Mentre *un'equazione differenziale ordinaria è una relazione funzionale tra una funzione reale di variabile reale e le sue derivate.*

La dinamica Malthusiana

- **Individuazione del problema.** Consideriamo una popolazione (= numero di individui) isolata (non interagente con altre popolazioni) e avente risorse pressoché illimitate.[1]
- **Assunzioni.**
  - assumiamo che la popolazione sia molto numerosa;
  - ogni individuo si riproduce ad intervalli regolari e produce un numero costante di discendenti;
  - gli individui si riproducono a istanti equidistribuiti.
- **Individuazione delle variabili.**
  - la numerosità della popolazione permette di rappresentare la popolazione mediante una funzione (derivabile) $n : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \ni n(t)$.
  - Le ipotesi sulla modalità riproduttiva fanno si che la velocità di variazione della popolazione in un istante t sia direttamente proporzionale alla popolazione presente in quell'istante:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \kappa \, n(t) \tag{1}$$

    con $\kappa > 0$.

[1] Una tale situazione si può trovare nelle popolazioni batteriche.

La dinamica Malthusiana: analisi del problema

- Analisi del problema.

Esercizio.

Verificare che per ogni $n_0 \in \mathbb{R}$ la funzione $n(t) = n_0 e^{\kappa t}$ è soluzione di (1).

Interpretazione modellistica della soluzione. Il parametro n_0 indica la popolazione all'istante $t = 0$, mentre, per $t > 0$ si ha il numero di individui all'istante t.

Problema

Dimostrare che la soluzione $t \longmapsto n_0\, e^{\kappa t}$ è l'unica soluzione tale che $n(0) = n_0$.

La dinamica Malthusiana: analisi del problema

- **Report.**

Il modello logistico

Introduciamo delle correzioni al modello di Malthus, ad esempio supponiamo che le risorse siano **limitate**, così che al crescere della popolazione la velocità di crescita rallenti, ad esempio quadraticamente

$$\frac{dn(t)}{dt} = \big(\kappa - hn(t)\big)\, n(t)\,.^{2} \qquad (2)$$

In primo luogo proviamo a risolvere l'equazione logistica (2) usando GeoGebra

[2] Questo modello è stato proposto da Verhulst nel 1860.

Warm–up

Per determinare soluzioni di equazioni differenziali ordinarie GeoGebra dispone di uno strumento:

$$\texttt{RisolviEdo}[\cdots]$$

Esploriamo assieme questo comando cercando di risolvere alcune semplici EDO:

- $y'(x) = a\,x$;
- L'equazione di Malthus $y'(x) = \kappa\, y(x)$;
- $y''(x) = -\omega^2\, y(x)$;
- $y''(x) = \lambda^2\, y(x)$

Il modello logistico

Q. *Cosa restituisce GeoGebra per il modello logistico?*

Proviamo che l'integrale generale di (2) è

$$n(t) = \frac{\kappa n_0}{h\, n_0 + (\kappa - h\, n_0)\, e^{-\kappa t}}$$

in cui, come in precedenza, n_0 rappresenta il numeri di individui all'istante $t = 0$.

Q. *Quali informazioni possiamo ricavare?*

Tracciamo il grafico della soluzione per alcuni valori di n_0.

Sistemi dinamici differenziali

Q. *Per capire l'andamento delle soluzioni, era veramente necessario risolvere l'equazione differenziale?*

In genere non si sanno risolvere le EDO!!!

Assumiamo un punto di vista diverso ...