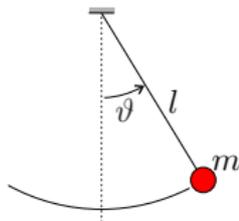


Il tortuoso percorso del determinismo nella Meccanica Classica

Giancarlo Benettin

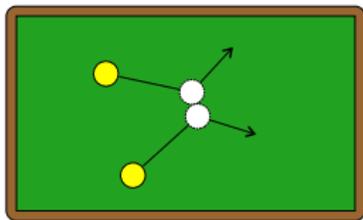
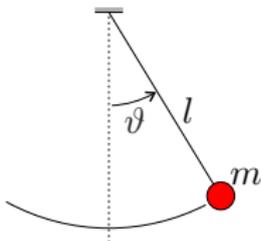
Università di Padova
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Un pomeriggio meccanico a Verona, 28 aprile 2023



?





“meccanicismo celeste”

Determinismo

- Le leggi della meccanica sono tali che lo “*stato*” presente di un sistema determina univocamente il futuro (e il passato)

stato: un opportuno insieme di variabili (es.: posizione e velocità di tutte le particelle in gioco); “dato iniziale”

Determinismo

- Le leggi della meccanica sono tali che lo “**stato**” presente di un sistema determina univocamente il futuro (e il passato)

stato: un opportuno insieme di variabili (es.: posizione e velocità di tutte le particelle in gioco); “dato iniziale”

- *Illimitata perfettibilità*: una conoscenza *sufficientemente precisa* del sistema, e del dato iniziale, consentono previsioni *arbitrariamente accurate*

Determinismo

- Le leggi della meccanica sono tali che lo “**stato**” presente di un sistema determina univocamente il futuro (e il passato)
stato: un opportuno insieme di variabili (es.: posizione e velocità di tutte le particelle in gioco); “dato iniziale”
- *Illimitata perfettibilità*: una conoscenza *sufficientemente precisa* del sistema, e del dato iniziale, consentono previsioni *arbitrariamente accurate*

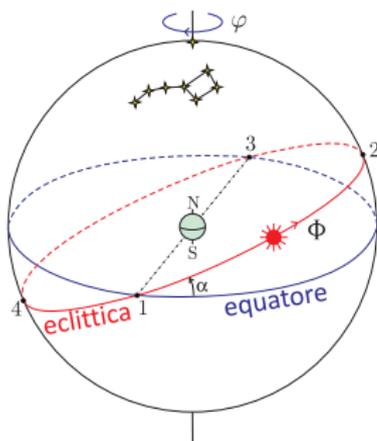
Sistemi aleatori

Imprevedibilità intrinseca
(atomisti, V sec. a.C.)

Al più: leggi di natura probabilistica



Determinismo: modello a due sfere



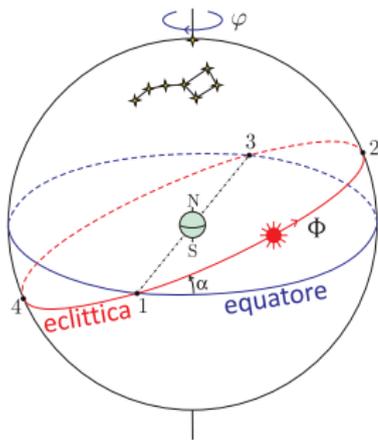
Due angoli: $\varphi \mapsto \varphi + \omega t$ (giorno)

$\Phi \mapsto \Phi + \Omega t$ (anno)

Spiega:

- equinozi, solstizi, stagioni
- durata del giorno e della notte
- alternarsi delle costellazioni

Determinismo: modello a due sfere



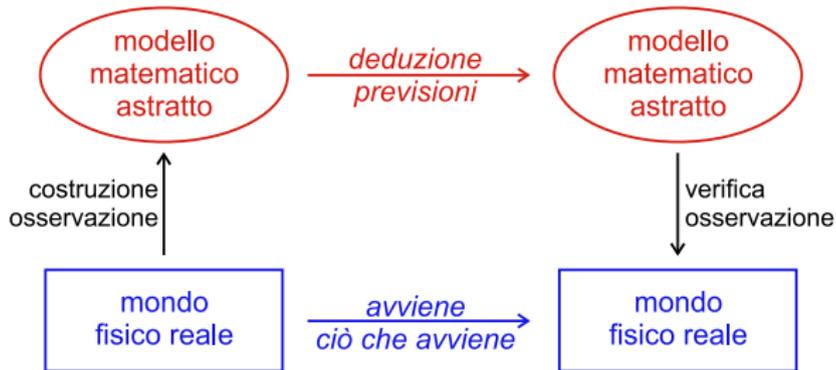
Due angoli: $\varphi \mapsto \varphi + \omega t$ (giorno)

$\Phi \mapsto \Phi + \Omega t$ (anno)

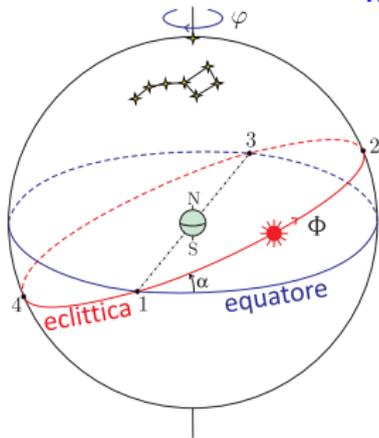
Spiega:

- equinozi, solstizi, stagioni
- durata del giorno e della notte
- alternarsi delle costellazioni

“Modello”:

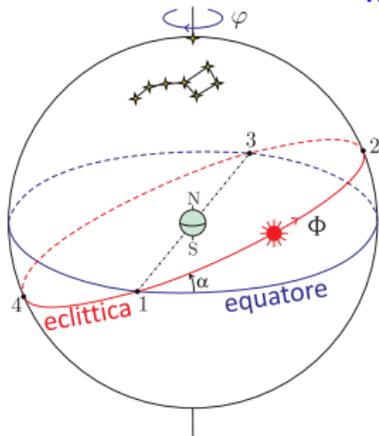


Modello difettoso



Non spiega:
durata esatta delle stagioni
i moti dei pianeti
...

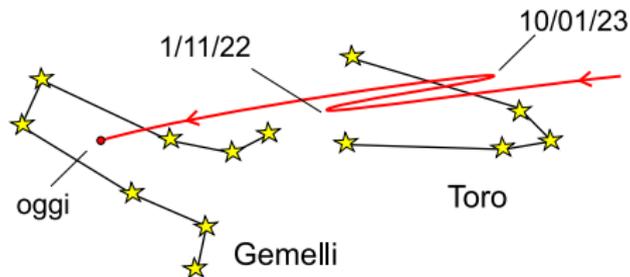
Modello difettoso



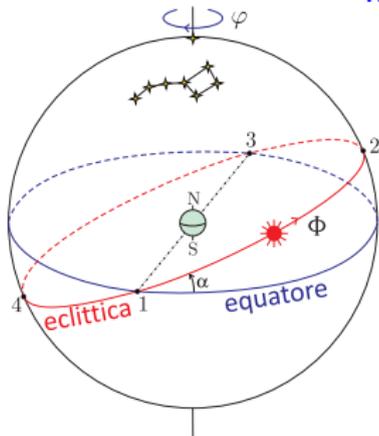
Non spiega:
durata esatta delle stagioni
i moti dei pianeti
...

Pianeti :
moti complicati
disuniformità

*il moto retrogrado di Marte,
inverno 2022–23:*

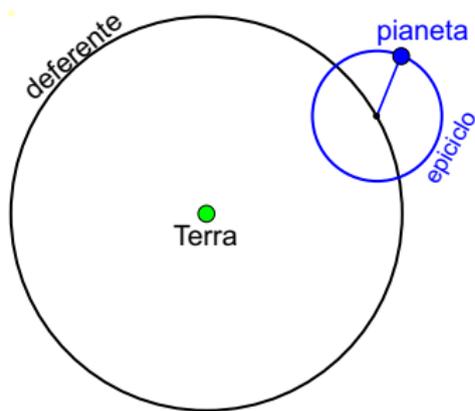


Modello difettoso

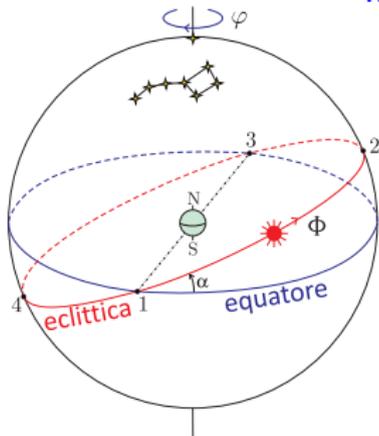


Non spiega:
durata esatta delle stagioni
i moti dei pianeti
...

Modelli più complicati :
Tolomeo

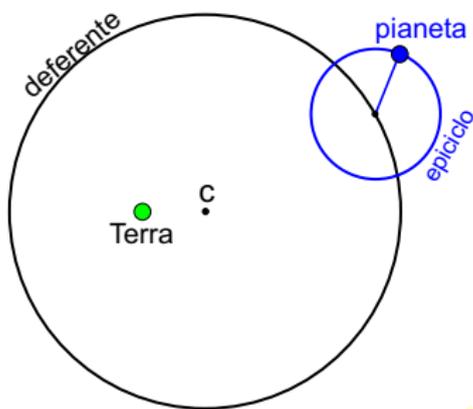


Modello difettoso

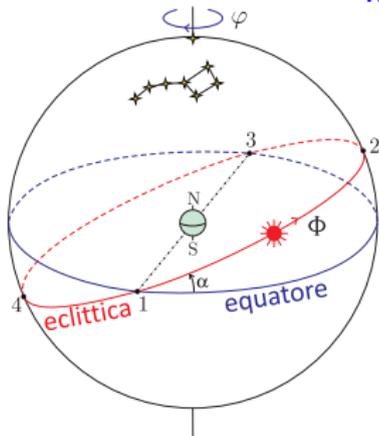


Non spiega:
durata esatta delle stagioni
i moti dei pianeti
...

Modelli più complicati :
Tolomeo



Modello difettoso

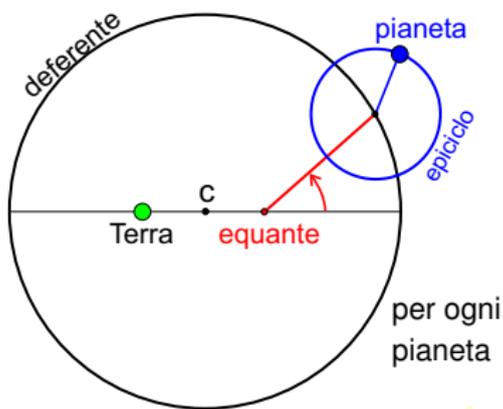


Non spiega:

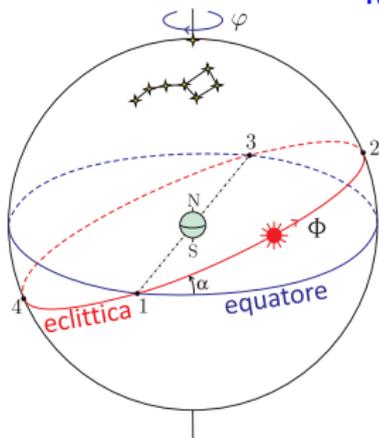
durata esatta delle stagioni
i moti dei pianeti

...

Modelli più complicati :
Tolomeo



Modello difettoso



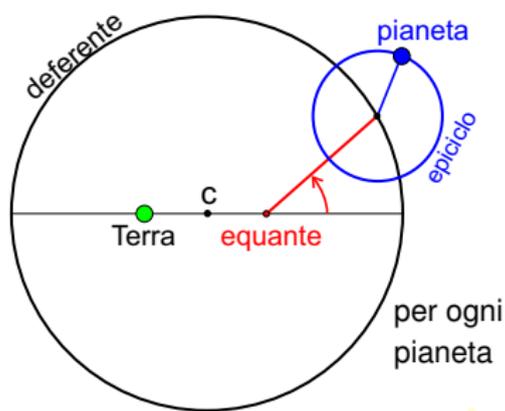
Non spiega:
durata esatta delle stagioni
i moti dei pianeti
...

Modelli più complicati :

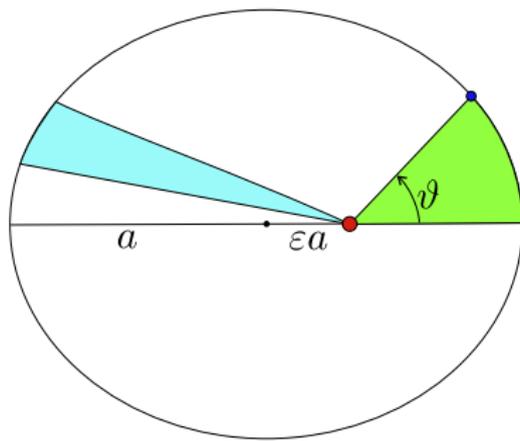
Tolomeo

Copernico semplifica ,
non migliora veramente

Modellizzazione
perdente !



Verso un modello migliore



Leggi di Keplero: moti su ellissi
legge delle aree
 $T^2 = K a^3$

La rivoluzione scientifica (Newton, *Principia* 1687)



La rivoluzione scientifica (Newton, *Principia* 1687)



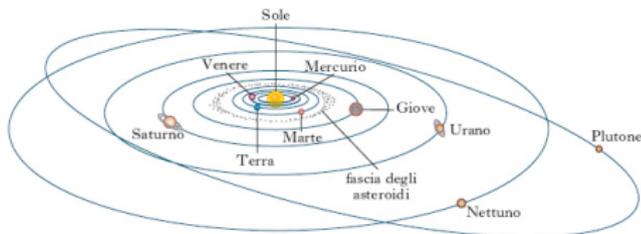
$$1) \vec{F} = m\vec{a}$$

$$2) F = G \frac{Mm}{r^2}$$

+ il calcolo differenziale

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$$

La rivoluzione scientifica (Newton, *Principia* 1687)



$$1) \vec{F} = m\vec{a}$$

$$2) F = G \frac{Mm}{r^2}$$

+ il calcolo differenziale

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$$

\Leftrightarrow Leggi di Keplero
(+ fisica terrestre...)

La rivoluzione scientifica (Newton, *Principia* 1687)

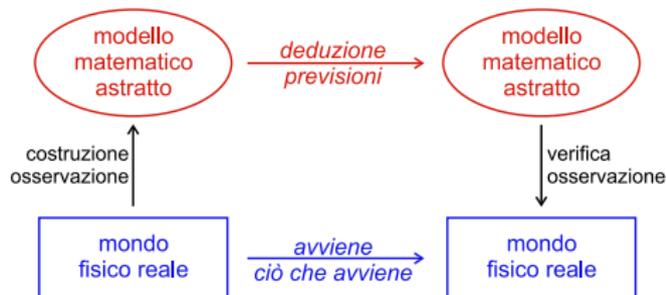


$$1) \vec{F} = m\vec{a}$$

$$2) F = G \frac{Mm}{r^2}$$

+ il calcolo differenziale

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$$



E' il paradigma vincente !

- sviluppo, generalizzazioni; rigore matematico

Eulero

Lagrange

Laplace...

... Cauchy ...



“meccanica analitica” – XVIII sec

E' il paradigma vincente !

- sviluppo, generalizzazioni; rigore matematico

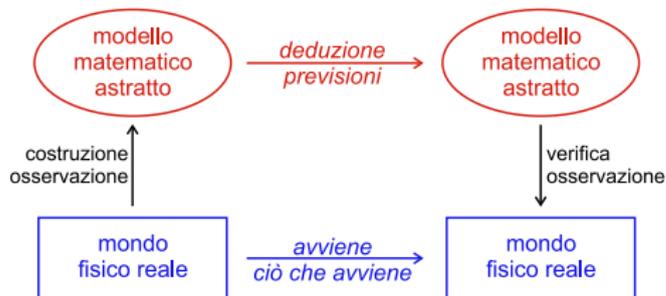
Eulero

Lagrange

Laplace...

... Cauchy ...

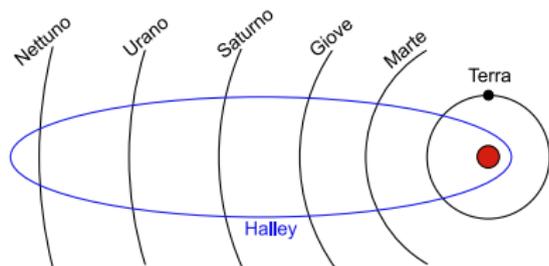
“meccanica analitica” – XVIII sec



nel modello astratto
Il determinismo diventa
un teorema di matematica
(Cauchy, inizio '800)

Crescendo *impressionante* di conferme

- include fenomeni nuovi: es. orbite schiacciate delle comete (Halley nel 1682 prevede il ritorno della “sua” cometa nel 1757; avverrà nel 1758)



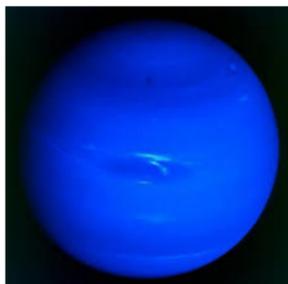
- include le maree; la forma schiacciata della Terra

- include : effetti dell'attrazione reciproca dei pianeti ! **NEW!**
Laplace : nuovi metodi di calcolo, correzioni ai moti planetari ellittici
osservazioni molto più precise; metodo statistico
calcoli e osservazioni combaciano !
leggi di Keplero = prima approssimazione

- include : effetti dell'attrazione reciproca dei pianeti ! **NEW!**
Laplace : nuovi metodi di calcolo, correzioni ai moti planetari ellittici
osservazioni molto più precise; metodo statistico
calcoli e osservazioni combaciano !

leggi di Keplero = prima approssimazione

- La scoperta di Nettuno:



Nettuno

1781: Herschel scopre Urano; $T = 84$ anni

1821 ss: il moto presenta irregolarità inspiegabili

Correzioni alla legge di Newton (al modello) ?

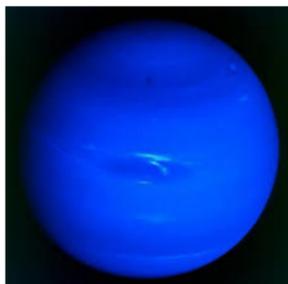
Corpo celeste sconosciuto ?

- include : effetti dell'attrazione reciproca dei pianeti ! **NEW!**

Laplace : nuovi metodi di calcolo, correzioni ai moti planetari ellittici
osservazioni molto più precise; metodo statistico
calcoli e osservazioni combaciano !

leggi di Keplero = prima approssimazione

- La scoperta di Nettuno:



Nettuno

1781: Herschel scopre Urano; $T = 84$ anni

1821 ss: il moto presenta irregolarità inspiegabili

Correzioni alla legge di Newton (al modello) ?

Corpo celeste sconosciuto ?

Adams, Le Verrier, 1846: ne calcolano la posizione

Galle, 1846, trova il pianeta dove previsto (diff. 1°)

fiducia assoluta nel modello

25 settembre 1846, Galle a Le Verrier:

Signore, il pianeta di cui voi avete segnalato la posizione esiste realmente. Lo stesso giorno, in cui ho ricevuto la vostra lettera, trovai una stella di 8a grandezza, che non era segnata nella collezione di carte celesti pubblicate dall'Accademia Reale di Berlino. L'osservazione del giorno seguente decise che era il pianeta cercato.

Le Verrier a Galle:

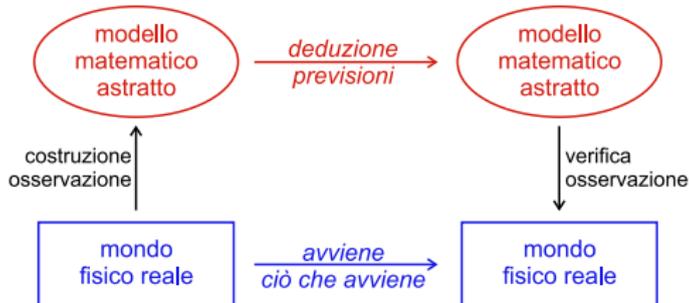
Grazie a voi, eccoci definitivamente in possesso del nuovo mondo. (...) Il Bureau des Longitudes si è qui pronunciato per Nettuno. Il segno: un tridente.

Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 1812 :

“ Dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell’universo come effetto del suo stato anteriore e come causa del suo stato futuro. Un’intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui la natura è animata e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se fosse abbastanza vasta da sottoporre questi dati ad analisi abbraccerebbe nella stessa formula i moti dei corpi più grandi dell’universo e quelli dell’atomo più leggero: per essa non ci sarebbe nulla d’incerto, ed il futuro come il passato sarebbe presente ai suoi occhi ”

Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 1812 :

“ Dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell’universo come effetto del suo stato anteriore e come causa del suo stato futuro. Un’intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui la natura è animata e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se fosse abbastanza vasta da sottoporre questi dati ad analisi abbraccerebbe nella stessa formula i moti dei corpi più grandi dell’universo e quelli dell’atomo più leggero: per essa non ci sarebbe nulla d’incerto, ed il futuro come il passato sarebbe presente ai suoi occhi ”



*Radiosa
visione
deterministica*

Oltre la visione meccanico–deterministica
la crisi della meccanica tra '800 e '900

- la meccanica non è tutto : **elettromagnetismo**
Quale è fondamentale ?

Oltre la visione meccanico–deterministica *la crisi della meccanica tra '800 e '900*

- la meccanica non è tutto : **elettromagnetismo**
Quale è fondamentale ?

- fine XIX – inizio XX sec :
ripensamento interno alla meccanica

Prevedibilità ?

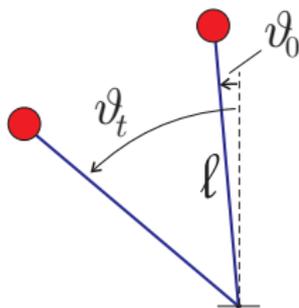
→ moderna nozione di moto caotico



Henri Poincaré (1854 – 1912) :

dipendenza “sensibile” dal dato iniziale

Il mio esempio favorito

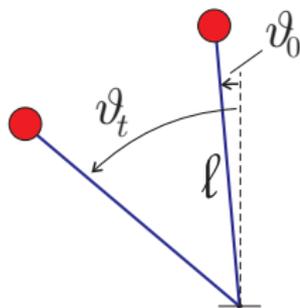


$$l = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = +\omega^2 \sin \vartheta$$

$$\simeq \omega^2 \vartheta ; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \simeq 10 \text{ sec}^{-1}$$

Il mio esempio favorito



$$l = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = +\omega^2 \sin \vartheta$$

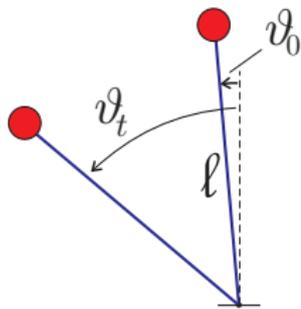
$$\simeq \omega^2 \vartheta ; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \simeq 10 \text{ sec}^{-1}$$

Soluzione, per $v_0 = 0$:

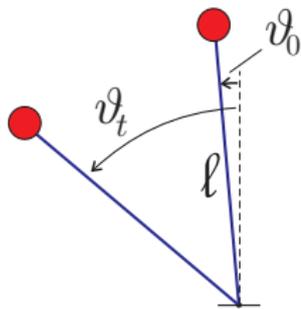
$$\vartheta_t = \frac{1}{2} \vartheta_0 (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \simeq \frac{1}{2} \vartheta_0 e^{\omega t}$$

Quanto tempo per raggiungere ϑ_t ?

$$t \simeq \frac{1}{\omega} \log \frac{2\vartheta_t}{\vartheta_0}$$

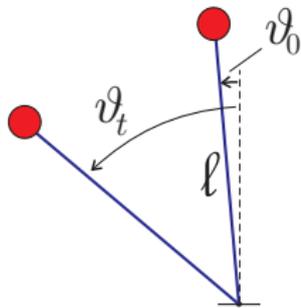


$$t = \frac{1}{\omega} \log \frac{2\vartheta_t}{\vartheta_0}$$



$$t = \frac{1}{\omega} \log \frac{2\vartheta_t}{\vartheta_0} = \frac{1}{\omega} \log \frac{1}{\vartheta_0}$$

$$\vartheta_t = 0.5 \text{ rad}$$

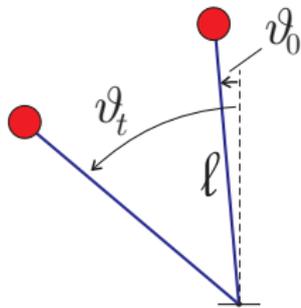


$$t = \frac{1}{\omega} \log \frac{2\vartheta_t}{\vartheta_0} = \frac{1}{\omega} \log \frac{1}{\vartheta_0}$$

$$\vartheta_t = 0.5 \text{ rad}$$

$$\vartheta_0 = 10^{-3} \text{ rad}$$

$$t = 0.7 \text{ sec}$$



$$t = \frac{1}{\omega} \log \frac{2\vartheta_t}{\vartheta_0} = \frac{1}{\omega} \log \frac{1}{\vartheta_0}$$

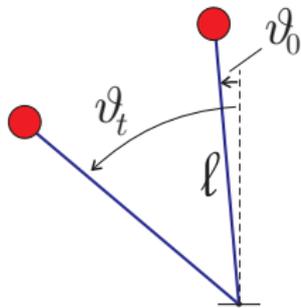
$$\vartheta_t = 0.5 \text{ rad}$$

$$\vartheta_0 = 10^{-3} \text{ rad}$$

$$10^{-6}$$

$$t = 0.7 \text{ sec}$$

$$1.4$$



$$t = \frac{1}{\omega} \log \frac{2\vartheta_t}{\vartheta_0} = \frac{1}{\omega} \log \frac{1}{\vartheta_0}$$

$$\vartheta_t = 0.5 \text{ rad}$$

$$\vartheta_0 = 10^{-3} \text{ rad}$$

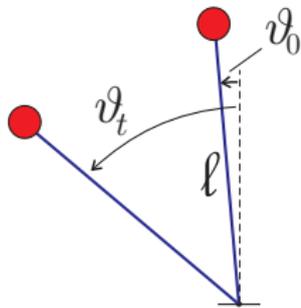
$$t = 0.7 \text{ sec}$$

$$10^{-6}$$

$$1.4$$

$$10^{-12}$$

$$2.8$$



$$t = \frac{1}{\omega} \log \frac{2\vartheta_t}{\vartheta_0} = \frac{1}{\omega} \log \frac{1}{\vartheta_0}$$

$$\vartheta_t = 0.5 \text{ rad}$$

$$\vartheta_0 = 10^{-3} \text{ rad}$$

$$t = 0.7 \text{ sec}$$

$$10^{-6}$$

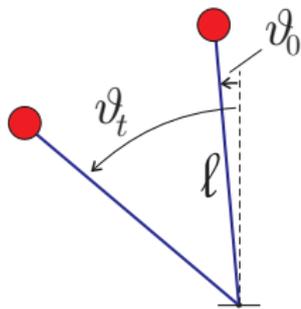
$$1.4$$

$$10^{-12}$$

$$2.8$$

$$10^{-24}$$

$$5.6$$



$$t = \frac{1}{\omega} \log \frac{2\vartheta_t}{\vartheta_0} = \frac{1}{\omega} \log \frac{1}{\vartheta_0}$$

$$\vartheta_t = 0.5 \text{ rad}$$

$$\vartheta_0 = 10^{-3} \text{ rad}$$

$$t = 0.7 \text{ sec}$$

$$10^{-6}$$

$$1.4$$

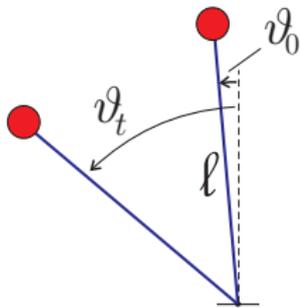
attrazione della Luna

$$10^{-12}$$

$$2.8$$

$$10^{-24}$$

$$5.6$$



$$t = \frac{1}{\omega} \log \frac{2\vartheta_t}{\vartheta_0} = \frac{1}{\omega} \log \frac{1}{\vartheta_0}$$

$$\vartheta_t = 0.5 \text{ rad}$$

$$\vartheta_0 = 10^{-3} \text{ rad}$$

$$t = 0.7 \text{ sec}$$

$$10^{-6}$$

$$1.4$$

attrazione della Luna

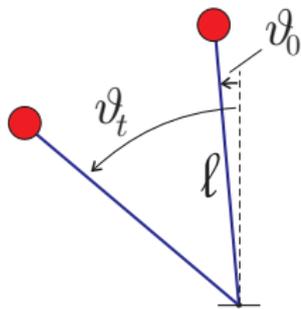
$$10^{-12}$$

$$2.8$$

una persona a un metro

$$10^{-24}$$

$$5.6$$



$$t = \frac{1}{\omega} \log \frac{2\vartheta_t}{\vartheta_0} = \frac{1}{\omega} \log \frac{1}{\vartheta_0}$$

$$\vartheta_t = 0.5 \text{ rad}$$

$$\vartheta_0 = 10^{-3} \text{ rad}$$

$$t = 0.7 \text{ sec}$$

$$10^{-6}$$

$$1.4$$

attrazione della Luna

$$10^{-12}$$

$$2.8$$

una persona a un metro

$$10^{-24}$$

$$5.6$$

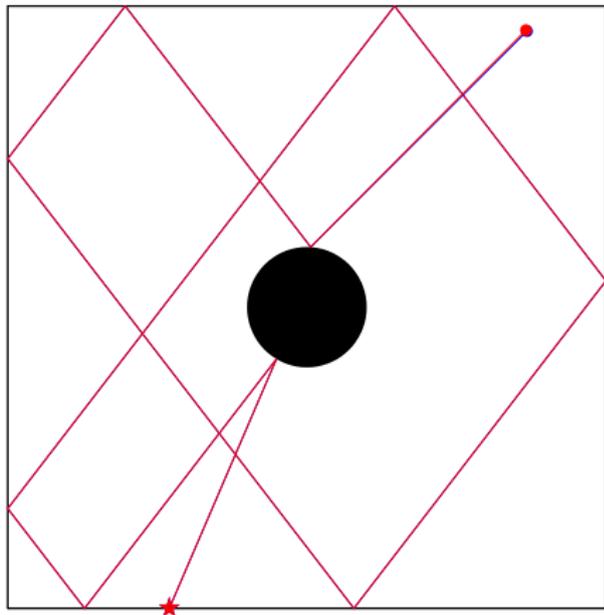
una zanzara a un chilometro

dependenza sensibile dal dato iniziale

Un biliardo semplificato

$$n = 9, \quad m = 2$$

seconda traiettoria,
 $\Delta\vartheta = 10^{-6}$ rad
9 collisioni



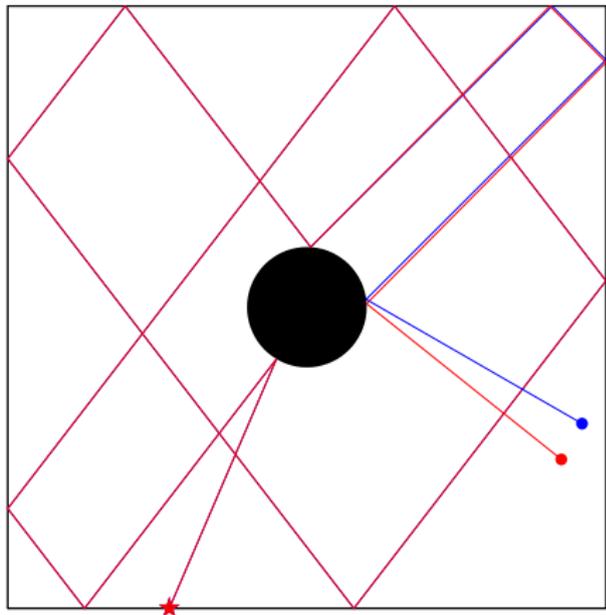
Un biliardo semplificato

$$n = 12, \quad m = 3$$

seconda traiettoria,

$$\Delta\vartheta = 10^{-6} \text{ rad}$$

9 collisioni
12 collisioni



Un biliardo semplificato

$n = 15$, $m = 3$

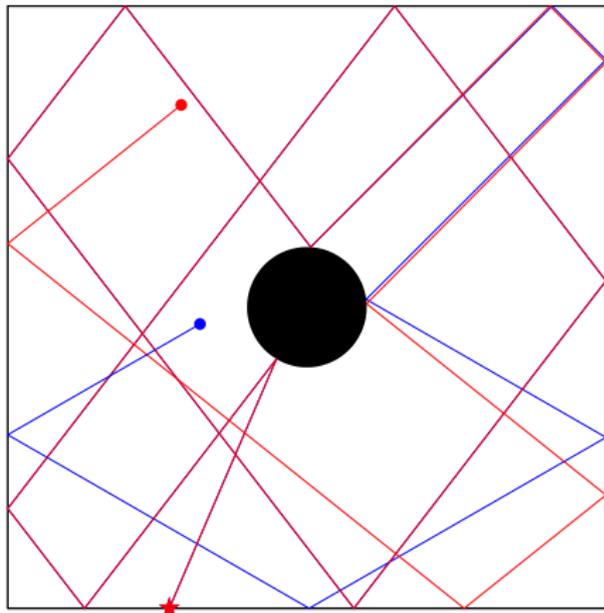
seconda traiettoria,

$\Delta\vartheta = 10^{-6}$ rad

9 collisioni

12 collisioni

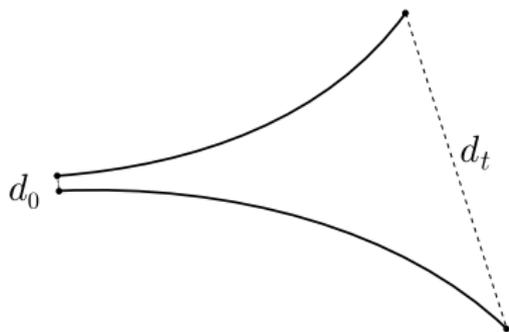
15 collisioni



dipendenza sensibile dal dato iniziale

dati iniziali generici !

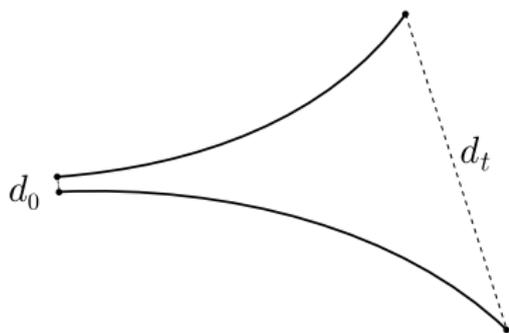
Sistema “caotico”:



$$d_t \simeq d_0 e^{\lambda t}, \quad \lambda > 0$$

instabilità: “esponenziale”
per un insieme importante di moti
(misura positiva)

Sistema “caotico”:



$$d_t \simeq d_0 e^{\lambda t}, \quad \lambda > 0$$

instabilità: “esponenziale”
per un insieme importante di moti
(misura positiva)

pendolino: $\lambda = \omega = 10 \text{ sec}^{-1}$; $e^{10 \times 5.6} \simeq 10^{24}$

L' "effetto farfalla"



Morpho-Menelaus



l'uragano *Harvey* (Texas, 2017)

Eduard N. Lorenz (1968; una conferenza, 1972):

"Can the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?"

L' "effetto farfalla"



Morpho-Menelaus



l'uragano *Harvey* (Texas, 2017)

Eduard N. Lorenz (1968; una conferenza, 1972):

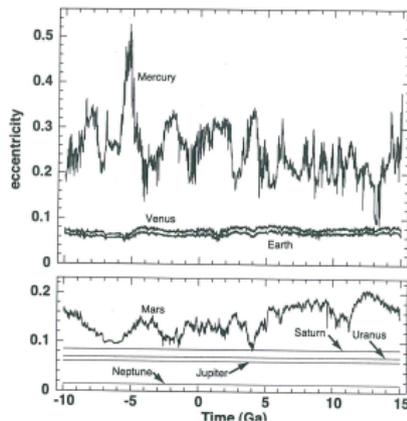
"Can the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?"

In condizioni di turbolenza può accadere
(tempi: un paio di settimane)

Nel Sistema Solare ?

- **Mercurio**: moti caotici pronunciati ,
 ≈ 10 milioni di anni
- **Venere, Terra**: oscillazioni caotiche limitate
- **Mars**: comportamento intermedio
- **pianeti esterni**: sottili zone caotiche ?

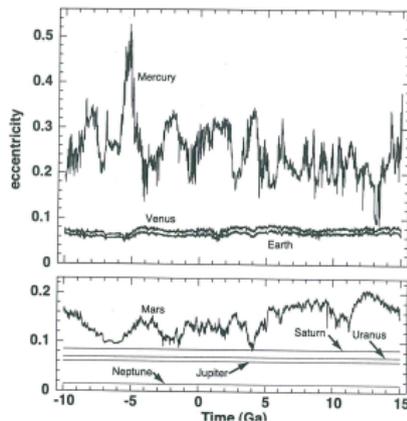
(1990 – oggi; J. Laskar)



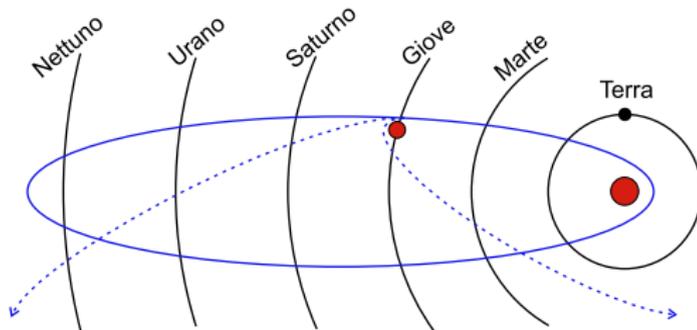
Nel Sistema Solare ?

- **Mercurio**: moti caotici pronunciati ,
 ≈ 10 milioni di anni
- **Venere, Terra**: oscillazioni caotiche limitate
- **Mars**: comportamento intermedio
- **pianeti esterni**: sottili zone caotiche ?

(1990 – oggi; J. Laskar)



- **comete**:
simili a biliardi,
qualche migliaio di anni

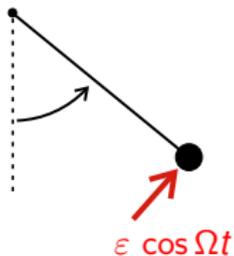


infiltrazioni di caos

Il pendolo “forzato”

Aggiungo una piccola
forzante periodica:

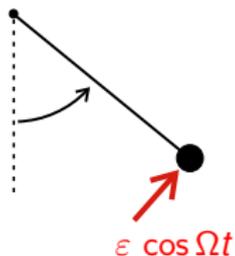
$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\omega^2 \sin \vartheta + \varepsilon \cos \Omega t$$



Il pendolo "forzato"

Aggiungo una piccola
forzante periodica:

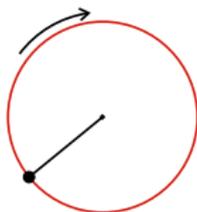
$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\omega^2 \sin \vartheta + \varepsilon \cos \Omega t$$



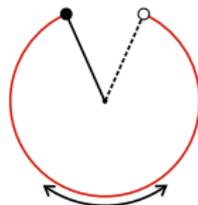
Senza forzante, $\varepsilon = 0$:



SSSS...



DDDD...

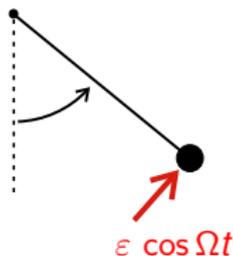


SDSD...

Il pendolo “forzato”

Aggiungo una piccola
forzante periodica:

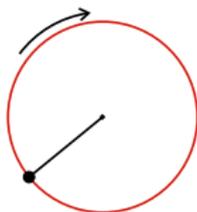
$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\omega^2 \sin \vartheta + \varepsilon \cos \Omega t$$



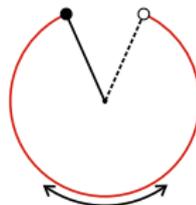
Senza forzante, $\varepsilon = 0$:



SSSS...



DDDD...

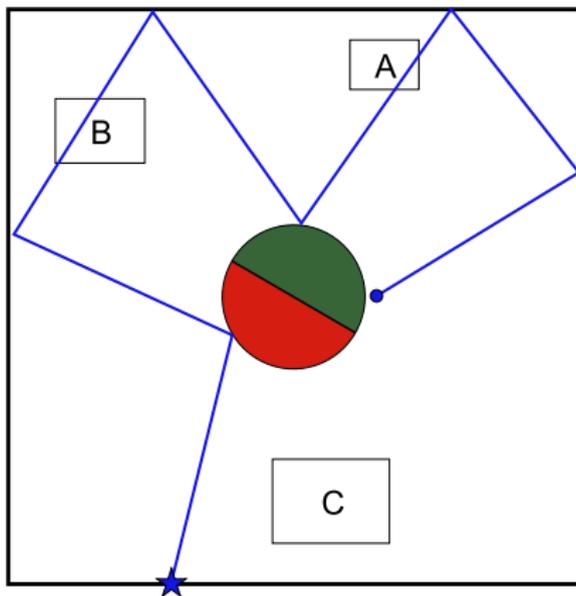


SDSD...

Teorema: per $\varepsilon > 0$ piccolo, **tutte** le sequenze sono possibili

Imprevedibilità \rightarrow probabilità ?

I moti caotici, irregolarissimi, **possono** diventare regolari dal punto di vista statistico (*“problema ergodico”, difficile*)



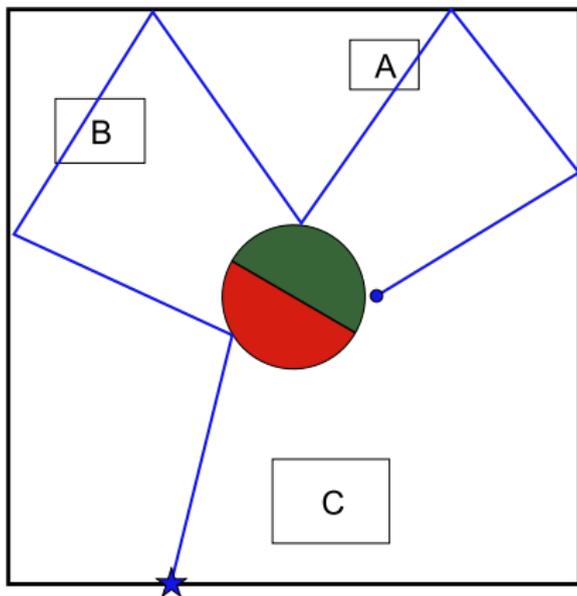
Biliardi caotici :

*una generica traiettoria
soddisfa “semplici”
proprietà statistiche*

(Ya. Sinai, 1962)

Imprevedibilità \rightarrow probabilità ?

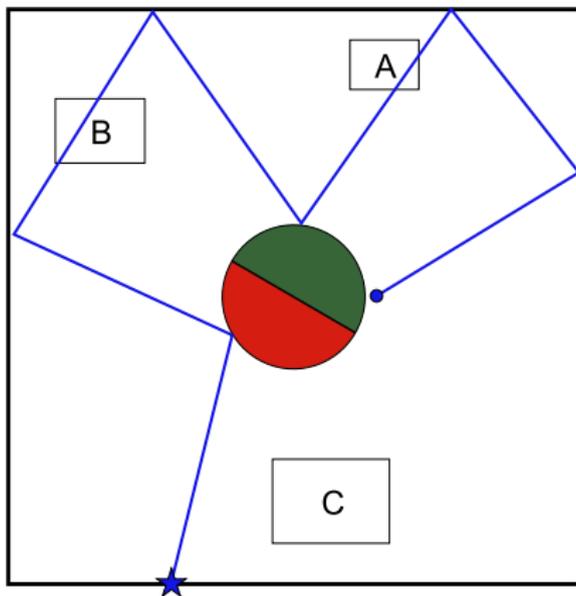
I moti caotici, irregolarissimi, **possono** diventare regolari dal punto di vista statistico (*"problema ergodico", difficile*)



probabilità
di essere in A, B, C...
proporzionale all'area

Imprevedibilità \rightarrow probabilità ?

I moti caotici, irregolarissimi, **possono** diventare regolari dal punto di vista statistico (*"problema ergodico"*, difficile)

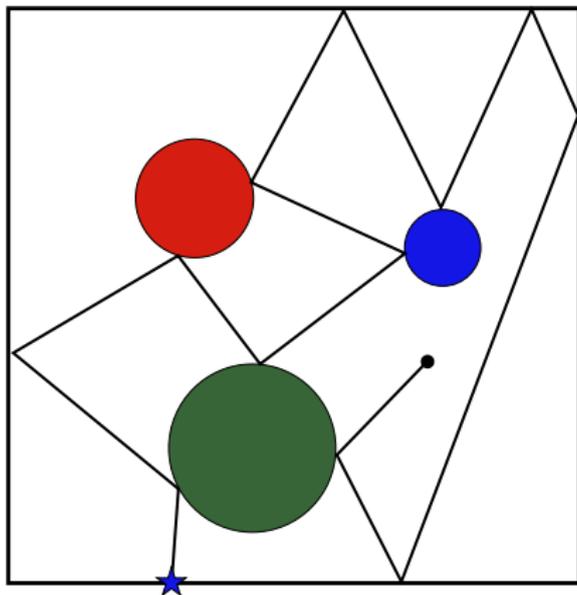


probabilità
di essere in A, B, C...
proporzionale all'area

probabilità dell'urto
proporzionale
alla lunghezza del bordo

Imprevedibilità \rightarrow probabilità ?

I moti caotici, irregolarissimi, **possono** diventare regolari dal punto di vista statistico (*“problema ergodico”, difficile*)

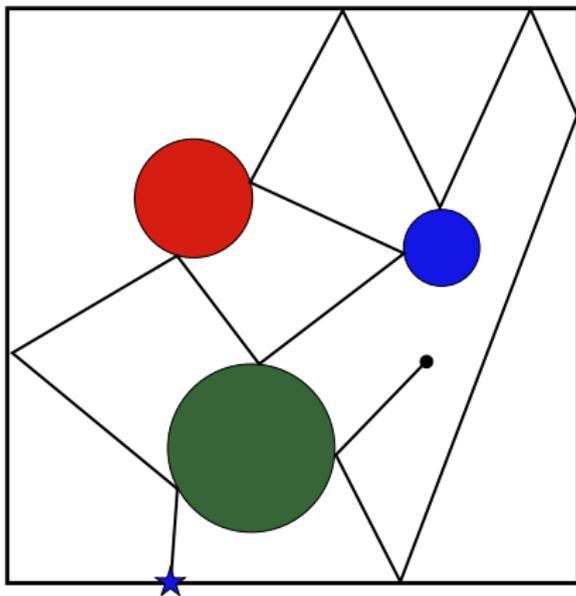


probabilità
di essere in A, B, C...
proporzionale all'area

probabilità dell'urto
proporzionale
alla lunghezza del bordo

Imprevedibilità \rightarrow probabilità ?

I moti caotici, irregolarissimi, **possono** diventare regolari dal punto di vista statistico (*"problema ergodico", difficile*)



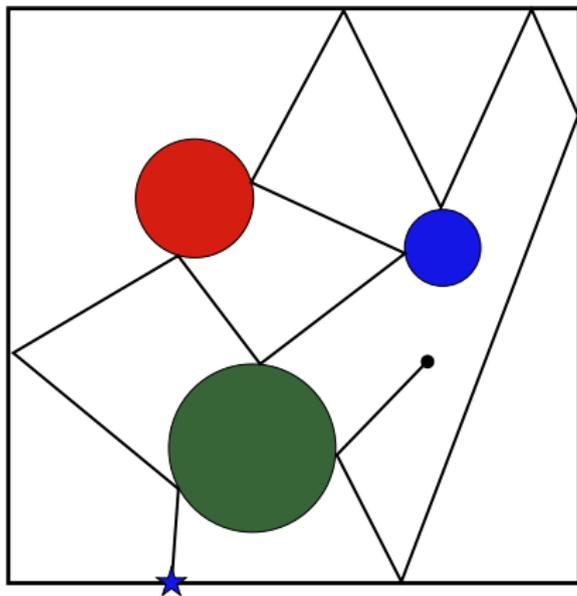
Imprevedibilità delle traiettorie



prevedibilità statistica

Imprevedibilità \rightarrow probabilità ?

I moti caotici, irregolarissimi, **possono** diventare regolari dal punto di vista statistico (*"problema ergodico"*, difficile)



dinamica deterministica
 \downarrow
precise leggi probabilistiche

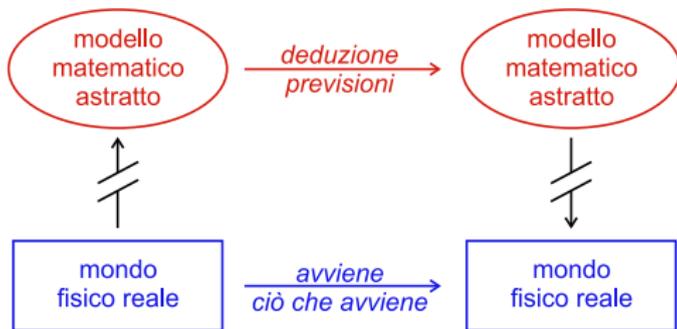


Conclusione ?

L'instabilità dei moti caotici
rende problematica
la modellizzazione

mod. deterministico,
traiettorie ?

mod. probabilistico,
leggi statistiche ?

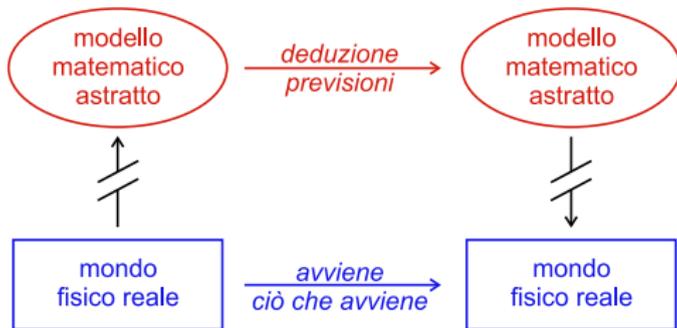


Conclusione ?

L'instabilità dei moti caotici
rende problematica
la modellizzazione

mod. deterministico,
traiettorie ?

mod. probabilistico,
leggi statistiche ?



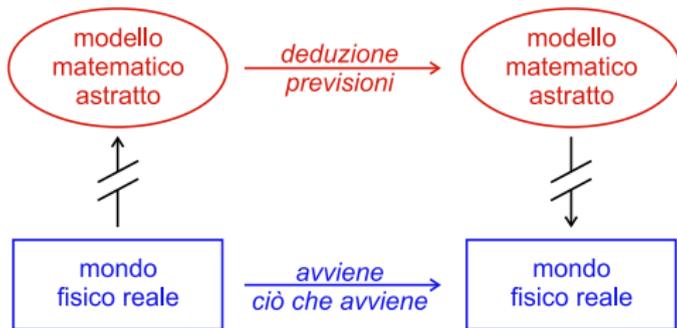
determinismo e probabilità possono convivere

Conclusione ?

L'instabilità dei moti caotici
rende problematica
la modellizzazione

mod. deterministico,
traiettorie ?

mod. probabilistico,
leggi statistiche ?



determinismo e probabilità possono convivere

la pura immagine deterministica può essere fuorviante

Per puro caso ?

“Il caso più grande è la nascita di un grand'uomo. E' per puro caso che si sono incontrate due cellule riproduttive, di sesso opposto, che contenevano in sé, ciascuna per proprio conto, esattamente quegli elementi misteriosi che reagendo misteriosamente avrebbero prodotto il genio. (...)

Quanto poco sarebbe bastato a deviare dalla sua strada lo spermatozoo che li trasportava: sarebbe stato sufficiente deviarlo di un decimo di millimetro e Napoleone non sarebbe mai nato e i destini di un continente sarebbero mutati.”

Per puro caso ?

“Il caso più grande è la nascita di un grand'uomo. E' per puro caso che si sono incontrate due cellule riproduttive, di sesso opposto, che contenevano in sé, ciascuna per proprio conto, esattamente quegli elementi misteriosi che reagendo misteriosamente avrebbero prodotto il genio. (...)

Quanto poco sarebbe bastato a deviare dalla sua strada lo spermatozoo che li trasportava: sarebbe stato sufficiente deviarlo di un decimo di millimetro e Napoleone non sarebbe mai nato e i destini di un continente sarebbero mutati.”

Henri Poincaré, *Le hazard*, 1907