# Appunti di Matematica

## Dal problema al modello matematico

Daniela Disconzi
Fabrizio Giugni
Massimo Pasquetto

IPSEOA Angelo Berti
classe 5AS

9-10 marzo 2017

# Prerequisiti

Per ognuno dei seguenti sistemi di disequazioni lineari, rappresentare graficamente l'insieme delle soluzioni, determinare le coordinate dei vertici della frontiera e indicare se tale insieme è aperto o chiuso, limitato o illimitato.

1. $\begin{cases} 3x + 2y < 4 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - y \leqslant 4 \\ 2x + y \leqslant 3 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y < 4 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

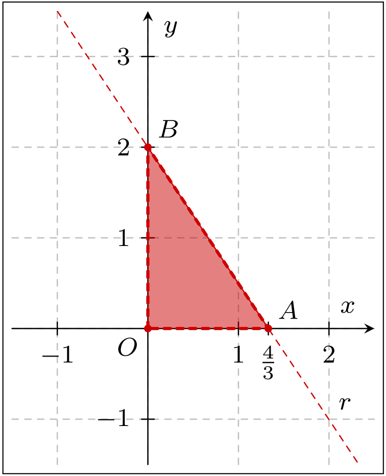
4. $\begin{cases} x + 3y \leqslant 15 \\ 8x + 3y \leqslant 36 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + y \geqslant 4 \\ x \leqslant 3 \\ y \geqslant 1 \end{cases}$

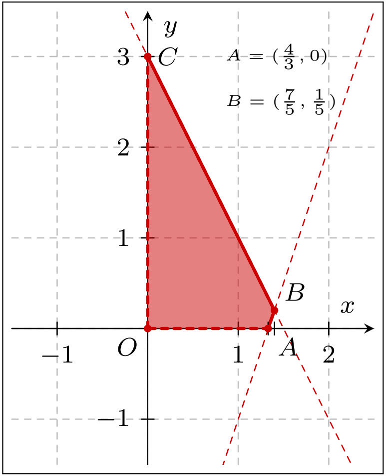
6. $\begin{cases} 2x + 3y > 5 \\ x + 5y < 6 \\ 7x + 4y > 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 2y \leqslant 0 \\ 2x + y \leqslant 8 \\ 2x - 2y + 5 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

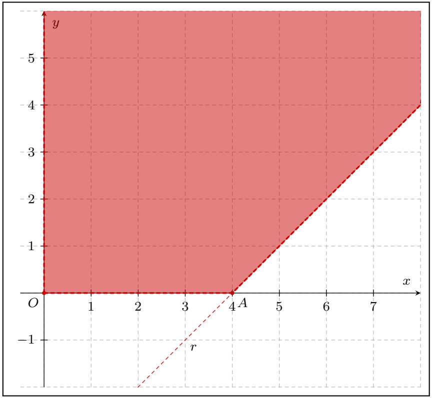
8. $\begin{cases} -1 < x \leqslant 3 \\ 2x - y > 0 \end{cases}$

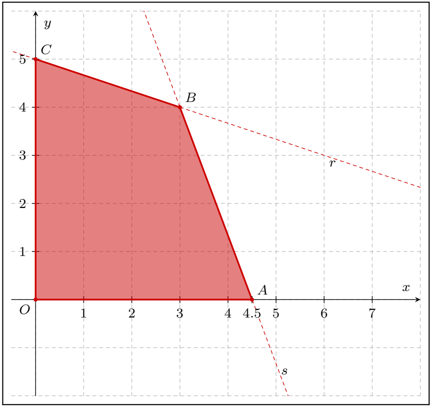



Esercizio 1: insieme aperto, limitato, triangolo di vertici $O = (0,0)$, $A = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$, $B = (0,2)$



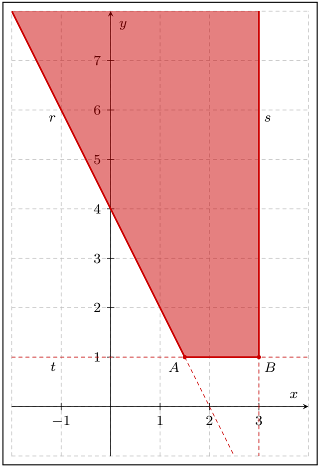

Esercizio 2: insieme né aperto né chiuso, limitato, quadrilatero di vertici $O = (0,0)$, $A = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$, $B = \left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $C = (0,3)$



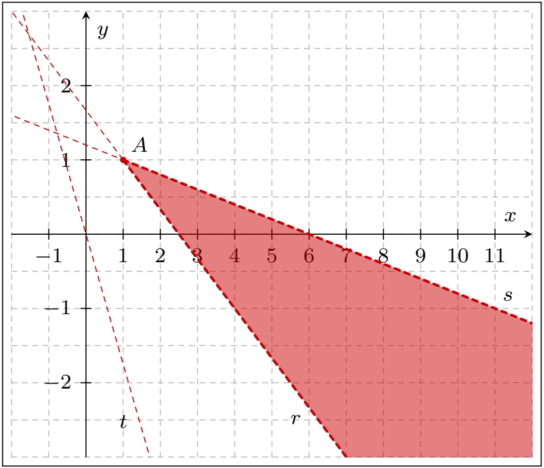




Esercizio 3: insieme aperto, illimitato di vertici $O = (0, 0)$, $A = (4, 0)$

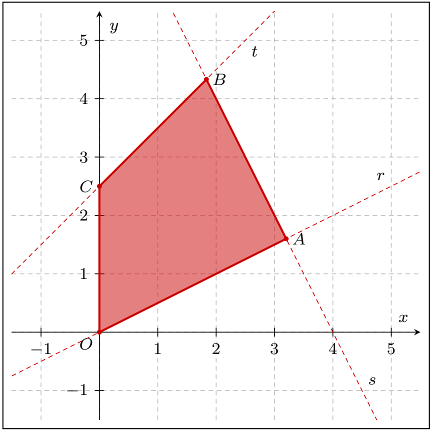
Esercizio 4: insieme chiuso, limitato, quadrilatero di vertici $O = (0, 0)$, $A = (4.5, 0)$, $B = (3, 4)$, $C = (0, 5)$



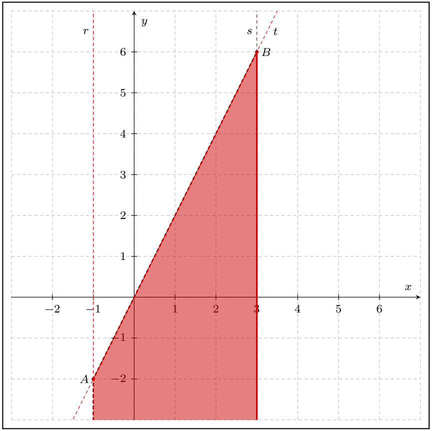

Esercizio 5: insieme chiuso, illimitato di vertici $A = (1.5, 1)$, $B = (3, 1)$




Esercizio 6: insieme aperto, illimitato di vertice $A = (1, 1)$




Esercizio 7: insieme chiuso, limitato, quadrilatero di vertici $O = (0,0)$, $A = \left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$, $B = \left(\frac{11}{6}, \frac{13}{3}\right)$, $C = \left(0, \frac{5}{2}\right)$




Esercizio 8: insieme né aperto né chiuso, illimitato di vertici $A = (-1,-2)$, $B = (3,6)$

# Modello matematico di un problema

Per determinare un *modello matematico* di un problema con vincoli è necessario tradurre i **vincoli tecnici** del problema in un sistema di equazioni e/o disequazioni che risolte individuano l'**insieme delle soluzioni ammissibili** del problema.

# Problema 1

Un'azienda di trasporti dispone di un autocarro che viene normalmente utilizzato per trasportare due tipi di prodotti $P_1$ e $P_2$, confezionati in casse dal peso di 1 q ciascuna, ma di diverse dimensioni.
Determinare l'insieme delle soluzioni ammissibili considerando i seguenti vincoli tecnici:

- la portata massima dell'autocarro è di 40 q,
- ogni cassa di merce $P_1$ occupa 0.5 $m^3$ e ogni cassa di merce $P_2$ occupa 1.5 $m^3$,
- la capacità massima dell'autocarro è 51 $m^3$.

Si indichi con $x$ e con $y$ rispettivamente il numero di casse di merce $P_1$ e $P_2$. Il peso totale, misurato in quintali, è $1 \cdot x + 1 \cdot y$ mentre la capacità totale, misurata in metri cubi, è $0.5 \cdot x + 1.5 \cdot y$
Nella seguente tabella sono indicate alcune soluzioni ammissibili del problema e, in rosso, alcune soluzioni non ammissibili.

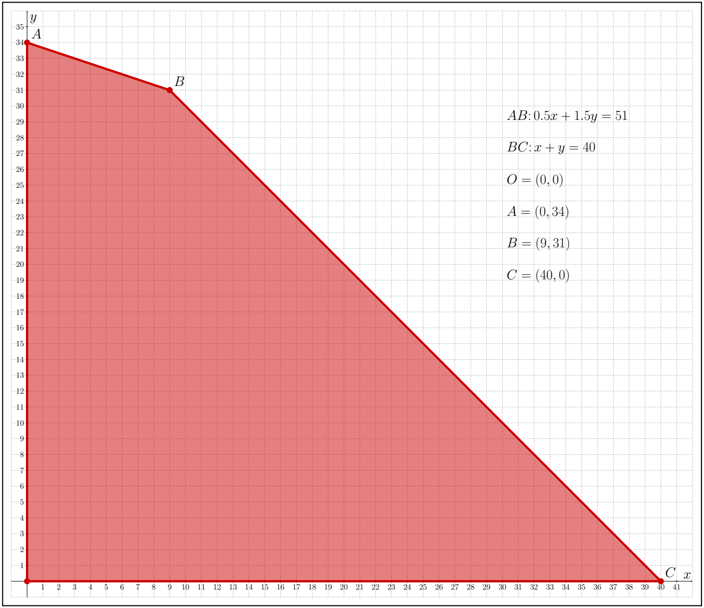
| **n.ro casse** $P_1$ | **n.ro casse** $P_2$ | **peso tot.** (max 40 q) | **capacità tot.** (max 51 m$^3$) |
|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x + y$ | $0.5x + 1.5y$ |
| 34 | 2 | 36 | 20 |
| 2 | 34 | 36 | 52 |
| 9 | 31 | 40 | 51 |
| 14 | 26 | 40 | 46 |
| 40 | 0 | 40 | 20 |
| 0 | 40 | 40 | 60 |
| 40 | 4 | 44 | 26 |
| 20 | 20 | 40 | 40 |

Si possono esprimere i vincoli tecnici del problema con il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x + y \leqslant 40 \\ 0.5x + 1.5y \leqslant 51 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

la cui soluzione è l'insieme dei punti a coordinate intere non negative appartenenti al quadrilatero chiuso e limitato di vertici $O = (0, 0)$, $A = (0, 34)$, $B = (9, 31)$ $C = (40, 0)$.

# Poligono delle soluzioni ammissibili



# Problema 2

Un coltivatore ha a disposizione 12 ettari di terreno da coltivare a lattuga o a patate. Le risorse a sua disposizione, oltre al terreno, sono:

- 70 kg di semi di lattuga e 18 t di tuberi,
- 160 t di stallatico per concimare il terreno.

L'assorbimento delle risorse delle risorse per ogni tipo di coltivazione è

- 7 kg di semi di lattuga e 10 t di stallatico per ogni ettaro di terreno coltivato a lattuga,
- 3 t di tuberi e 20 t di stallatico per ogni ettaro di terreno coltivato a patate.

Il problema che si pone il coltivatore è quello di stabilire quanto terreno è possibile destinare a lattuga e quanto a patate in modo che siano rispettati i vincoli ovvero vuole *determinare l'insieme delle soluzioni ammissibili in modo che siano rispettati i vincoli tecnici.*

Si indichi con $x_1$ la quantità di terreno (misurata in ettari) da destinare a lattuga e con $x_2$ la quantità da destinare a patate.
Completare la seguente tabella

| **q.tà terreno lattuga** $x_1$ (ettari=ha) | **q.tà terreno patate** $x_2$ (ettari=ha) | **q.tà terreno totale** $x_1 + x_2$ (max ... ha) | **q.tà semi di lattuga** ... (max ... kg) | **q.tà di tuberi** ... (max ... t) | **q.tà di stallatico** ... (max ... t) |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 9 | 35 | 12 | 130 |
| 4 | 6 | ... | ... | ... | ... |
| 6 | 3 | ... | ... | ... | ... |
| 10 | 2 | ... | ... | ... | ... |

Scrivere il modello matematico dei vincoli tecnici del problema e determinare graficamente l'insieme delle soluzioni ammissibili.

# Problema 3

Per l'assemblaggio di telecomandi si hanno a disposizione 10 moduli display, 18 moduli di logica di controllo, 12 trasmettitori, 21 tastierini, 9 moduli di navigazionee 10 led. I telecomandi sono di due tipi.

- Il tipo A richiede un display, un modulo di navigazione, 2 tastierini, 2 moduli di logica, un trasmettitore e un led.
- Il tipo B richiede 2 display, 3 tastierini, 2 moduli di logica e 3 trasmettitori.

Il problema che ci si pone è quello di stabilire quanti telecomandi di ciascun tipo si possono realizzare. Determinare l'insieme delle soluzioni ammissibili in modo tale che siano rispettati i vincoli tecnici.

# Problema 4

Una persona deve attuare una dieta alimentare assumendo per una settimana solo due tipi di alimenti, $P_1$ e $P_2$.
I valori nutrizionali relativi a 100 g dei due alimenti sono indicati nella seguente tabella:

| Prodotti | $P_1$ | $P_2$ |
|---|---|---|
| Calorie(cal) | 160 | 240 |
| Proteine(g) | 32 | 24 |

La dieta deve fornire ogni giorno almeno 1920 calorie e almeno 288 g di proteine. Determinare l'insieme delle soluzioni ammissibili.

L'area ammissibile del problema 4 è una regione di piano chiusa, illimitata di vertici ......