Appunti di Matematica

Funzioni economiche
problemi di ottimizzazione

Massimo Pasquetto

IPSEOA Angelo Berti
classe 5AS

16-17 febbraio 2017

Un'azienda per la lavorazione del caffè in grani, sostiene dei costi fissi mensili di 36 000 € e dei costi variabili quantificati in 3 € per ogni chilogrammo prodotto a cui vanno vanno aggiunti i costi per la manutenzione degli impianti stimati nello 0.1 % del quadrato della quantità prodotta. Sapendo che il caffè lavorato viene venduto a 16 €/kg determinare:

1. la funzione costo totale, la funzione ricavo e la loro rappresentazione in un stesso riferimento cartesiano;
2. le coordinate del/i punto/i di equilibrio (Break Even Point), evidenziando le aree di perdita e di profitto;
3. la funzione guadagno e la quantità che massimizza il guadagno;
4. la funzione costo marginale;
5. la funzione costo unitario medio e la quantità che minimizza il costo unitario;
6. rappresentare le funzioni costo marginale e costo unitario in uno stesso riferimento cartesiano.

Costi fissi sono i costi che non dipendono dalla quantità prodotta, in questo caso 36 000 €

Costi variabili sono i costi che dipendono dalla quantità prodotta

- 3 € per ogni kg di caffè prodotto,
- 0.001 € del **quadrato** del numero di kg prodotti.

Se si indica con x la quantità mensile di kg di caffè prodotti si può scrivere la seguente **funzione costo totale**

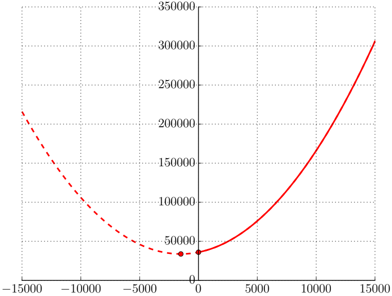
$$C_T(x) = 0.001x^2 + 3x + 36000$$

con il **vincolo** che $x \geqslant 0$.

La funzione costo totale

$$y = 0.001x^2 + 3x + 36000$$

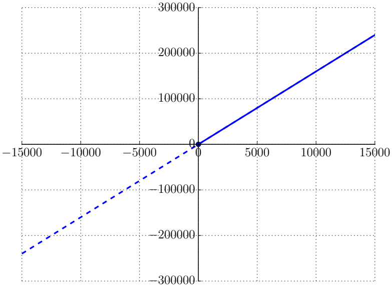
è una parabola, rivolta verso l'alto, con il vertice nel II quadrante e che non interseca l'asse delle ascisse. Il tratto che soddisfa il vincolo $x \geqslant 0$ è quello nel I quadrante. La parabola interseca l'asse delle ordinate in …… che corrisponde ai costi ……



Ricavi è quanto incasso dalla vendità di tutta la quantità prodotta quantificati in 16 € per ogni kg di caffè.

Poiché x indica la quantità mensile di kg di caffè prodotto e si ipotizza di riuscire a vendere tutto quello che si produce si ottiene la seguente **funzione ricavo**

$$R(x) = 16x$$



sempre con il **vincolo** che $x \geqslant 0$.
La funzione ricavo è rappresentata da una semiretta crescente avente l'origine nell'origine del piano cartesiano.

Risolvendo il sistema formato dalle equazioni del costo totale e del ricavo

$$\begin{cases} y = 0.001x^2 + 3x + 36000 \\ y = 16x \end{cases}$$

si ottengono i punti di pareggio, **Break Even Point**, cioè la quantità che è necessario produrre per avere i costi uguali al ricavo.
Utilizzando il metodo di sostituzione si ottiene l'equazione risolvente

$$0.001x^2 - 13x + 36000 = 0$$

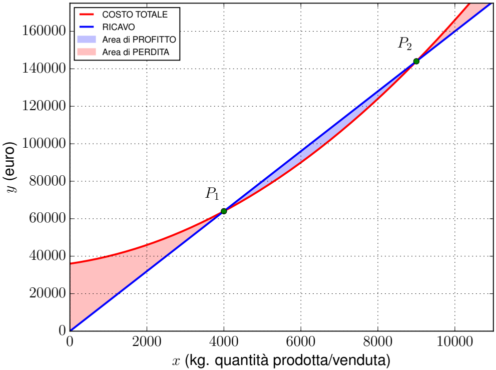
le cui soluzioni sono

$$x = 4000 \vee x = 9000$$

Le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} x = 4000 \\ y = 64000 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 9000 \\ y = 144000 \end{cases}$$

Area di profitto $R(x) > C_T(x)$ per $4000 < x < 9000$
Area di perdita $R(x) < C_T(x)$ per $0 < x < 4000 \vee x > 9000$
Break even point $R(x) = C_T(x)$ per $x = 4000 \vee x = 9000$



Se $0 < x < 4000$ incidono molto i costi fissi;

se $x > 9000$ incidono i costi variabili, soprattutto quelli quadratici.

Se la produzione è di 4000 kg oppure di 9000 kg i costi e i ricavi sono uguali $R(4000) = C_T(4000) = 64000$ e $R(9000) = C_T(9000) = 144000$.

Il guadagno è la differenza tra ricavi e costi $G(x) = R(x) - C_T(x)$ per cui si ottiene la funzione guadagno

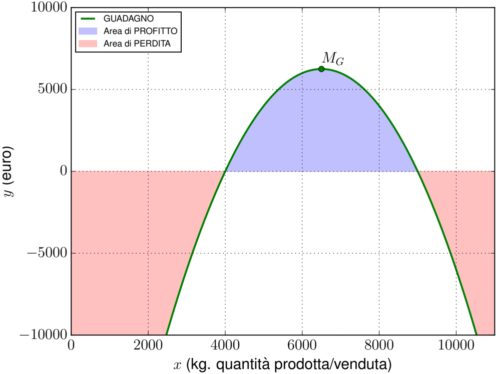
$$G(x) = -0.001x^2 + 13x - 36000$$

con il vincolo $x \geqslant 0$. La funzione è una parabola rivolta verso il basso.

tenuto conto di quanto visto prima in riferimento alle aree di perdita e di profitto si ha

$G(x) > 0$,
per $4000 < x < 9000$

$G(x) < 0$,
per $x < 4000 \vee x > 9000$



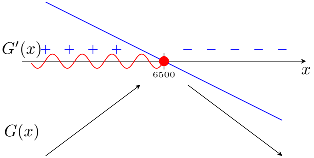
Per determinare il massimo guadagno utilizziamo il calcolo delle derivate.

$$G'(x) = -0.002x + 13$$

Il segno della derivata prima fornisce informazioni sulla monotonia della funzione.

$G'(x) > 0$ indica che $G(x)$ è crescente
$G'(x) < 0$ indica che $G(x)$ è decrescente

$-0.002x + 13 \geqslant 0$	disequazione
$-0.002x + 13 = 0$	eq. associata
$x = 6500$	sol. eq. associata
$x \leqslant 6500$	sol. disequazione



La $G(x)$ ha un massimo per $x = 6500$ il cui valore è $G(6500) = 6250$.
Il guadagno è massimo per una produzione di 6500 kg e il massimo guadagno mensile è 6250 €.

Costo marginale indica quanto rapidamente aumentano i costi all'aumentare della produzione.

Il costo marginale è la variazione del costo totale per infinitesime variazioni della produzione

$$C_m(x) = \frac{C_T(x+h) - C_T(x)}{h}, \qquad \text{per } h \to 0$$

Il costo marginale è la derivata della funzione costo totale

$$C_m(x) = C'(x)$$

Nel nostro esempio $C_T(x) = 0.001x^2 + 3x + 36000$ e pertanto

$$C_m(x) = 0.002x + 3$$

Il costo marginale non dipende dai costi fissi ma solo da quelli variabili.

Costo unitario (medio) indica quanto costa, in media, produrre ogni singola unità.

Il costo unitario medio $C_u(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$ è il rapporto tra il costo totale e la quantità prodotta con l'ulteriore vincolo che la quantità sia diversa da zero e quindi $x > 0$.

$$C_u(x) = \frac{0.001x^2 + 3x + 36000}{x}$$

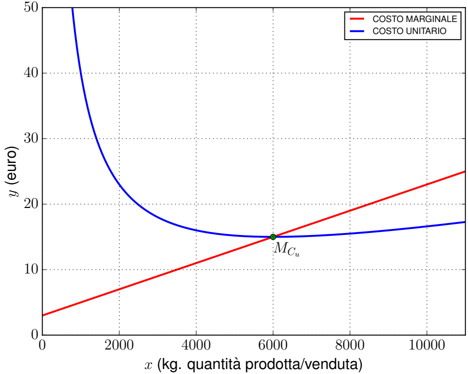
Il minimo costo unitario si ottiene studiando il segno della derivata prima.

$$\begin{aligned} C_u'(x) &= \frac{(0.002x + 3) \cdot x - (0.001x^2 + 3x + 36000) \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{0.002x^2 + 3x - 0.001x^2 - 3x - 36000}{x^2} \\ &= \frac{0.001x^2 - 36000}{x^2} \end{aligned}$$

Studiamo il segno di $C'_u(x) = \dfrac{0.001x^2 - 36000}{x^2}$.
Per risolvere la disequazione fratta

$$\frac{0.001x^2 - 36000}{x^2} \geqslant 0$$

bisogna studiare il segno del numeratore e quello del denominatore.
Il denominatore è sempre positivo per $x \neq 0$, a maggior ragione nelle ipotesi del problema che la quantità prodotta x sia positiva.
Il nmeratore è positivo o nullo per $x \leqslant -6000 \vee x \geqslant 6000$.
Dalla tabella dei segni e tenuto conto del vincolo $x > 0$ si ottiene che
$C'_u < 0$ per $0 < x < 6000$, quindi $C_u(x)$ è decrescemte
$C'_u > 0$ per $x > 6000$, pertanto $C_u(x)$ è crescente
per $x = 6000$ la funzione $C_u(x)$ ha un minimo il cui valore è
$C_u(6000) = \ldots\ldots$



Il minimo costo unitario è 15 € e si ottiene in corrispondenza di una produzione pari a 6000 kg di caffè.

Il minimo costo unitario si può ottenere anche come intersezione della funzione costo unitario con il costo marginale.