Il calcolo differenziale
e il calcolo integrale
nelle «Istituzioni analitiche» di
Maria Gaetana Agnesi

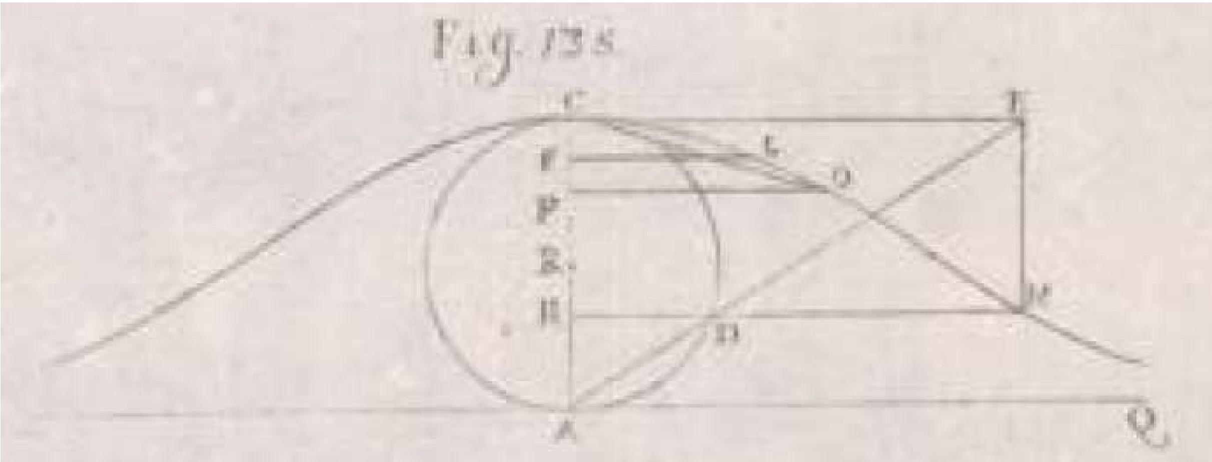


Immagine originale della versiera di Agnesi nel suo testo:
''Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana'' (1748)

Maria Gaetana Agnesi
(1718-1799)

Dall’indice:

Tomo I

LIBRO PRIMO: *‘’Dell’Analisi delle Quantità finite’’*

Argomenti: elementi di algebra, risoluzione di equazioni e geometria analitica.

Tomo II

LIBRO SECONDO: ‘’Del Calcolo Differenziale ‘’

Argomenti: differenziali, massimi, minimi e flessi.

LIBRO TERZO: ‘’Del Calcolo Integrale’’

Argomenti: regole di integrazione.

LIBRO QUARTO: ‘’Del Metodo Inverso delle Tangenti ‘’

Argomenti: equazioni differenziali di primo e secondo ordine.

‘’Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana’’
Frontespizio del tomo II

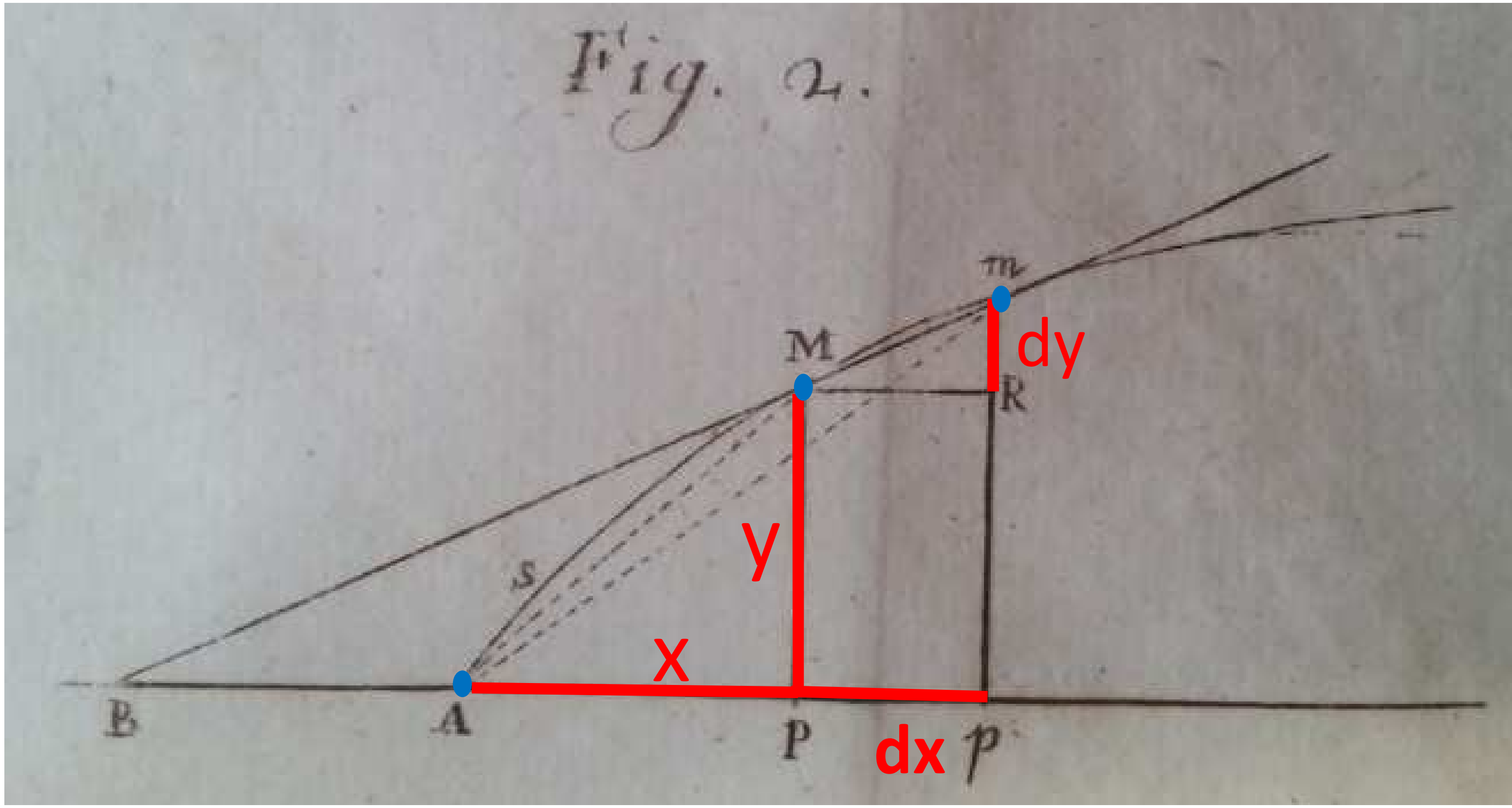
Le definizioni

“Col nome di quantità variabili si vogliono significare quelle, che sono capaci di aumento, e di decremento, e si concepiscono come **fluenti**, e per così dire, generate da un moto continuo.”

“Si chiama **differenza, o flussione** di una quantità variabile quella porzione infinitesìma, cioè tanto piccola, che ad essa variabile abbia proporzione minore di qualunque data, e per cui crescendo, o diminuendosi la medesima variabile, possa ciò non ostante assumersi per la stessa di prima.”

Le differenze

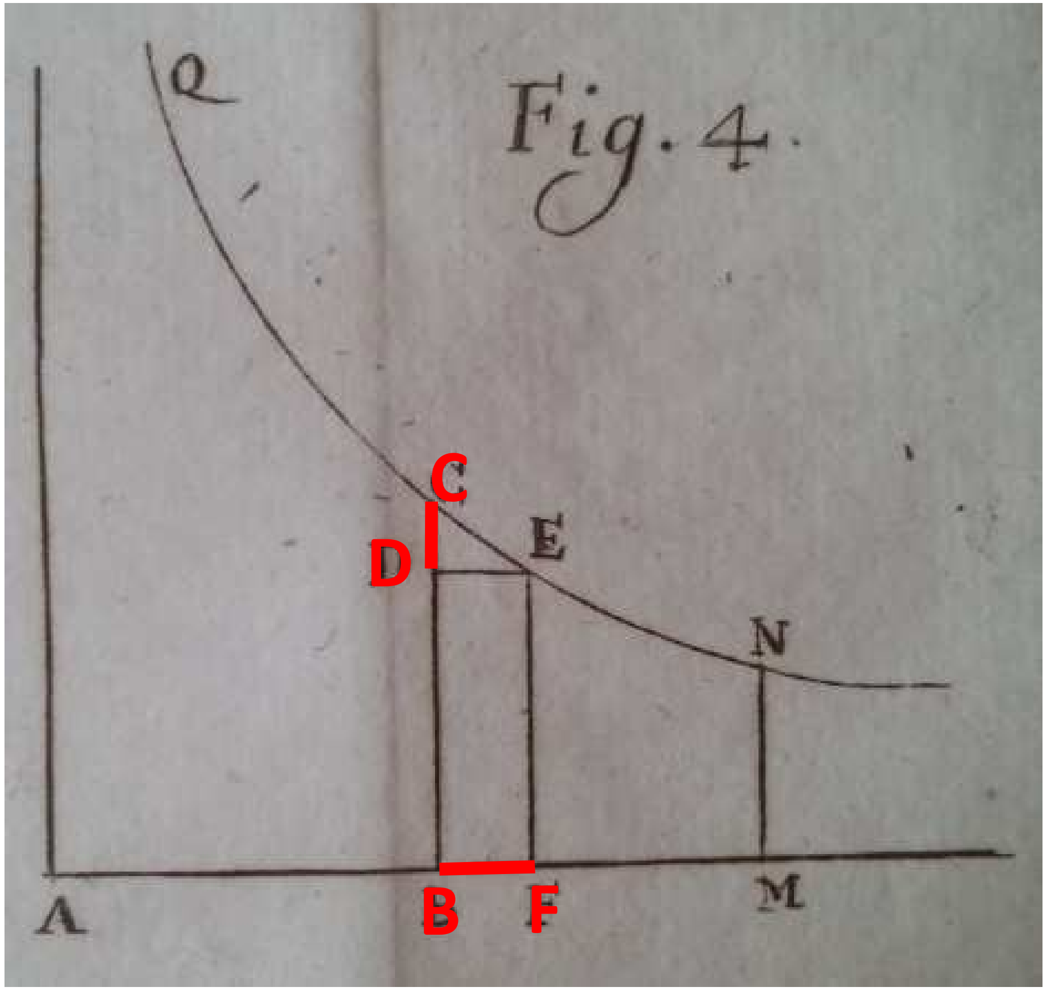
Si prenda la curva AM con P ascissa di M e si consideri "una porzione infinitesima Pp, sarà essa la differenza, o sia la flussione dell'ascissa AP, e si potranno considerare per eguali le due AP, Ap, non essendovi proporzione tra la quantità finita AP, e la porzione infinitesima Pp"



"La Caratteristica, con cui soglionsi esprimere le differenze, è la lettera d, quindi posta l'ascissa AP = x, sarà Pp, o MR = dx; e similmente posta l'ordinata PM = y, sarà Rm = dy,"

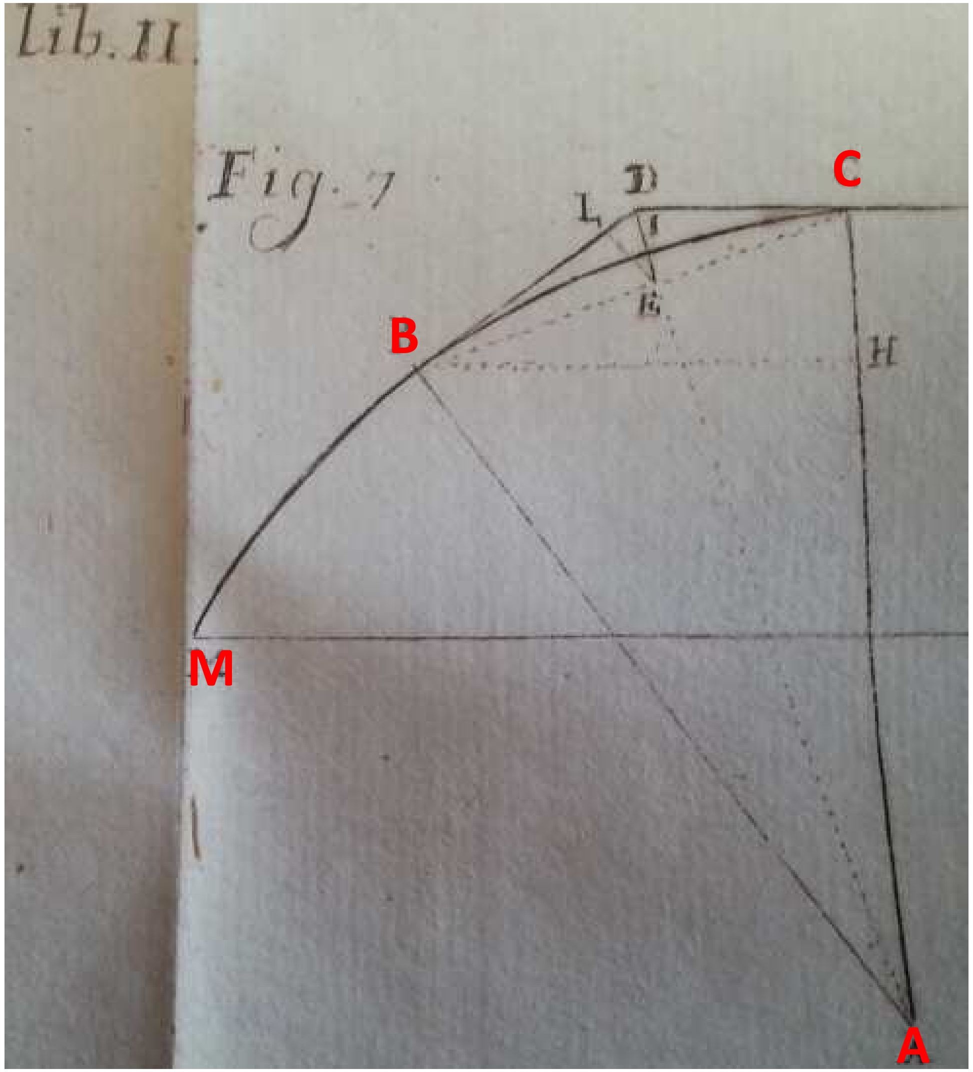
Altrettanto si può dire per l'arco AM di cui Mm è una flussione e dell'area sottesa da AM, di cui quella sottesa da Mm è un flussione.

"Che queste tali quantità differenziali non sieno vane immaginazioni, oltre di che egli è manifesto dal metodo degl'Antichi de' Poligoni inscritti, e circoscritti, **si può chiaramente vedere dal solo idearli**, che l'ordinata MN (Fig. 4.) si vada continuamente accostando alla BC, finché con essa coincida; ora egli è chiaro, che prima, che quelle due linee coincidano, averanno tra loro una distanza, ed una differenza inassegnabile, cioè minore di qualunque quantità data; in tale posizione sieno BC, FE, adunque **BF, CD saranno quantità minori di qualunque data**, e perciò inassegnabili, o sia differenze, o flussioni."



Inassegnabile: minore di qualsiasi quantità data;
minore cioè di 1/n per ogni n;

L’arco infinitesimo di qualsivoglia curva ha le proprietà dell’arco di cerchio



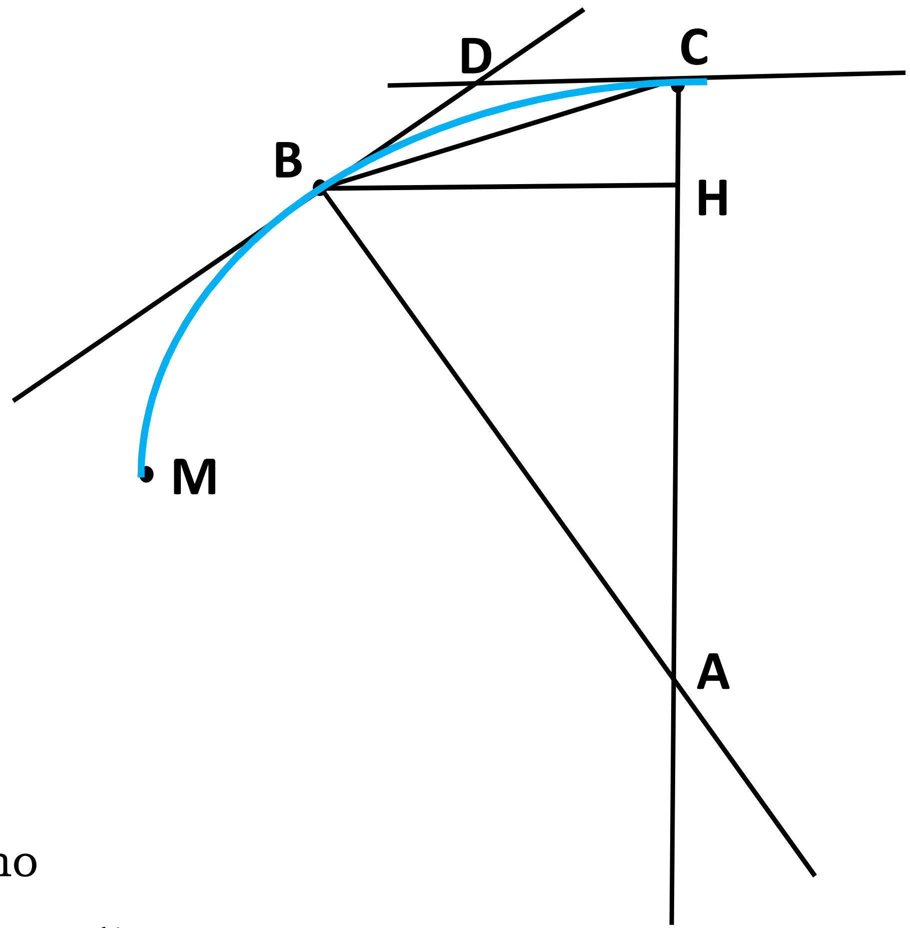
Teorema I

“Sia una qualunque curva MBC, (Fig. 7.) ed una porzione di essa BC infinitesima del primo ordine. Da’ punti B, C si conducano perpendicolari alla curva le rette BA, CA. Dico: che le rette BA, CA si potranno assumere per eguali”

Corollario IV

“Da ciò si raccoglie, che **un’arco qualunque infinitesimo BC di qualsivoglia curva avrà le stesse affezioni, e proprietà dell’arco di circolo** descritto col centro A, e raggio AB, o AC.”

Consideriamo la curva qualsiasi MBC e
una sua parte infinitesima BC del primo ordine.
Conduciamo le perpendicolari alla curva BA e CA,
che si incontrano in A, le tangenti BD e CD e
la corda BC.
Supponiamo che CA e BA siano diverse,
con CA maggiore e conduciamo la
perpendicolare BH a CA; la differenza
tra CA e BA sarà minore di CH e CH sarà
minore della corda BC, per l'angolo retto in H.
La corda BC, avendo supposto l'arco BC infinitesimo
del primo ordine, è anch'essa infinitesima del primo ordine.
Dunque la differenza tra BA e CA, non è maggiore di una
quantità infinitesima del primo ordine e
"BA, CA si potranno assumere per eguali".



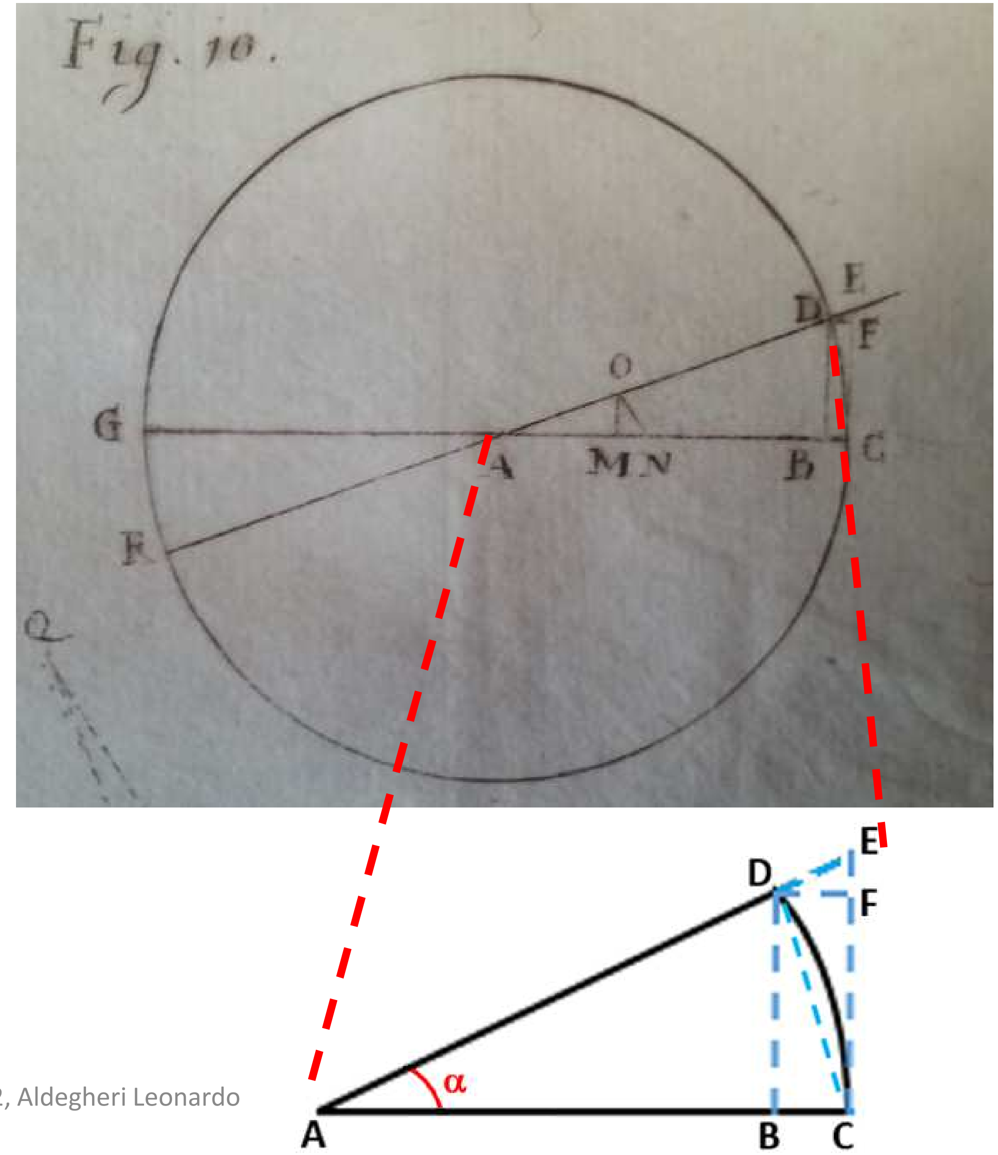
Infinitesimi del secondo e terzo ordine

Teorema III

"Se nel circolo si prenda un' arco infinitesimo del primo ordine, dico che il seno verso sarà quantità infinitesima del secondo, e la differenza fra il seno retto e la tangente sarà infinitesima del terzo."

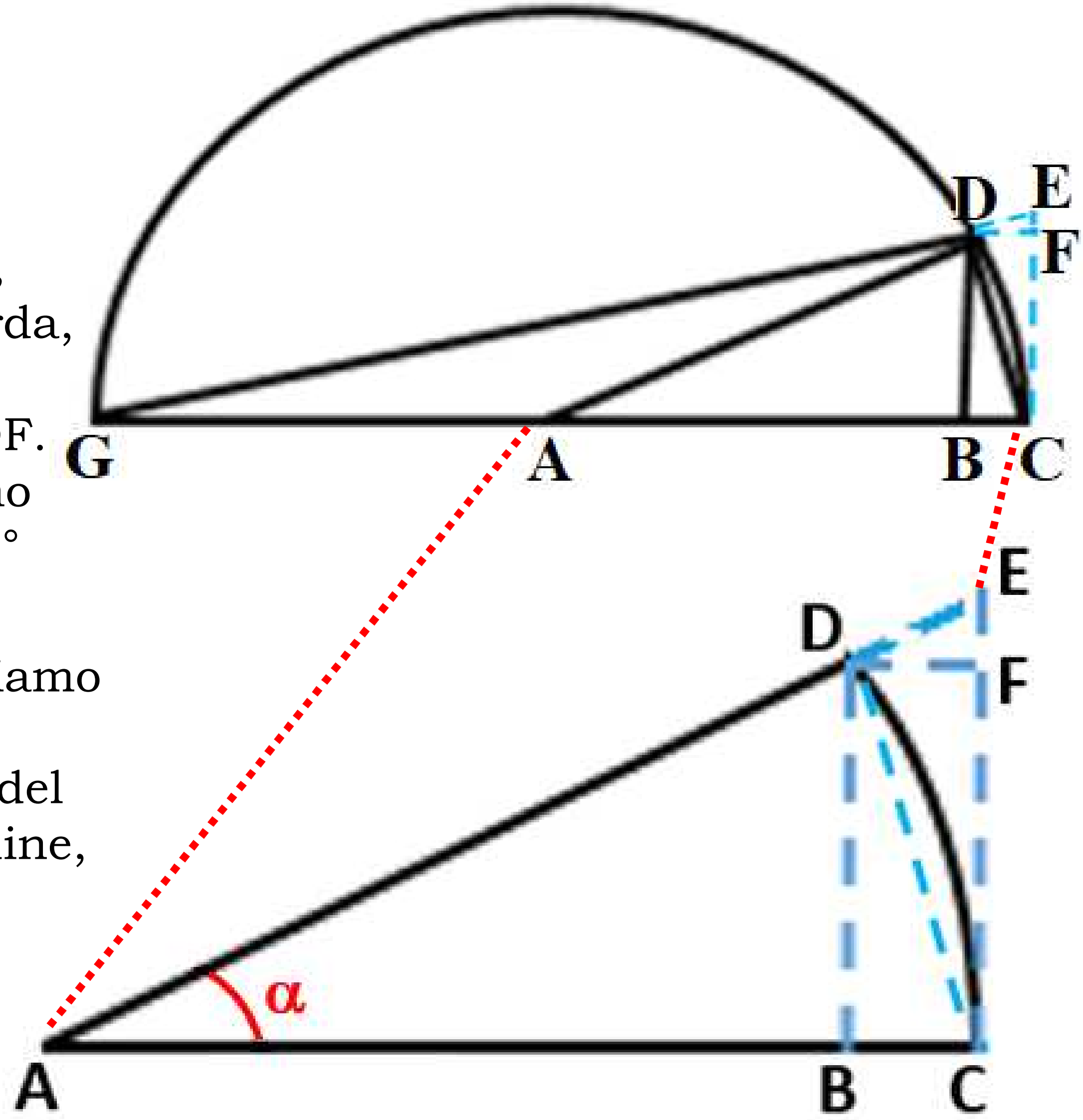
Corollario I

"poiché la tangente è sempre maggiore dell'arco, l'arco della corda, e la corda del seno retto; potendosi assumere per eguali la tangente, ed il seno retto, giacché non differiscono se non per una infinitesima del terzo, si potranno anche assumere per eguali la tangente, l'arco, la corda, ed il seno retto"



Sia DC arco infinitesimo del 1° ordine, DB il seno retto o seno e CE la tangente. Si conduca la parallela DF ad AC.

Per il secondo teorema di Euclide vale: GB:BD=BD:BC; poiché GB è quantità finita e BD, infinitesima del 1° ordine, come l'arco di cui è corda, così sarà BD infinitamente maggiore di BC, che quindi sarà un infinitesimo del 2° ordine, come DF. Ricordando che senoverso(α)=1-cosα=BC, abbiamo che il senoverso è una quantità infinitesima del 2° ordine.



Dalla similitudine dei triangoli ABD e DFE, otteniamo AB:BD=DF:FE; poiché AB è una quantità finita, infinitamente maggiore di BD, che è infinitesima del 1° ordine, così essendo DF infinitesima del 2° ordine, FE lo è di 3° ordine: FE, differenza fra seno e tangente, è flussione del 3° ordine.

Poiché tangente e seno differiscono per una quantità infinitesima del 3° ordine, possiamo assumere per uguali tangente, arco, corda e seno

Scolio II

‘’Per iscansare poi i paralogismi, nei quali pur troppo è facile incorrere, gioverà il riflettere, che **nelle linee infinitamente piccole di qualsivoglia ordine**, conforme si pratica anche nelle finite, **hanno a considerarsi** due importanti circostanze, cioè la loro **grandezza** e la loro **posizione**. E quanto alla grandezza non credo che mai si possa sbagliare, se non da coloro, che credono tali grandezze infinitesime un mero nulla.”

‘’Ora sebbene le quantità col diminuirsi all’infinito passano da genere a genere, **le proporzioni in qualunque ordine persistono le medesime**; e perché di tre linee della stessa classe può costituirsi un triangolo, si noti che minorandosi proporzionalmente i lati sino a far transito da un grado all’altro, **non si mutano gli angoli**, che sempre fra loro la stessa ragione conservano. In tali incontri **non è mai lecito prendere una linea per l’altra**, nè fingere eguaglianza, o adequazione …**Ma se due grandezze di qual si sia ordine differiranno per una grandezza, che rispetto a loro sia inassegnabile, sicuramente, e senza rischio alcuno d’errare, una si può prendere per l’altra**, nè v’è timore, che l’adequamento porti un minimo sconcerto.”

Osservazioni

- **I segmenti infinitesimi vanno studiati nel loro opportuno contesto** di una determinata situazione geometrica, a questo si riferisce l’Agnesi quando parla della loro posizione.

L’altra caratteristica di tali segmenti è la grandezza e l’errore più grande che si può fare su di essa è considerarla nulla.

- Ciò che rende significativo lo studio con gli infinitesimi è che se consideriamo due figure simili, una fatta di grandezze finite e l’altra fatta di infinitesimi, pur essendo le grandezze di tipologia diversa, gli angoli non mutano e le proporzioni si mantengono.

Grazie alla geometria possiamo muoverci dalle grandezze finite a quelle infinitesime e viceversa.

- **Se due grandezze finite, come ad esempio due segmenti, differiscono per un infinitesimo è lecito confondere una con l’altra**.

Maniere o regole di differenziare le formole

26. Che se la quantità proposta da differenziarsi sarà il prodotto di più variabili, come xy, mentre x diviene $x+dx$, la y diviene $y+dy$, ed xy diviene $xy+ydx+xdy+dxdy$, che è il prodotto di $x+dx$ in $y+dy$; da questo prodotto adunque sottratta la quantità proposta xy, rimane $ydx+xdy+dxdy$, ma $dxdy$ è quantità infinitamente minore di ciascheduna dell' altre due, le quali sono il rettangolo di una quantità finita in una infinitesima, e $dxdy$ è il rettangolo di due infinitesime, e però infinitamente minore, dunque esso rettangolo si potrà francamente trascurare, quindi la differenza di xy sarà $xdy+ydx$.

27. La formola da differenziarsi sia una frazione, per esempio, $\frac{x}{y}$. Si ponga $\frac{x}{y}=z$, sarà dunque $x=zy$, e però anche eguali le loro differenze, cioè $dx=zdy+ydz$, quindi $dz=\frac{dx-zdy}{y}$, ora $z=\frac{x}{y}$, sostituito pertanto questo valore in luogo di z, sarà $dz=\frac{dx}{y}-\frac{xdy}{yy}=\frac{ydx-xdy}{yy}$; ma se $z=\frac{x}{y}$, sarà dz il differenziale di $\frac{x}{y}$, dunque il differenziale di $\frac{x}{y}$ sarà $\frac{-xdy+ydx}{yy}$.

‘’**26**….**se la quantità proposta da differenziarsi sarà il prodotto di più variabili**, come xy, mentre x diviene x + dx, la y diviene y + dy, ed xy diviene xy + ydx + xdy + dxdy, che è il prodotto di x + dx in y + dy; da questo prodotto adunque sottratta la quantità proposta xy, rimane ydx + xdy + dxdy; ma dxdy è quantità infinitamente minore di ciascheduna dell’altre due, le quali sono il rettangolo di una quantità finita in una infinitesima, e dxdy è il rettangolo di due infinitesime, e perciò infinitamente minore, dunque esso rettangolo si potrà francamente trascurare, quindi la differenza di xy sarà xdy + ydx.”

‘’27. La formula da differenziarsi sia una frazione, per esempio $\frac{x}{y}$. Si ponga $\frac{x}{y}$= z, sarà dunque x = zy e perciò anche eguali le loro differenze, cioè dx = zdy + ydz, quindi $dz = \frac{dx-zdy}{y}$, ora $z = \frac{x}{y}$, sostituito pertanto questo valore in luogo di z, sarà $dz = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy} = \frac{ydx-xdy}{yy}$; ma se $z = \frac{x}{y}$, sarà dz il differenziale di $\frac{x}{y}$, dunque il differenziale di $\frac{x}{y}$ sarà $\frac{-xdy+ydx}{yy}$.”

Osservazioni

- **Per la Agnesi il differenziale è la differenza infinitesimale** (oggi diremmo incremento infinitesimo).

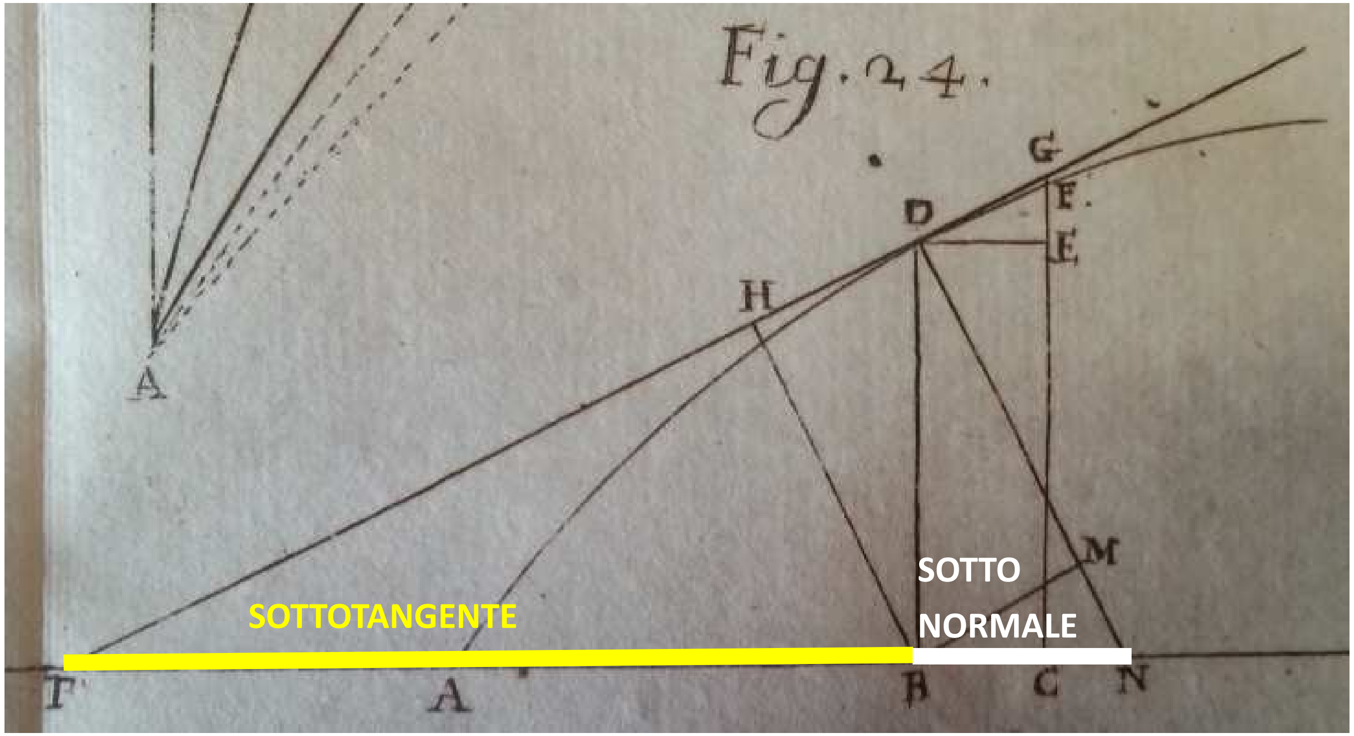
- **Le regole di derivazione**, con l'uso dei differenziali e della simbologia di Leibniz, **diventano immediate ed evidenti**.

- **Le dimostrazioni delle formule**, in particolare, **risultano brevi, non laboriose** e straordinariamente efficaci.

- Tutti i testi moderni di scuola secondaria, hanno bisogno di alcune pagine per giustificare tali formule e ritengono indispensabile introdurre la regola della derivata del quoziente facendola precedere dalla regola della derivata della funzione reciproca.

Quest'ultima introduzione vuole rendere più giustificato il quadrato che si trova al denominatore nella derivata del quoziente.

Sottotangente e sottonormale



Consideriamo la curva ADF,

la tangente in D, che interseca

l'asse X in T, e la normale in D,

che interseca l'asse X in N.

Essendo B la proiezione di D

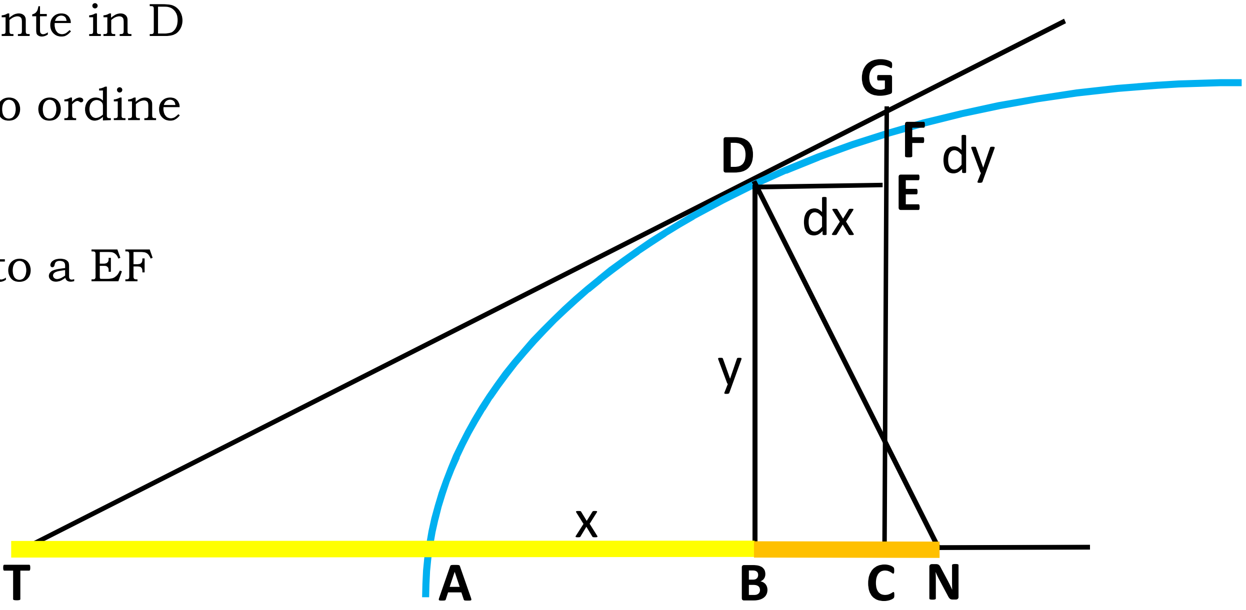
sull'asse X, chiamiamo

il segmento TB sottotangente

e il segmento BN sottonormale. Tali segmenti saranno fondamentali nel prosieguo del testo, sia per il calcolo differenziale che per quello integrale.

Ragionando sull'arco infinitesimo DF, vediamo come la Agnesi determina la sottotangente e la sottonormale ad una curva, procedimento poi generalizzabile a qualsiasi curva.

Consideriamo la curva ADF, la sua tangente in D e l'arco di curva DF infinitesimo del primo ordine rispetto alla curva.



Da quanto visto, GF è infinitesima rispetto a EF così come la differenza fra DF e DG è infinitesima rispetto all'arco DF.

Si possono allora "usurpare per eguali" EF e EG, DF e DG. Si avrà quindi AB =x, BD=y, EF=EG=dy, BC=DE=dx, DF=DG=$\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

I triangoli simili GED e DBT ci danno GE:ED=DB:BT, cioè dy : dx = y : BT

avremo quindi $\boldsymbol{BT} = \frac{\boldsymbol{ydx}}{\boldsymbol{dy}}$, **formula della sottotangente** per qualunque curva, coerente con la moderna $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

aggiungendo la normale DN in D e ragionando sulla similitudine dei triangoli GDE e DBN, dalla proporzione DE:EG=DB:BN(→dx:dy=y:BN), otteniamo **la sottonormale** $\boldsymbol{BN} = \frac{\boldsymbol{ydy}}{\boldsymbol{dx}}$

Esempio di calcolo della sottotangente e della sottonormale

Il primo esempio che propone l'Agnesi si riferisce alla curva ADF:

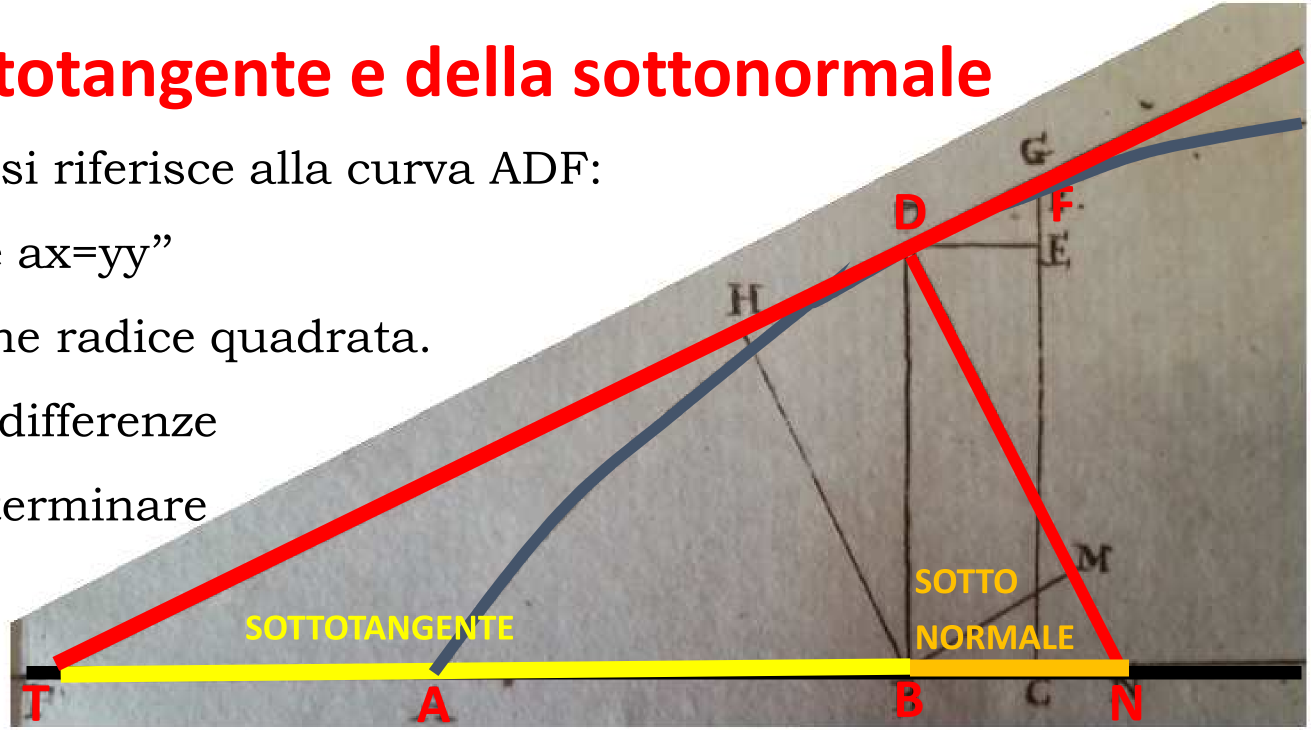
"la parabola apolliniana dell'equazione ax=yy"

Cioè, in linguaggio moderno, la funzione radice quadrata.

La trattazione, usando il metodo delle differenze

è veloce e consente rapidamente di determinare

la sottotangente e la sottonormale.



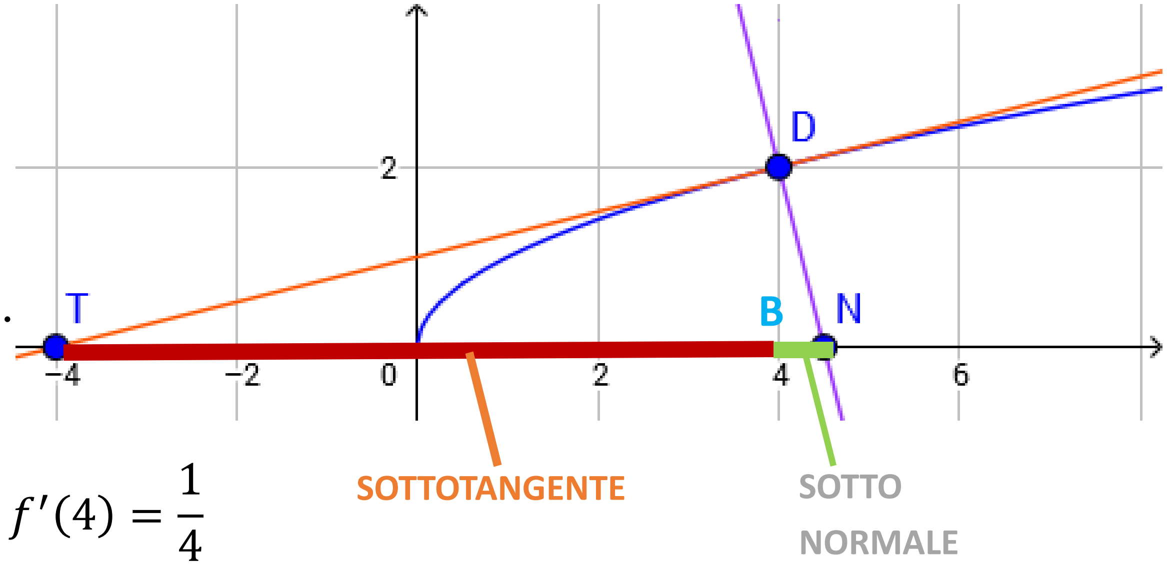
'Differenziando sarà adx = 2ydy, e dx = $\frac{2ydy}{a}$. Sostituito pertanto quel valore in luogo di dx nella formula generale della sottotangente $\frac{ydx}{dy}$, avremo $\frac{2yy}{a}$, oppure 2x, … **La sottotangente adunque nella parabola è doppia dell'ascissa**, e perciò … si prenda AT = AB"

"La formola generale della sottonormale è $\frac{ydy}{dx}$; ma per l'equazione della curva si ha $dx = \frac{2ydy}{a}$, dunque fatta la sostituzione, sarà la sottonormale nella parabola = $\frac{a}{2}$, cioè la metà del parametro"

Ritroviamo lo stesso risultato con i metodi tradizionali, analizzando la funzione

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Prendiamo in considerazione il punto D(4, 2). Determiniamo la tangente e la normale e le loro intersezioni con l'asse X.



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

La tangente in D è: $y = \frac{1}{4}x - 1$

La normale in D è: $y = -4x + 18$

Le intersezioni, con l'asse X sono rispettivamente T(-4, 0) e N$\left(\frac{9}{2}, 0\right)$

Effettivamente ritroviamo che TB è il doppio dell'ascissa di D e BN è la metà del parametro che in questo caso è 1.

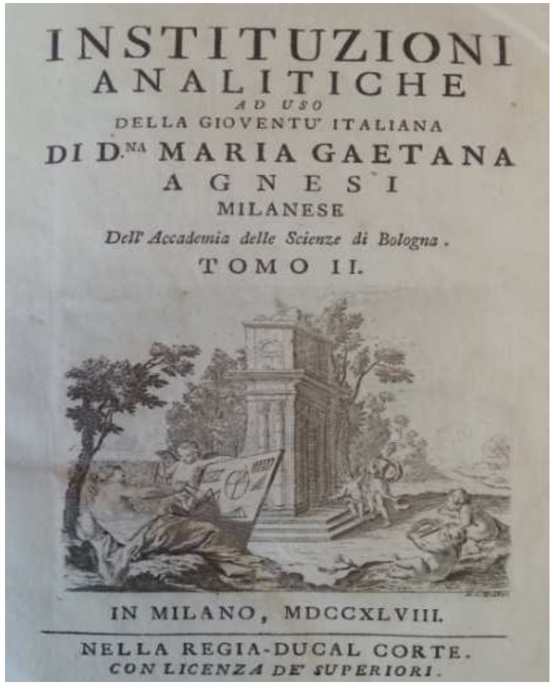
- L'Agnesi rende la determinazione delle distanze, nello studio delle tangenti e delle normali ad una curva, estremamente rapido ed efficace.
- Con due formule di immediata applicazione si possono trovare, differenziando, le intersezioni con l'asse X della tangente e della normale ad una curva in un punto.

Torniamo all’indice

Tomo II LIBRO SECONDO: ‘’Del Calcolo Differenziale ‘’
Argomenti: differenziali, massimi, minimi e flessi.

LIBRO TERZO: ‘’Del Calcolo Integrale’’
Argomenti: regole di integrazione.

LIBRO QUARTO: ‘’Del Metodo Inverso delle Tangenti ‘’
Argomenti: equazioni differenziali di primo e secondo ordine.



‘’Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana’’ Frontespizio del tomo II

LIBRO TERZO: ‘’Del Calcolo Integrale’’
Argomenti: regole di integrazione.

CAPO I: ‘’Delle regole dell’integrazione espresse da formole finite algebriche, o ridotte a quadrature supposte’’
CAPO II: ‘’Delle regole dell’integrazioni facendo uso delle serie’’
CAPO III: ‘’Dell’uso delle accennate regole nelle rettificazioni delle curve, quadrature de’spazi, appianazioni delle superficie, e delle cubature de‘solidi’’
CAPO IV: ’’Del calcolo delle quantità logaritmiche ed esponenziali‘’

Alcune doverose precisazioni prima di passare all'integrale

Per l'Agnesi

- **L'incremento infinitesimo sull'asse x (o y) prende il nome di differenziale dx (dy)**

ed è un effettivo ente geometrico: un segmento di lunghezza infinitesima lungo l'asse x (y).

- **La continuità è sottointesa** e, in generale, è sempre calcolabile il rapporto dy/dx

(o indifferentemente dx/dy), come relazione di proporzionalità tra enti geometrici.

- **Lo studio dell'evolversi** e del variare **della funzione si basa sullo studio della**

sottotangente e del rapporto dy/dx che ne consente una disamina completa

ed efficace, senza introdurre il concetto di derivata.

IL CALCOLO INTEGRALE NELL’OPERA DELL’AGNESI

“**Il calcolo integrale**, che suole definirsi ancora calcolo sommatorio, è un metodo di ridurre una quantità differenziale a quella quantità, di cui essa è la differenza, onde le operazioni del calcolo integrale sono opposte a quelle del differenziale, e però si chiama ancora metodo inverso delle flussioni o sia delle differenze.”

“Per cagion d’esempio **il differenziale di x è dx**, e per conseguenza x è l’integrale di dx. Quindi farà segno sicuro, che sia giusto quell’integrale, che differenziato restituirà la quantità proposta da integrarsi.
In due diverse maniere si ricercano gl’integrali delle formule differenziali, in una per mezzo di espressioni finite algebriche, o ridotte a quadrature, supposte; nell’altra facendo uso delle serie.”

Il più semplice esempio di calcolo integrale riguarda le quantità differenziali costituite da **un polinomio** e così…

“per esempio l’integrale di $mx^{m-1}dx$ sarà $\frac{mx^{m-1+1}}{m-1+1}$, cioè x^m.

L’integrale di $x^{\pm\frac{m}{n}}$ sarà egli $\frac{x^{\pm\frac{m}{n}+1}}{\pm\frac{m}{n}+1}$, cioè $\frac{nx^{\pm\frac{m+n}{n}}}{\pm m+n}$”

“Ma qui fa d’uopo avvertire, che acciò gl’integrali fieno compiti, **devesi ad essi sempre aggiungere, o da essi sottrarre una quantità costante a piacere**”…

…”La ragione di ciò è, che non avendo le quantità costanti differenziale, la dx tanto può essere la differenziale di x, quanto di x+a, quanto di x-b ecc, e però tanto x, quanto x+a, quanto x-b ecc, possono essere gl’integrali di dx”

“Tutto ciò, che fin’ora ô detto, procede quando nella formola differenziale nessun termine vi sia, in cui l’esponente della variabile sia l’unità negativa, come $\frac{adx}{x}$, o sia $ax^{-1}dx$, imperocchè secondo la regola l’integrale sarebbe $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$, o sia $\frac{ax^{0}}{0}$, cioè infinito; il che nulla ci fa sapere.”

> “In questi casi adunque bisogna ricorrere ad altri metodi.
> Due sono quelli, che servono: uno per mezzo d’una curva, che si chiama **Logaritmica**, ed anco Logistica, l’altro per mezzo di serie infinite.”

Concentriamoci sul primo metodo, osservando che:

la principale caratteristica della curva Logaritmica è:
“che **prese nell’asse le assisse in proporzione aritmetica, le corrispondenti ordinate sono in proporzione geometrica**.”

L’Agnesi si sta qui riferendo alla moderna curva esponenziale:
se le ascisse successive sono in proporzione aritmetica, le corrispondenti ordinate sono in proporzione geometrica.

Grazie al rapporto tra esponenti e logaritmi che in seguito viene stabilito, non solo **risolveremo il problema dell’integrale di $\boldsymbol{x^{-1}dx}$**, ma saremo in grado di calcolare gli integrali che coinvolgono i logaritmi.

È fondamentale evidenziare sin da subito una significativa proprietà di questa curva, chiamata dalla Agnesi: Logaritmica.

”**la sottotangente di questa curva sarà sempre costante**”

e in particolare se la base dell’esponenziale è quella naturale cioè «e», tale costante è 1: la sottotangente è unitaria.

Studiamo la curva Logaritmica

Per tracciare la curva pensiamo di dividere l'asse delle x in parti uguali, AB, BC, CD ecc innalzando da A, B, C, D le perpendicolari AE, BF, CG, DH tali che questi ultimi segmenti siano in proporzione geometrica tra loro.

I punti E, F, G, H individuano alcuni punti della curva e dividendo in parti uguali i segmenti AB, BC, ecc e ripetendo il procedimento delle perpendicolari otteniamo gli infiniti punti intermedi che costituiscono la curva.

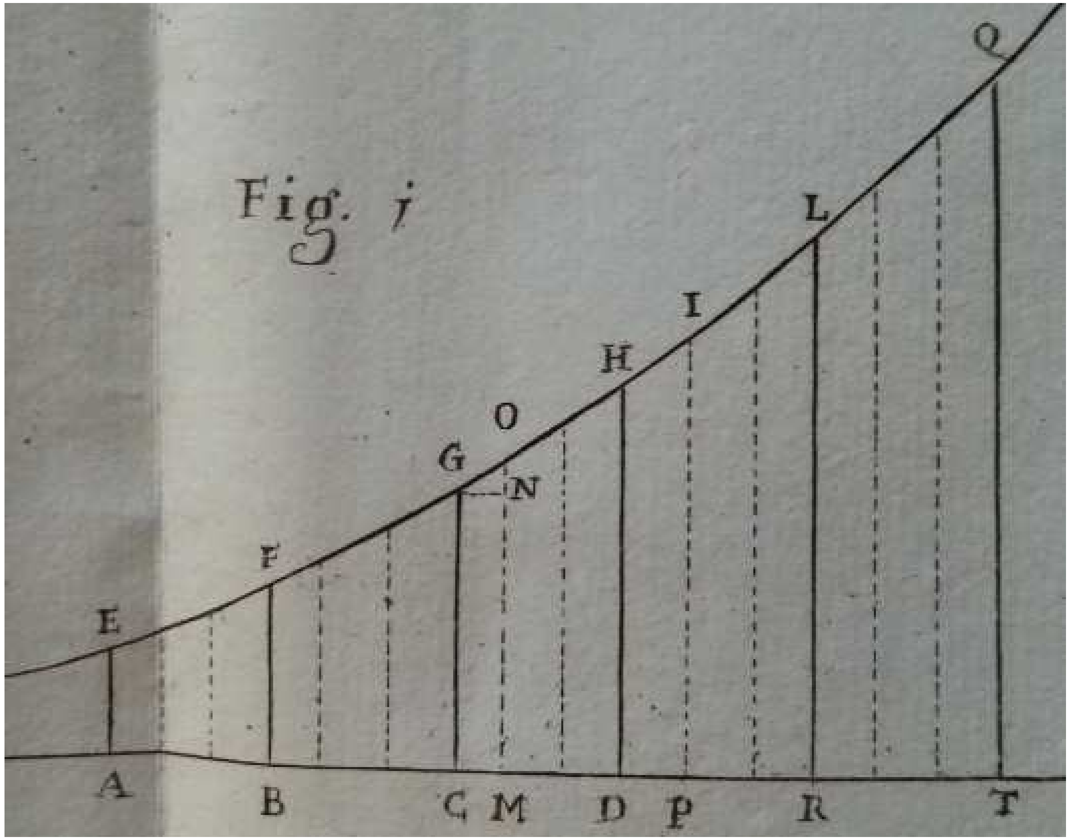
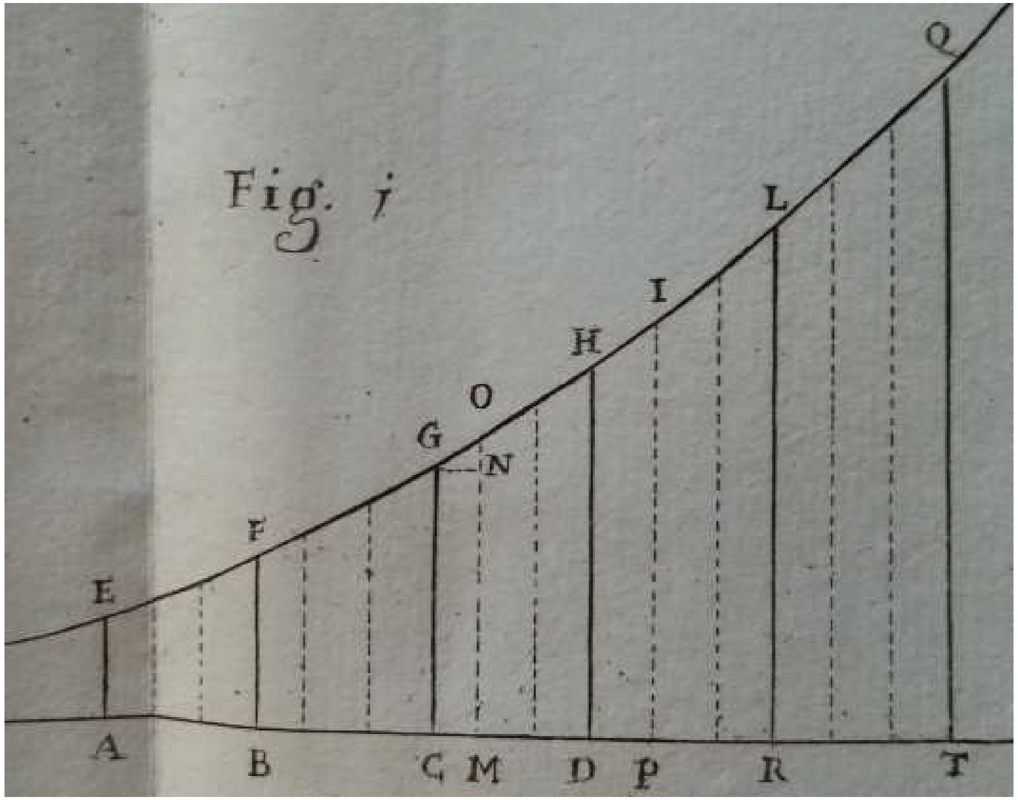
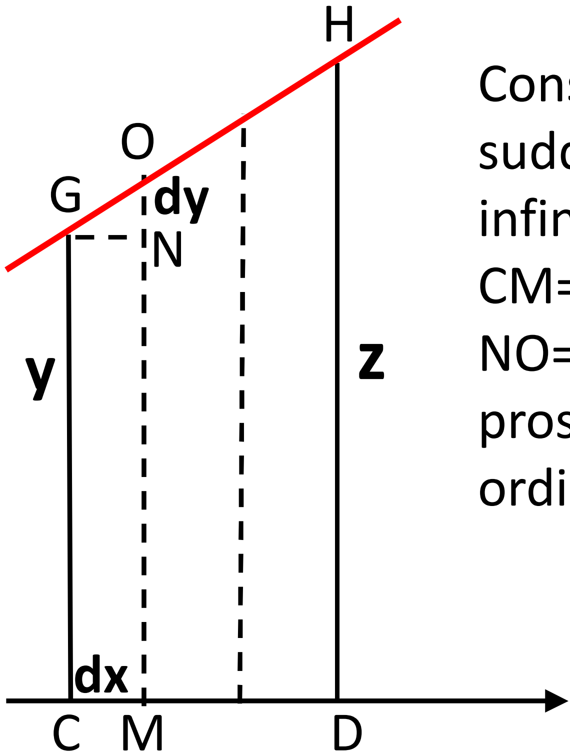


Figura 1, tomo II, libro III.





Consideriamo una suddivisione infinitesima di CD, CM=dx, l'ordinata CG=y, NO=dy sull'ordinata MO, prossima a CG, e un'altra ordinata DH=z

Se le ascisse sono aritmeticamente proporzionali, le rispettive ordinate saranno tra loro geometricamente proporzionali e la medesima proporzione si avrà tra i loro differenziali perciò dy:dz=y:z ossia dy:y=dz:z, rimane dunque costante il rapporto tra un'ordinata e il suo differenziale. Se assumiamo dx costante si avrà allora dy:y=dx:a,

cioè $\frac{ady}{y} = dx$, che rappresenta l'equazione della curva Logaritmica.

''È facile vedere, che la sottotangente di questa curva sarà sempre costante,

imperocchè nella formula generale della sottotangente $\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ sostituito in

$\left(\boldsymbol{equazione\ logaritmica}: \frac{ady}{y} = dx \rightarrow y = \frac{ady}{dx}\right)$

luogo di y il valore dato dall'equazione della curva, avrassi $\frac{ydx}{dy} = \frac{adydx}{dxdy} = a$''

La costruzione della curva Logaritmica proposta dalla Agnesi nella figura 2, illustra graficamente la costanza della sottotangente. Infatti dividendo in parti uguali l'asse delle x e costruendo la curva Logaritmica passante per O, C, D, P, le rispettive sottotagenti NI, BA, KE, IF sono congruenti.

Inoltre, posto NI=a, sottotangente, e considerando dx le suddivisioni dell'asse x, studiando la similitudine fra i triangoli STR e RGA si riottiene l'equazione della curva Logaritmica.
Ponendo GR=y, RT=dx, TS=dy, si ha dy:dx=y:a e quindi $\frac{ady}{y} = dx$.

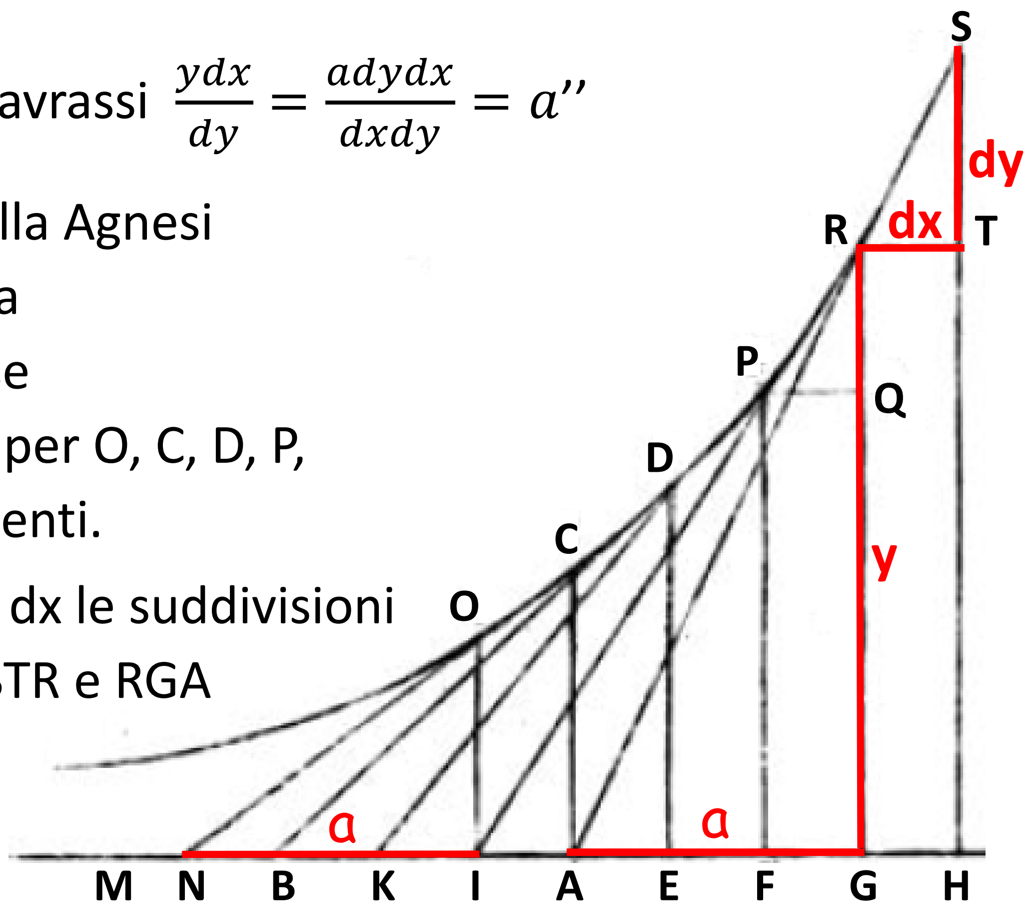
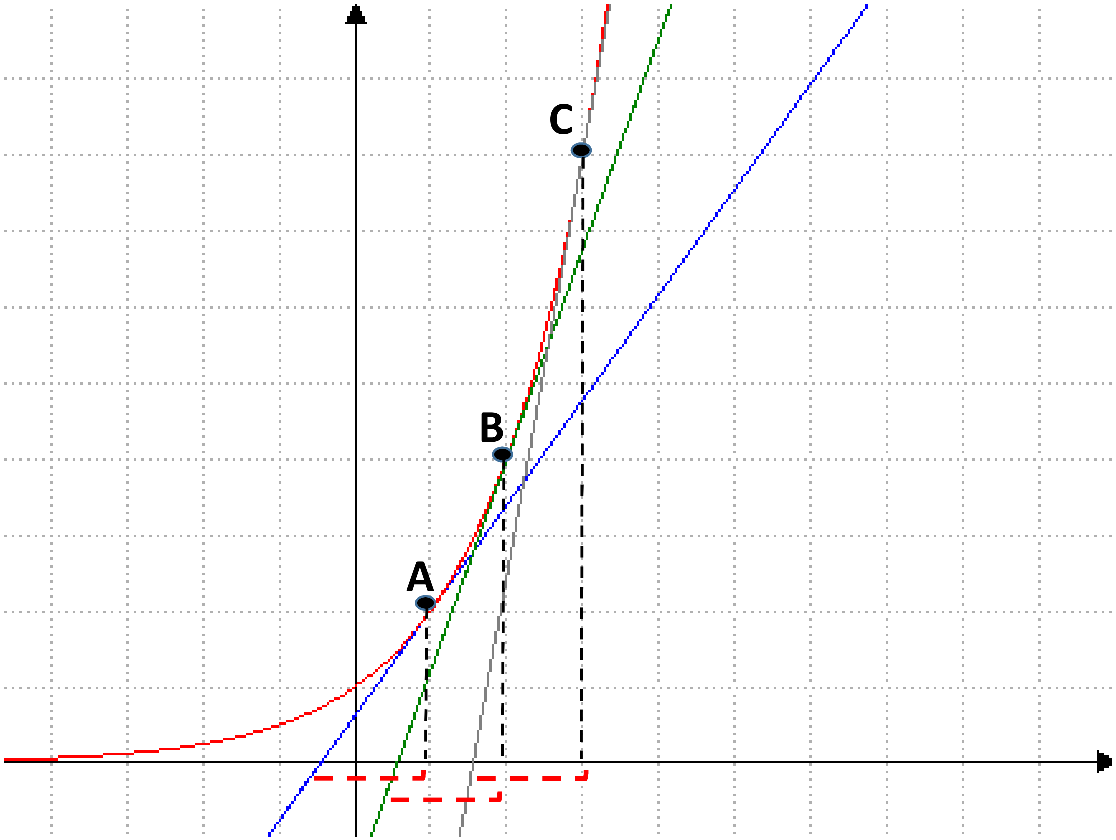


Figura 2, tomo II, libro III.

Consideriamo la curva 2^x e vediamo le sottotangenti relative ai punti A(1,2), B(2,4) e C(2,8).

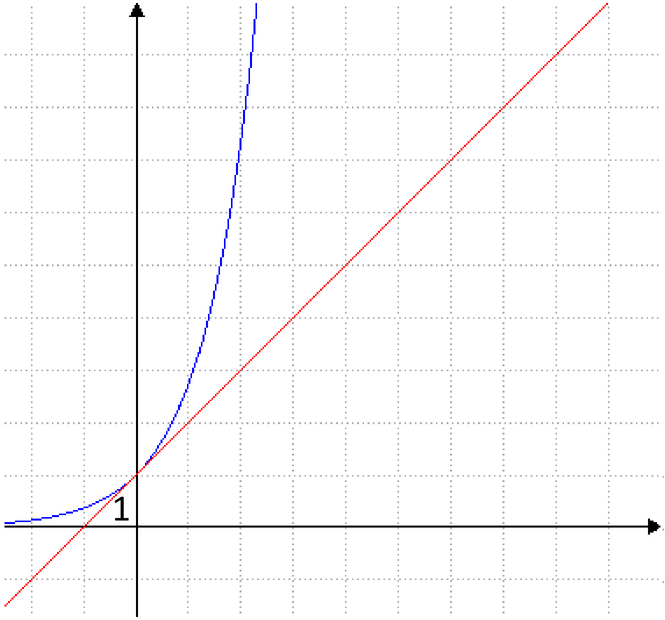
Esse risultano tutte uguali.

Calcolando, la sottotangente risulta di una misura pari a: $\left|\frac{-1}{ln2}+1\right|$+1.

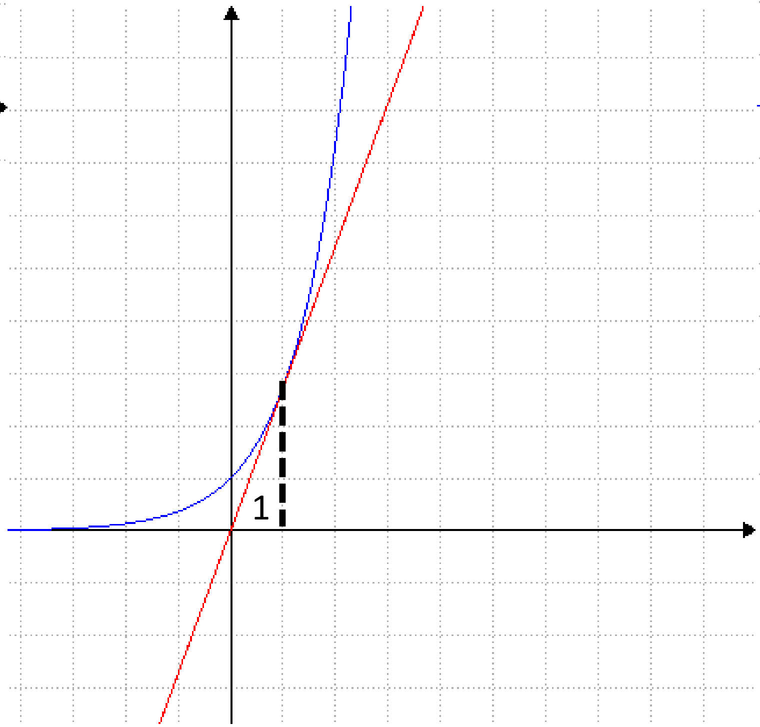


Potendosi generalizzare la formula precedente,

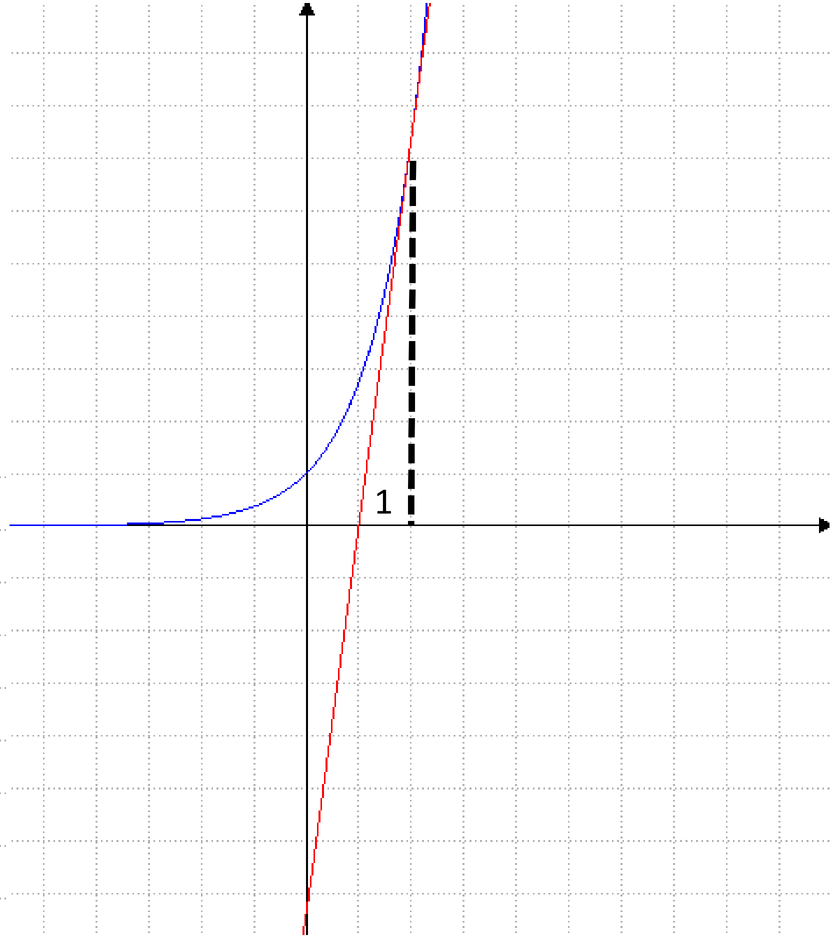
nel caso in cui la base dell'esponenziale sia «e» la sottotangente risulta unitaria.



Tg in (0,1) y=x+1, sottotg=1.



Tg in (1,e) y=ex, sottotg=1.



Tg in $(2,e^2)$ $y=e^2x-e^2$, sottotg=1.

Abbiamo **ricavato la curva Logaritmica per punti**, sulla base del confronto fra proporzionalità, e **ne abbiamo dimostrato la** caratteristica fondamentale della **costanza della sottotangente**.
La trascendenza della curva, infatti, non consente **all'Agnesi** di descriverla algebricamente, leggiamo però che a lei **risulta già chiaro il legame fra questa curva e l'iperbole**, che per noi viene esplicitato dall'integrale.

"**La curva logaritmica non si può geometricamente descrivere**, bensì organicamente, e però è una curva mecanica, **e l'impossibilità di essere geometricamente descritta è la stessa dell'impossibilità della quadratura dello spazio iperbolico**, come si vedrà a suo luogo; quindi gl'integrali di quelle formole differenziali, che portano alla logaritmica, si dicono ancora dipendere dalla quadratura dell'iperbola"

Possiamo ora risolvere il problema dell'integrazione di $x^{-1}dx$

Consideriamo la Logaritmica DC, con sottotangente pari ad α e prendiamo l'ascissa x=AB e la corrispondente ordinata y=BC

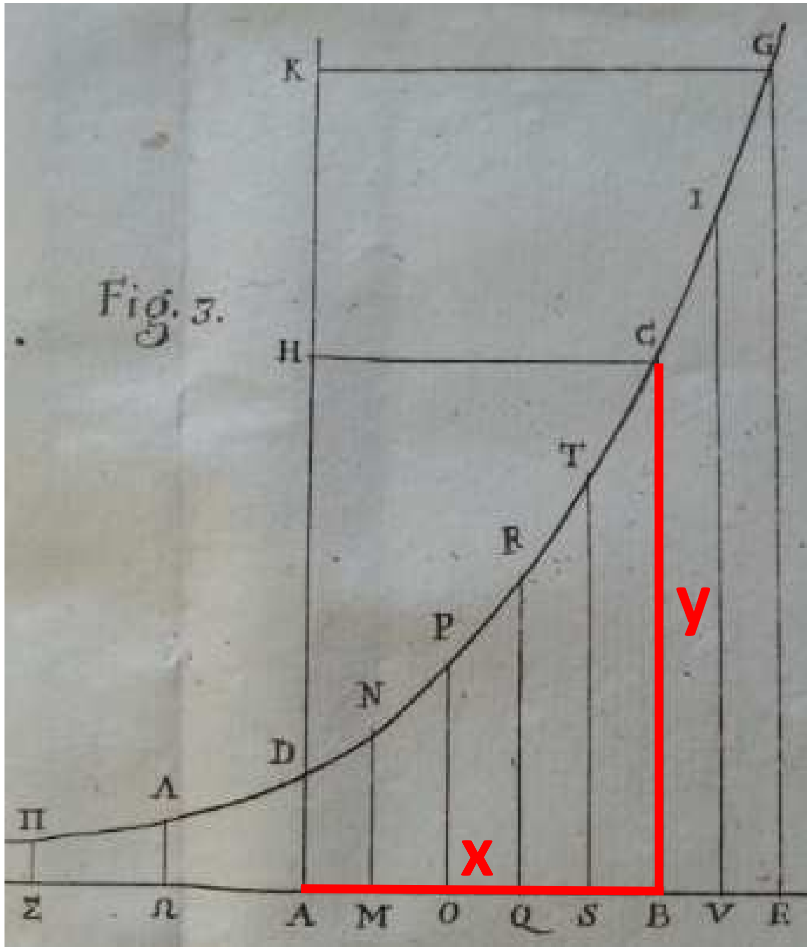


Figura 3, tomo II, libro III.

Essendo l'equazione della curva $\frac{ady}{y} = dx$

"l'integrale di $\frac{ady}{y}$ sarà x, ma x=AB, ed AB è il logaritmo di BC, cioè di y, adunque servendosi del segno $\int$ per significare integrale o somma, che vuol dire lo stesso, e del segno l, che vuol dire logaritmo, sarà $\int \frac{ady}{y} = ly$, nella logaritmica, la cui sottotangente sia $=\alpha$"

"Istessamente sarà $\int \frac{dy}{y} = ly$ nella logaritmica della sottotangente =1; $\int \frac{ady}{b+y} = l(b+y)$, nella logaritmica della sottotangente $=\alpha$"

“Se la formula differenziale fosse $-\frac{dy}{y}$, l’integrale sarebbe $-ly$,

e se fosse $-\frac{dy}{a+y}$, l’integrale sarebbe $-l(a+y)$, ma se sarà $-\frac{dy}{a-y}$,

l’integrale sarà $-l(a-y)$, intendendo questi logaritmi nella

logaritmica della sottotangente eguale all’unità.

La ragione di ciò si è, che **siccome l’integrale di $\frac{dy}{y}$ è ly**,

così il differenziale di ly è $\frac{dy}{y}$, e **generalmente** parlando,

il differenziale di una quantità logaritmica è la frazione,

il di cui numeratore sia il prodotto della sottotangente

nel differenziale della quantità, ed il denominatore la quantità stessa”

LE APPLICAZIONI DEL CALCOLO INTEGRALE

Dopo aver illustrato il concetto di integrale e i metodi di integrazione, l'Agnesi si concentra sulle applicazioni di questo concetto, cioè il calcolo delle aree, dei volumi e delle lunghezze delle curve, rispettivamente: quadrature, cubature e rettificazioni.

Gli esempi dell'Agnesi

Per le aree vengono studiati gli spazi determinati dalle coniche: iperboli, ellissi e parabole, ma anche gli spazi relativi a curve celebri quali la cicloide, la concoide e la cissoide di Diocle, infine spazi legati alle curve logaritmica ed esponenziale e alle spirali.

Per le rettificazioni vengono studiate le lunghezze delle stesse curve che determinano le aree precedenti, quindi coniche e curve come la cicloide.

Per i volumi ci si occupa di solidi di rotazione dai semplici coni a sferoidi, ellissoidi, paraboloidi nonché solidi legati alla rotazione di curve più complesse come la cissoide.

Quadrature de’ spazi, ovvero il calcolo di aree

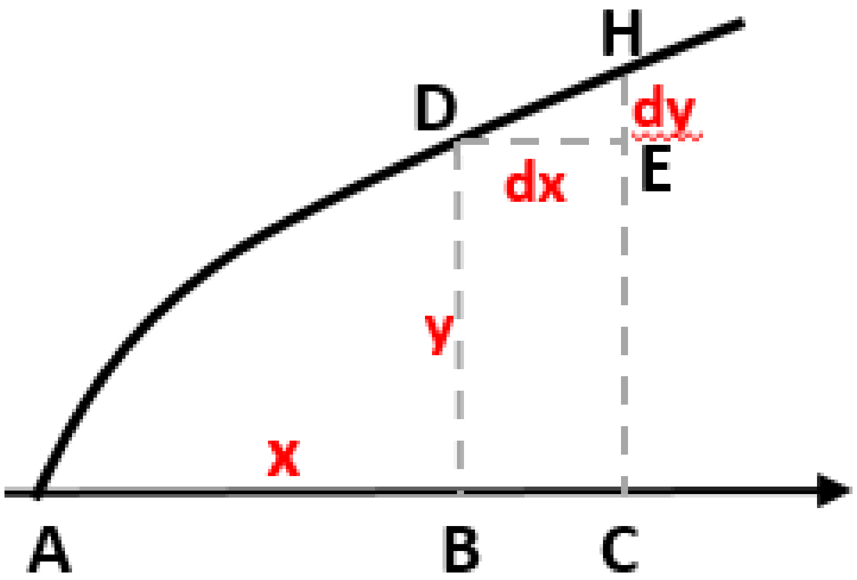
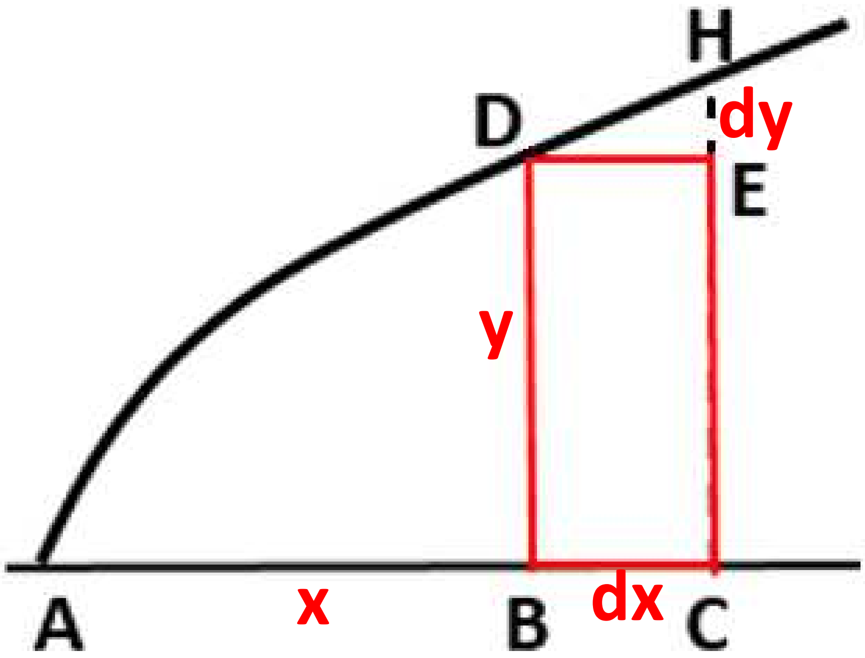


Figura 6, tomo II, libro III.

“Per fare uso delle sopraccennate regole di calcolo integrale, applicandole alle quadrature de’ spazi, rettificazioni di curve, appianazioni, o sia quadrature di superficie, e cubature de’ solidi, sia una qualunque curva ADH (Fig.6) riferita all’asse AB con le ordinate parallele fra loro, ed in angolo retto sopra l’asse stesso. Alla ordinata BD condotta CH parallela, ed infinitamente prossima, e tirata DE parallela a BC, il **mistilineo BDHC sarà la flussione, o il differenziale, o sia l’elemento dello spazio ABD, e perché lo spazio DEH è nullo rispetto al rettangolo BDEC, si potrà prendere esso rettangolo per l’elemento del suddetto spazio ABD**.”

infatti sono infinitesimi di ordine diverso: DEH è, approssimativamente, $\frac{1}{2}dxdy$, BDEC è dato da ydx

"Adunque **la somma di tutti questi rettangoli infinitesimi BDEC sarà lo spazio compreso dalla curva AD**, e dalle coordinate AB, BD. Quindi chiamata AB=x, BD=y, sarà BC=dx, EH=dy, **ed il rettangolo BDEC=ydx sarà la formola per gli spazi**.



Se in questa formola sostituiremo in luogo di y il valore dato per x, e per le costanti dell'equazione della curva, o in luogo di dx, il valore dato per y, dy e le costanti, **ed indi integreremo, sarà l'integrale il ricercato spazio ABD**"

ESEMPIO 1: lo spazio parabolico

"Sia ABC (FIG.10) una parabola apolloniana dell'equazione ax=yy, una qualunque assissa AD=x, DB=y, e debbasi quadrare lo spazio ADB. Sarà dunque $y = \sqrt{ax}$ e posto questo valore nella formola degli spazi (ydx) in luogo di y, sarà essa $dx\sqrt{ax}$ ed integrando $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + b$."

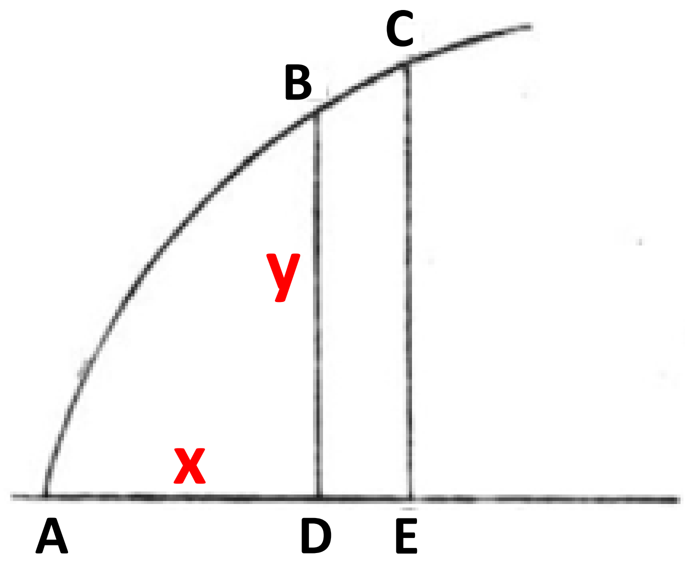


Figura 10, tomo II, libro III.

"Nel punto A, cioè quando x=0, lo spazio è 0, adunque l'integrale $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + b$, che esprime questo spazio, deve pure essere zero, fatta x=0, e però sarà $\frac{2}{3}0\sqrt{a0} + b = 0$, cioè b=0"

"Adunque sarà lo spazio ABD=$\frac{2}{3}x\sqrt{ax}$ ma y = $\sqrt{ax}$, onde ABD=$\frac{2}{3}xy$, cioè eguale a due terzi del rettangolo dell'assissa nell'ordinata"

Viene ritrovato così il teorema di Archimede sull'area del segmento parabolico

Considerazioni sull'integrale

Sin dallo studio della logaritmica, associata alla quadratura dell'iperbole, e in generale da tutti gli esempi ed esercizi del manuale **risulta evidente il legame fra l'integrale e l'area**.

Per l'Agnesi:

- **l'integrale si ottiene sommando infinite quantità** (porzioni d'area) **infinitesime**;
- l'area di ogni striscia rettangolare $dx_i \times y_i$ approssima l'area effettivamente sottesa, a meno di infinitesimi di ordine superiore;
- **dx ha un preciso significato geometrico** che è alla base della nozione di integrale.

Nota

Se per l'Agnesi la suddivisione dell'intervallo (a,b) in sottointervalli dapprima finiti e poi infinitesimi $\Delta \rightarrow dx$ è un'evoluzione spontanea e priva di problemi, noi dobbiamo garantire l'indipendenza del risultato dalla scelta dei dx_i.

Conclusioni

- Nel proporre il calcolo differenziale ed integrale agli studenti, per salvaguardare la loro intuizione, possiamo seguire l'Agnesi in molte pagine del suo manuale.
  Ne ricaviamo **agilità e ricchezza della presentazione**, semplificazione dei calcoli, stretta connessione con il modello geometrico, quindi efficacia e rappresentatività dei simboli.

- La visualizzazione e **l'impostazione geometrica** consente di evitare le complicazioni del mero calcolo, andando a giustificare per via diretta dei risultati che non appaiono astratti.

- Nel manuale ''Instituzioni Analitiche'' **l'intreccio fra il calcolo e l'analogia geometrica è gestito in modo molto naturale** e felice, perché si fonda sull'intuizione dell'effettiva esistenza geometrica delle quantità infinitesime.

Bibliografia

- M. G. Agnesi, *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, Regia-Ducal corte, Milano 1748;
- L. Aldegheri, B. Stecca, *L'analisi non standard nell'opera di Maria Gaetana Agnesi*, atti del VII convegno nazionale NSA, Venezia, 2017;
- L. Aldegheri, B. Stecca, *Aspetti non standard del calcolo integrale nell'opera di Maria Gaetana Agnesi*, atti dell'VIII convegno nazionale NSA, Firenze, 2018;
- V. Brunacci, *Corso di matematica sublime*, editore Allegrini, Firenze 1804;
- F. Minonzio, *Chiarezza e metodo; l'indagine scientifica di Maria Gaetana Agnesi*, Lampi di Stampa, Milano 2006;
- G. Goldoni, *Il professor Apotema insegna… Il calcolo delle somme e il calcolo integrale*, Modena 2014;
- G. Goldoni, *Il professor Apotema insegna… Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale*, Modena 2014.

Si ringrazia la Biblioteca alle Stimate di Verona, per aver consentito la consultazione del testo originale.

Grazie
per
l'attenzione

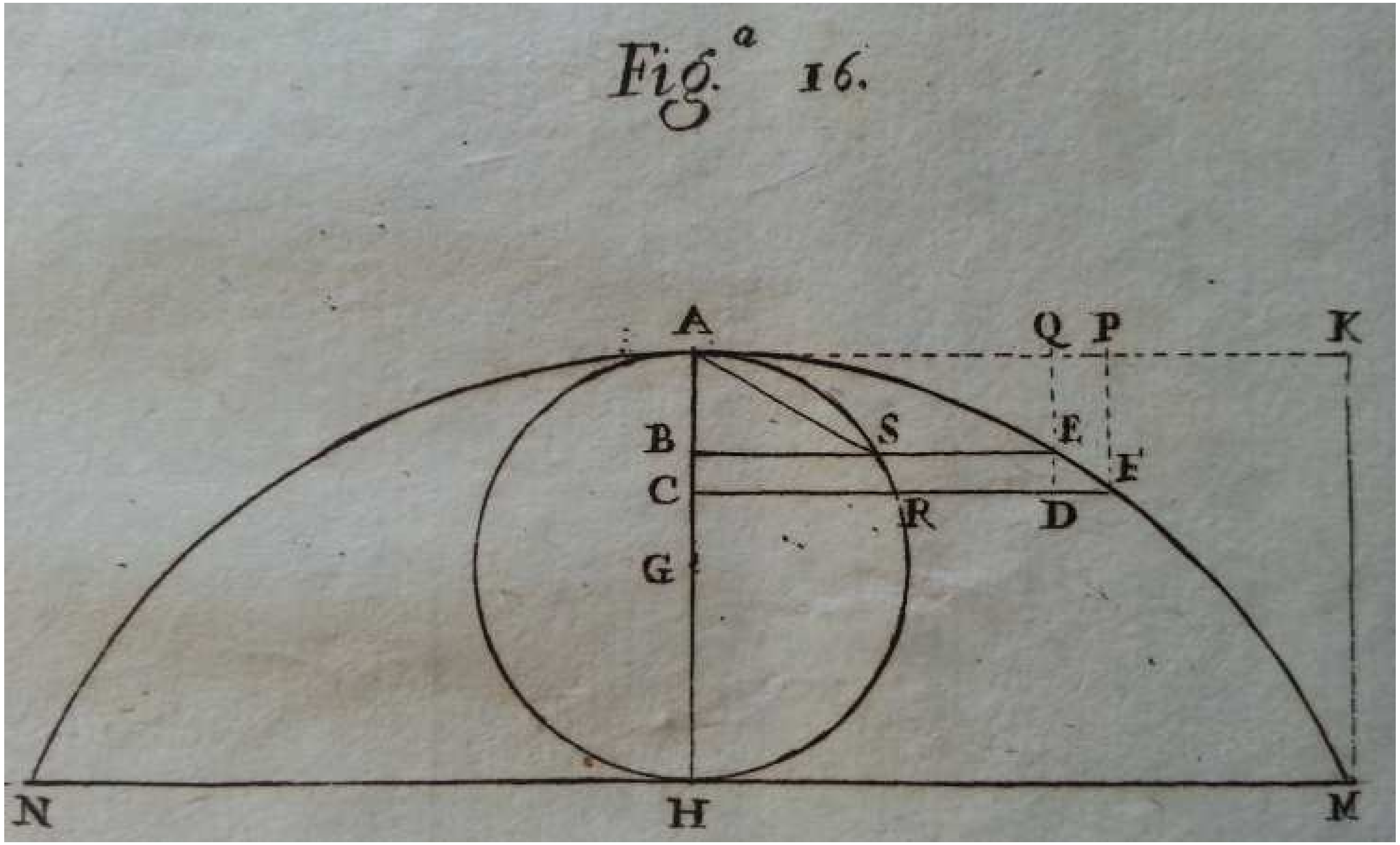


Figura 16, tomo II, libro III: la cicloide.