Un Percorso Olimpico tra Invarianti e Colorazioni

Settembre 2018

Problemi

Problema 1.

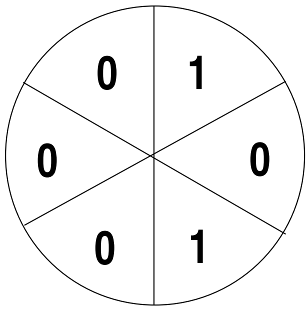
Alice e Bob fanno il seguente gioco. Su una lavagna vi è scritto un intero $n > 1$, e a turno i due sfidanti devono fare una delle seguenti mosse:

1. Togliere 1 dall'intero n e passare,
2. Oppure, se $n \geq 10$, cancellare una cifra dal numero e raddoppiare il risultato ottenuto. (Esempio, se $n = 158$, è possibile cancellare la cifra 5 e passare all'avversario il numero $36 = 18 \cdot 2$).

Il gioco termina quando un giocatore riceve $n = 0$ e vince. Quale giocatore ha una strategia vincente al variare di n?

Problema 2.

Un cerchio è diviso da tre diametri in 6 settori. Inizialmente nei settori scrivo nell'ordine i numeri $1, 0, 1, 0, 0, 0$. Ad ogni mossa posso sommare 1 in ognuno di due settori consecutivi. Stabilire se è possibile ottenere, dopo un certo numero di mosse, lo stesso valore in ogni settore.



Problema 3.

Ognuno dei numeri a_i, per $i = 1, \ldots, n$, è uguale a 1 o -1.
Dimostrare che se

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + a_3a_4a_5a_6 + \ldots + a_na_1a_2a_3 = 0$$

allora n è multiplo di 4.

Problema 4.

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto del piano tale che $0 < y_0 < x_0$. Costruiamo la sequenza di punti $P_n = (x_n, y_n)$ seguendo la seguente regola:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

$$y_{n+1} = \frac{2x_ny_n}{x_n + y_n}.$$

A quale punto tendono ad avvicinarsi sempre più i punti della sequenza?

Problema 5.

Dimostrare che è impossibile ricoprire una griglia 10×10 con pezzi 4×1.

Problema 6.

Sappiamo che è possibile ricoprire perfettamente un certo pavimento rettangolare usando un certo numero di mattonelle 2×2 e 1×4. Purtroppo una di queste si rompe e deve essere sostituita, ma si ha a disposizione tra gli avanzi solo una mattonella dell'altro tipo. Dimostrare che non è possibile tassellare lo stesso pavimento con le mattonelle che si hanno a disposizione.

Problema 7.

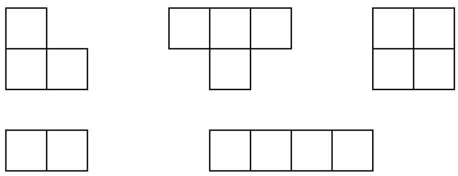
Dimostrare che è impossibile disporre 53 blocchi $1 \times 1 \times 4$ in una griglia cubica $6 \times 6 \times 6$.

Problema 8.

Un quadrato 7×7 è coperto da sedici rettangolini 1×3 e un quadratino 1×1. Quali sono le posizioni ammissibili per il quadratino 1×1?

Problema 9.

Stabilire se è possibile ricoprire un quadrato di lato 2^n a cui è stata tolta una casella, con pezzi a forma di L ottenuti unendo tre quadratini 1 (vedi esempio in alto a sinistra nella figura seguente).



Problema 10.

Un giocatore di hockey su ghiaccio mette tre dischi a terra davanti a lui ai vertici di un triangolo (non degenere). Inizia poi ad allenarsi colpendo ogni volta un disco a sua scelta e, facendolo muovere in linea retta, lo fa passare in mezzo agli altri due ottenendo dopo ogni colpo un nuovo triangolo. E' possibile che dopo 101 colpi ogni disco sia esattamente nella sua posizione iniziale?

Problema 11.

Alberto scrive sulla lavagna i numeri da 1 a $2n$, con n dispari. Poi sceglie due di questi numeri a e b, li cancella, e aggiunge sulla lavagna il numero $|a-b|$. Dimostrare che procedendo in questo modo lascerà sulla lavagna un numero dispari.

Problema 12.

Considero una scacchiera classica 8×8 con la colorazione abituale. Ho a disposizione due mosse:

1. ricolorare tutte le caselle di una riga o una colonna del colore opposto a quello attuale;
2. ricolorare tutte le caselle di un quadrato 2×2 del colore opposto a quello attuale.

Esiste una sequenza di mosse che produca una colorazione con una sola casella nera e 63 bianche?

Problema 13.

Alberto per sconfiggere la solitudine ha inventato un gioco. All'inizio vi sono n monete in pila, e poi Alberto può fare una di queste tre mosse:

1. scegliere una pila con almeno 4 monete e spezzarla in 4 pile;
2. scegliere una pila con k monete, toglierle un numero di monete minore o uguale a $\frac{k}{2}$ e spostarle su un'altra pila esistente;
3. scegliere una pila con almeno due monete, spezzarla in due pile e quindi aggiungere una nuova pila con 5 monete.

Alberto vince se riesce a raggiungere una configurazione in cui tutte le pile hanno una sola moneta. Per quali n Alberto può vincere la partita e con quale strategia?

Problema 14.

Dimostrare che non è possibile ricoprire una scacchiera 8×8 usando 15 T-tetromini (in alto al centro nella figura a pag.2) e un quadrato 2×2.

Problema 15.

Dimostrare che è impossibile disporre 250 pacchetti $1 \times 1 \times 4$ in una scatola $10 \times 10 \times 10$

Problema 16.

Dimostrare che è impossibile riempire completamente una scatola $6 \times 5 \times 5$ con pacchetti $1 \times 1 \times 4$.