Diario del Corso di Analisi Matematica II - Mod. 2

Corso di Laurea: Matematica Applicata
Docente: Sisto Baldo

ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso vuole essere un riassunto abbastanza dettagliato di quello che è stato detto in aula, e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione. D'altra parte, queste brevi paginette NON possono sostituire completamente un libro di testo, la lezione in aula o un'interazione diretta con il docente o l'esercitatore: siete quindi invitati a servirvi ANCHE di queste altre opportunità per approfondire le vostre conoscenze!

Indice

1 Lezione del 10/12/2019 (2 ore)

La prima parte delle mie lezioni è dedicata all'introduzione della teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue. Contestualmente, e con poco o nessuno sforzo aggiuntivo, avremo modo di familiarizzarci anche con la teoria della misura (e dell'integrazione) astratte.

Nelle lezioni di Giandomenico Orlandi avete (sostanzialmente) incontrato la *misura di Peano-Jordan*, che è probabilmente uno dei modi più semplici di definire in modo rigoroso l'area di un sottinsieme del piano (il volume di un sottinsieme dello spazio...)

Ricordiamo alcune definizioni rilevanti:

DEFINIZIONE: Un *intervallo* o *rettangolo* in $\mathbf{R}^n$ è un sottinsieme $I \subset \mathbf{R}^n$ che sia prodotto cartesiano di intervalli unidimensionali: $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$. Gli intervalli unidimensionali di cui si fa il prodotto possono essere anche chiusi, oppure chiusi in una sola delle due estremità. La *misura* di un intervallo I è per definizione il numero

$$|I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Si vede subito che per $n = 2$ il nostro intervallo è un rettangolo con lati paralleli agli assi, e la sua misura coincide con l'area. Invece, per $n = 3$, I sarà un parallelepipedo e la sua misura coincide con il volume.

Gli insiemi *misurabili secondo Peano-Jordan* sono insiemi la cui area si approssima bene, sia da fuori che da dentro, con unioni finite di intervalli.

DEFINIZIONE (Insieme misurabile secondo Peano-Jordan): Un sottinsieme $A \subset \mathbf{R}^n$ si dice misurabile secondo Peano-Jordan se è limitato e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un numero finito di intervalli $I_1, \ldots, I_N, J_1, \ldots, J_K \subset \mathbf{R}^n$ tali che gli I_i hanno due a due in comune solo punti della frontiera, i J_i hanno due a due in comune solo punti della frontiera,

$$\bigcup_{i=1}^{N} I_i \subset A \subset \bigcup_{i=1}^{K} J_i$$

e infine

$$\sum_{i=1}^{K} |J_i| - \sum_{i=1}^{N} |I_i| \leq \varepsilon.$$

In tal caso, la *misura di Peano-Jordan* di A si definisce come

$$\begin{aligned} |A| = \quad & \sup\{\sum_{i=1}^{N} |I_i| : I_i \textit{ due a due con interni disgiunti}, \bigcup_{i=1}^{N} I_i \subset A\} \\ = \quad & \inf\{\sum_{i=1}^{K} |J_i| : J_i \textit{ due a due con interni disgiunti}, \bigcup_{i=1}^{K} J_i \supset A\}. \end{aligned}$$

È facile vedere che un rettangolo è misurabile secondo Peano-Jordan, mentre l'insieme dei punti a coordinate razionali di un rettangolo non lo è. Nel piano, il *trapezoide* sotteso ad una funzione di una variabile integrabile secondo Riemann è misurabile secondo Peano-Jordan, e la sua misura è data proprio dall'integrale. Sono anche misurabili secondo Peano-Jordan gli insiemi dati dalla parte di piano compresa tra i grafici di due funzioni di una variabile integrabili secondo Riemann:

ESERCIZIO: Siano $g, h : [a, b] \to \mathbf{R}$ due funzioni di una variabile, integrabili secondo Riemann e con $g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Consideriamo l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ x \in [a, b], \ g(x) \leq y \leq h(x)$. Mostrare che A è misurabile secondo Peano-Jordan e si ha

$$|A| = \int_a^b (h(x) - g(x))\, dx.$$

Un insieme A di questo tipo si chiama *semplice rispetto all'asse delle x...* Gli insiemi semplici rispetto all'asse delle y si definiscono in modo analogo, e ci sono anche naturali generalizzazioni in dimensione più alta.

La misura di Peano-Jordan è un ottimo oggetto, che però si comporta male rispetto ad operazioni *numerabili*: se è vero che l'unione di un numero finito di insiemi misurabili secondo P.-J. rimane misurabile, questo non è vero per unioni numerabili (un unione numerabile di *punti* può dare un insieme non misurabile: un esempio è l'insieme dei punti con coordinate razionali in un rettangolo). Per questa ed altre ragioni, risulta utile definire una nozione più generale di misura, che sarà appunto la misura di Lebesgue.

Siamo ora in grado di definire la *misura esterna di Lebesgue* di un sottinsieme di $\mathbf{R}^n$: l'idea è molto simile a quella della definizione della misura di Peano-Jordan, solo che useremo unioni numerabili anziché unioni finite di intervalli.

DEFINIZIONE (Misura esterna di Lebesgue): Se $A \subset \mathbf{R}^n$, la sua *misura esterna di Lebesgue* si definisce come

$$m(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : \ I_i \textit{ intervalli}, \ \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset A\}.$$

Si noti che non richiediamo che gli intervalli abbiano parti interne disgiunte. Inoltre, consideriamo anche l'insieme vuoto come intervallo degenere, in modo da poter considerare anche ricoprimenti finiti.

La misura esterna di Lebesgue gode delle seguenti proprietà elementari:

TEOREMA (Proprietà elementari della misura esterna di Lebesgue): Sia $m : \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \to [0, +\infty]$ *la misura esterna di Lebesgue*[1]*. Valgono i fatti seguenti:*

(i) $m(\emptyset) = 0$, $m(\{x\}) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbf{R}^n$.

(ii) Se $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, *con* $A, A_1, A_2, \ldots \subset \mathbf{R}^n$, *allora*

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

(numerabile subadditività della misura di Lebesgue). In particolare, se $A \subset B$ *vale* $m(A) \leq m(B)$ *(monotonia della misura di Lebesgue).*

(iii) Nella definizione della misura esterna di Lebesgue, non è restrittivo chiedere che gli intervalli I_i *siano tutti aperti.*

(iv) $m(I) = |I|$ *per ogni intervallo* $I \subset \mathbf{R}^n$. *Inoltre,* $m(\mathbf{R}^n) = +\infty$.

DIM.: La (i) è lasciata come facile esercizio. Per quanto riguarda la (ii), è importante fare un'osservazione preliminare che ricorre in tutta la teoria della misura: la somma di una serie di numeri non negativi (che ovviamente può essere $+\infty$) non cambia se si permuta l'ordine degli addendi della serie (per esercizio si provi a dimostrare questo fatto, che è falso per le serie a termini di segno qualunque che non siano assolutamente convergenti).

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e un indice i: per definizione di inf possiamo trovare una successione di intervalli $\{I_j^i\}_j$ tali che $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^i \supset A_i$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j^i| < m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Allora $\{I_j^i\}_{i,j}$ è un ricoprimento numerabile di A fatto di intervalli, e per definizione di misura di Lebesgue abbiamo

$$m(A) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |I_j^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |I_j^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} (m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) + \varepsilon,$$

[1] $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ denota l'insieme delle parti di $\mathbf{R}^n$, ossia l'insieme di tutti i sottinsiemi di $\mathbf{R}^n$.

da cui segue (ii) perché ε può essere preso arbitrariamente piccolo.

La monotonia è conseguenza immediata della subadditività numerabile.

Dimostriamo (iii): se $A \subset \mathbf{R}^n$, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare degli intervalli I_j tali che $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j \supset A$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < m(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per ogni $j = 1, 2, \ldots$ sia $I'_j \supset I_j$ un intervallo *aperto* di poco più grande, scelto in modo che $|I'_j| < |I_j| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Allora

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I'_j| < \sum_{j=1}^{\infty} (|I_j| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}) < m(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

e (iii) è dimostrata.

Sorpendentemente, la (iv) è la proprietà più difficile da dimostrare. Grazie alla (iii), essa segue immediatamente dal seguente

LEMMA: Se I è un intervallo, allora per ogni successione di intervalli I_j aperti con $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset I$ si ha

$$(*) \quad |I| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|.$$

La (*) è dimostrabile abbastanza facilmente se gli I_j sono in numero finito, lo è meno nel caso generale di un ricoprimento numerabile. Se però $J \subset I$ è un intervallo *chiuso e limitato*, esso è *compatto* e possiamo dire che esiste un numero finito di intervalli $I_1, I_2, \ldots, I_N$ del nostro ricoprimento di I tali che $J \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} I_j$.

Poiché la (*) è vera per i ricoprimenti finiti, se ne deduce che

$$|J| \leq \sum_{j=1}^{N} |I_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|.$$

Poiché la misura di J può essere presa vicina quanto si vuole alla misura di I, (*) risulta dimostrata. Q.E.D.

Come immediata conseguenza del nostro teorema, vediamo che un sottinsieme *numerabile* di $\mathbf{R}^n$ ha misura zero: infatti, un punto di $\mathbf{R}^n$ ha evidentemente misura di Lebesgue zero e la nostra affermazione segue dalla numerabile subadditività.

La misura esterna di Lebesgue è un importante caso particolare di un oggetto astratto più generale, chiamato misura esterna:

DEFINIZIONE (Misura esterna): Una *misura esterna* su un insieme X è una funzione $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e che sia numerabilmente subadditiva: se $A, A_1, A_2, A_3, \ldots \subset X$ e $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, allora

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Dalla numerabile subadditività segue che μ è monotona: se $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Un esempio di misura esterna diversa dalla misura di Lebesgue è la *restrizione* della misura di Lebesgue a un sottinsieme $A_0 \subset \mathbf{R}^n$: questa è la misura $\tilde{m}$ definita da

$$\tilde{m}(A) := m(A \cap A_0).$$

Un altro esempio è la misura δ_0 (*delta di Dirac centrata in* 0), misura su $\mathbf{R}^n$ definita da

$$\delta_0(A) = \begin{cases} 1 & \textit{se } 0 \in A, \\ 0 & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

Ancora, è una misura esterna la *"misura che conta"* definita da

$$\#(A) = \begin{cases} \textit{numero degli elementi di } A & \textit{se } A \textit{ è finito}, \\ +\infty & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

2 Lezione del 11/12/2019 (1 ora)

In generale, si può dire che la misura di Lebesgue non ha buone proprietà su *tutti* i sottinsiemi di $\mathbf{R}^n$: essa mostra un comportamento assai più simpatico e desiderabile su una particolare classe di insiemi, detti *misurabili*:

DEFINIZIONE (Insiemi misurabili secondo Lebesgue, definizione di Caratheodory): Un sottinsieme $A \subset \mathbf{R}^n$ si dice *misurabile secondo Lebesgue* o *m-misurabile* se vale l'uguaglianza

$$m(T) = m(T \cap A) + m(T \setminus A)$$

per ogni sottinsieme $T \subset \mathbf{R}^n$. In sostanza, chiediamo che A "spezzi bene" la misura di ogni insieme di $\mathbf{R}^n$.

Si noti che grazie alla numerabile subadditività della misura esterna abbiamo sempre $m(T) \leq m(T \cap A) + m(T \setminus A)$: è quindi sufficiente verificare che valga la disuguaglianza opposta

$$m(T) \geq m(T \cap A) + m(T \setminus A) \qquad \forall T \subset \mathbf{R}^n.$$

Analogamente, data una misura esterna μ, A si dice μ-misurabile se $\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$ per ogni $T \subset \mathbf{R}^n$.

OSSERVAZIONE: In seguito ci sarà utile il seguente fatto: se $A \subset \mathbf{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue e $\tilde{m}$ denota la restrizione della misura di Lebesgue ad un *qualunque* insieme $A_0 \subset \mathbf{R}^n$, allora A è anche $\tilde{m}$-misurabile. Se infatti $T \subset \mathbf{R}^n$ abbiamo

$$\begin{aligned}\tilde{m}(T) = m(T \cap A_0) = m((T \cap A_0) \cap A) + m((T \cap A_0) \setminus A) = \\ m((T \cap A) \cap A_0) + m((T \setminus A) \cap A_0) = \tilde{m}(T \cap A) + \tilde{m}(T \setminus A).\end{aligned}$$

Questo stesso fatto rimane vero, con identica dimostrazione, anche se m e $\tilde{m}$ vengono sostituite da una generica misura esterna μ e dalla sua restrizione $\tilde{\mu}$ all'insieme A_0.

Il seguente teorema mostra due cose: innanzitutto, se partiamo da insiemi misurabili e facciamo operazioni di unione numerabile, complementazione e intersezione numerabile, rimaniamo sempre nell'ambito degli insiemi misurabili. Inoltre, la misura di Lebesgue (o una qualunque misura esterna μ) se ristrette agli insiemi misurabili hanno buone proprietà, la principale delle quali è la *numerabile additività*: la misura dell'unione di una famiglia numerabile di insiemi due a due disgiunti è uguale alla somma delle loro misure.

TEOREMA (Proprietà degli insiemi misurabili e della misura sugli insiemi misurabili): Sia m la misura di Lebesgue su $\mathbf{R}^n$. Valgono i seguenti fatti

(i) Se A è misurabile secondo Lebesgue, allora $A^C = \mathbf{R}^n \setminus A$ è misurabile. Inoltre, se $m(A) = 0$ allora A è misurabile.

(ii) Unione o intersezione numerabile di insiemi misurabili è misurabile.

(iii) Se $\{A_i\}_i$ è una famiglia di insiemi misurabili due a due disgiunti e $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, allora

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

(numerabile additività della misura di Lebesgue sui misurabili).

(iv) Se $\{A_i\}$ è una successione crescente di insiemi misurabili, cioè se $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, e $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ allora

$$m(A) = \lim_{i \to +\infty} m(A_i).$$

(v) Se $\{A_i\}$ è una successione decrescente di insiemi misurabili, cioè se $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, se $m(A_1) < +\infty$ e se infine $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, allora

$$m(A) = \lim_{i \to +\infty} m(A_i).$$

Identico enunciato vale se la misura di Lebesgue è sostituita con una qualunque misura esterna μ e gli insiemi misurabili secondo Lebesgue con gli insiemi μ-misurabili.

DIM.: La (i) è ovvia se si osserva che la condizione di misurabilità può essere riscritta:

$$m(T) \geq m(T \cap A) + m(T \cap A^C) \qquad \forall T \subset \mathbf{R}^n.$$

Che un insieme di misura nulla sia misurabile è immediato. Da questo segue in particolare che $\emptyset$ e $\mathbf{R}^n$ sono misurabili.

Mostriamo una versione indebolita di (ii): se A e B sono misurabili, allora $A \cup B$ e $A \cap B$ sono misurabili. Infatti, se $T \subset \mathbf{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}
&m(T) = m(T \cap A) + m(T \setminus A) = \\
&m((T \cap A) \cap B) + m((T \cap A) \setminus B) + m((T \setminus A) \cap B) + m((T \setminus A) \setminus B).
\end{aligned}$$

Si osservi l'ultima riga: l'unione degli insiemi nei primi tre addendi è esattamente $T \cap (A \cup B)$ per cui, per la subadditività della misura, la somma dei primi tre addendi è $\geq m(T \cap (A \cup B))$. Invece, l'insieme nell'ultimo addendo non è altro che $T \setminus (A \cup B)$: si ha allora

$$m(T) \geq m(T \cap (A \cup B)) + m(T \setminus (A \cup B)),$$

e $A \cup B$ è misurabile. Da questo e da (i) segue la misurabilità di $A \cap B$ perché $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$. Per induzione, segue anche che unione e intersezione *finita* di insiemi misurabili è misurabile (alle unioni e intersezioni numerabili arriveremo solo alla fine, dopo aver dimostrato tutto il resto!).

Vedremo la prossima volta il resto della dimostrazione...

3 Lezione del 17/12/2019 (2 ore)

Concludiamo la dimostrazione del teorema sulla proprietà della misura sugli insiemi misurabili.

Cominciamo a dimostrare (iii): essa è vera per l'unione di *due* insiemi misurabili e disgiunti in quanto $m(A \cup B) = m((A \cup B) \cap A) + m((A \cup B) \setminus A) = m(A) + m(B)$. Per induzione, ne deriva che (iii) è vera per l'unione di una famiglia finita di insiemi misurabili due a due disgiunti.

Nel caso generale di una famiglia *numerabile* di insiemi misurabili due a due disgiunti, la numerabile subadditività della misura fornisce $m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$, mentre la monotonia assicura che per ogni $N \in \mathbf{N}$

$$m(A) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^{N}(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{N} m(A_i),$$

dove l'ultima uguaglianza vale per quanto osservato sulle unioni finite di insiemi misurabili disgiunti. Passando al sup su N si ricava

$$m(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

e (iii) è dimostrata.

Dimostriamo (iv): basta applicare (iii) alla successione di insiemi due a due disgiunti data da $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ $(i \geq 2)$. Si ha

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} m(B_i) = \lim_{N \to +\infty} m(A_N).$$

Dimostriamo (v): Definiamo la successione crescente di insiemi $B_i = A_1 \setminus A_i$, $i = 2, 3, \ldots$. Allora

$$A_1 = A \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} B_i$$

e per (iv) si ha

$$m(A_1) \leq m(A) + \lim_{i \to +\infty} [m(A_1) - m(A_i)],$$

da cui $\lim_{i \to +\infty} m(A_i) \leq m(A)$. La disuguaglianza opposta vale per monotonia, per cui la (v) è dimostrata.

A questo punto il teorema è quasi dimostrato: manca solo la (ii).

Sia $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, con gli A_i tutti misurabili Dobbiamo mostrare che A è misurabile.

Sia $T \subset \mathbf{R}^n$. Consideriamo la successione crescente di insiemi misurabili $B_N := \bigcup_{i=1}^{N} A_i$: essi sono misurabili anche per la misura esterna $\tilde{m}$ data dalla restrizione di m all'insieme T (cioè la misura definita da $\tilde{m}(A) := m(T \cap A)$ per ogni $A \subset \mathbf{R}^n$). Per la monotonia della misura abbiamo:

$$(* * *) \quad m(T) = m(T \cap B_N) + m(T \setminus B_N) \geq m(T \cap B_N) + m(T \setminus A)$$

D'altra parte, per (iv) applicata alla misura esterna $\tilde{m}$ abbiamo

$$\lim_{N \to +\infty} m(T \cap B_N) = \lim_{N \to +\infty} \tilde{m}(B_N) = \tilde{m}(A) = m(T \cap A)$$

e la misurabilità di A segue passando al limite per $N \to +\infty$ in (***). La misurabilità di $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ segue al solito scrivendo

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C \right)^C .$$

Q.E.D.

Il seguente teorema mostra che gli insiemi misurabili secondo Lebesgue abbondano.

TEOREMA (Regolarità della misura di Lebesgue): I sottinsiemi aperti e i sottinsiemi chiusi di $\mathbf{R}^n$ sono misurabili secondo Lebesgue. Inoltre, se A è un insieme misurabile secondo Lebesgue, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono B aperto e C chiuso, con $C \subset A \subset B$ e $m(B \setminus C) < \varepsilon$.

Per dimostrarlo ci servirà il seguente fatterello topologico: qualunque aperto di $\mathbf{R}^n$, comunque complicato, può essere ottenuto facendo un'unione numerabile di intervalli:

PROPOSIZIONE: Ogni aperto $A \subset \mathbf{R}^n$ è unione numerabile di intervalli aperti.

DIM.: Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ costituita da tutti i cubi di $\mathbf{R}^n$ del tipo $(q_1 - r, q_1 + r) \times (q_2 - r, q_2 + r) \times \ldots \times (q_n - r, q_n + r)$, dove tutti i q_i ed r sono razionali. Questa è una famiglia numerabile di intervalli.

Mostriamo che A è unione degli elementi della famiglia numerabile di intervalli

$$\mathcal{F}' = \{I \in \mathcal{F} : I \subset A\}.$$

Infatti, poiché A è aperto, per ogni $x \in A$ esiste una palla aperta $B_{r(x)}(x) \subset A$. Dentro questa palla possiamo trovare un cubo centrato in x dentro il quale, grazie alla densità dei razionali, c'è un elemento $I_x \in \mathcal{F}$ che contiene x. Per costruzione, $I_x \in \mathcal{F}'$: abbiamo mostrato che per ogni $x \in A$ c'è un elemento della famiglia numerabile $\mathcal{F}'$ che lo contiene. Dunque $A = \bigcup_{I \in \mathcal{F}'} I$.
Q.E.D.

Dimostriamo il teorema di regolarità della misura di Lebesgue.

È un esercizio relativamente semplice verificare che gli intervalli sono insiemi misurabili secondo Lebesgue: un intervallo si ottiene come intersezione finita di *semispazi*. A sua volta, un semispazio S è misurabile secondo Lebesgue: se T è un insieme test, fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\{I_i\}$ una famiglia numerabile di intervalli che ricopre T tale che $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m(T) + \varepsilon$. Definiamo poi $I_i' = I_i \cap S$, $I_i'' = I_i \cap (\mathbf{R}^n \setminus S)$: questi sono ancora intervalli (eventualmente vuoti), la somma delle cui misure è esattamente $|I_i|$. Inoltre, la famiglia $\{I_i'\}$ ricopre $T \cap S$, mentre $\{I_i''\}$ ricopre $T \cap S^C$: dunque

$$m(T) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} |I_i'| + \sum_{i=1}^{\infty} |I_i''| \geq m(T \cap S) + m(T \cap S^C)$$

e la misurabilità di S segue perché ε è arbitrario.

Di conseguenza gli intervalli sono misurabili, e lo sono anche gli aperti perché possono essere ottenuti come unione numerabile di intervalli.

I chiusi sono misurabili perché i loro complementari sono aperti e quindi misurabili.

Sia ora A misurabile, $\varepsilon > 0$: mostriamo che esiste un aperto $B \supset A$ con $m(B \setminus A) < \varepsilon/2$. Supponiamo dapprima che A abbia misura finita. Per definizione di misura di Lebesgue, possiamo trovare una famiglia numerabile di intervalli $I_1, I_2, \ldots$ con $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset A$ e $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq m(A) + \varepsilon/2$. Abbiamo già visto che non è restrittivo supporre che gli I_i siano tutti aperti. Se $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, allora B è aperto e per subadditività

$$m(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \leq m(A) + \varepsilon/2,$$

da cui $m(B \setminus A) = m(B) - m(A) \leq \varepsilon/2$.

Mostriamo che anche un insieme misurabile A con $m(A) = +\infty$ si approssima "da fuori" con insiemi aperti: prendiamo $\varepsilon > 0$ e mostriamo che esiste $B \supset A$, B aperto, tale che $m(B \setminus A) < \varepsilon$.

A tal fine consideriamo gli insiemi misurabili $A_N = A \cap B_N(0)$, $N = 1, 2, \ldots$: essi hanno tutti misura finita e la loro unione è A. Per ciascuno di questi possiamo trovare $B_N \supset A_N$, B_N aperto tale che $m(B_N \setminus A_N) < \frac{\varepsilon}{2^{N+1}}$: definiamo $B = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} B_N$.

Ora, B è un aperto che contiene A, e inoltre $B \setminus A \subset \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} (B_N \setminus A_N)$: per subadditività numerabile ricaviamo $m(B \setminus A) \leq \sum\limits_{N=1}^{\infty} m(B_N \setminus A_N) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mostriamo infine che dato A misurabile e $\varepsilon > 0$, esiste un chiuso $C \subset A$ con $m(A \setminus C) < \varepsilon/2$: questo concluderà la nostra dimostrazione. A questo fine, scegliamo un aperto $F \supset A^C$ tale che $m(F \setminus A^C) < \varepsilon/2$. Allora $C = F^C$ è un chiuso, $C \subset A$, e $m(A \setminus C) = m(F \setminus A^C) < \varepsilon/2$. Q.E.D.

Nonostante vi siano moltissimi insiemi misurabili secondo Lebesgue, non tutti i sottinsiemi di $\mathbf{R}^n$ lo sono: ne vedremo un celebre esempio la volta prossima.

4 Lezione del 18/12/2019 (1 ora)

Vi sono insiemi che non sono misurabili secondo Lebesgue!

ESEMPIO (Insieme non misurabile di Vitali): Mettiamoci nel caso $n = 1$, e consideriamo l'intervallo $(0,1) \subset \mathbf{R}$. Definiamo la seguente relazione di equivalenza su $(0,1)$: diciamo che $x \sim y$ se e solo se $x - y \in \mathbf{Q}$. La nostra relazione di equivalenza partiziona l'intervallo $(0,1)$ in infinite classi di equivalenza: definiamo un insieme A che contiene esattamente 1 elemento per ogni classe di equivalenza[2].

Mostriamo ora che l'insieme A non è misurabile secondo Lebesgue.

Per ogni $q \in \mathbf{Q} \cap [0,1)$ definiamo gli insiemi $A_q = \{x + q : \ x \in A\}$. Siccome la misura di Lebesgue è invariante per traslazione (questo è ovvio per come è definita: la misura di un intervallo è invariante per traslazione!) abbiamo che $m(A_q) = m(A)$. Poiché gli intervalli sono misurabili secondo Lebesgue abbiamo anche $m(A) = m(A_q) = m(A_q \cap (0,1)) + m(A_q \setminus (0,1))$. Se $B_q = A_q \setminus (0,1)$, definiamo $\tilde{B}_q = \{x : \ x + 1 \in B_q\}$: evidentemente $m(\tilde{B}_q) = m(B_q)$ per l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue.

Definiamo infine $\tilde{A}_q = (A_q \cap (0,1)) \cup \tilde{B}_q$. Per quanto visto sopra, abbiamo $m(\tilde{A}_q) = m(A)$. Ora, è facile vedere che gli insiemi A_q sono due a due disgiunti al variare di $q \in \mathbf{Q} \cap [0,1)$ e che $\bigcup\limits_{q} \tilde{A}_q = (0,1)$. Se A fosse misurabile,

[2] Per poter definire questo insieme, dobbiamo assumere la validità dell'assioma della scelta!

lo sarebbero anche gli insiemi $\tilde{A}_q$ e per additività numerabile avremmo

$$1 = m([0,1)) = \sum_{q \in [0,1) \cap \mathbf{Q}} m(\tilde{A}_q) = \sum_{q \in [0,1) \cap \mathbf{Q}} m(A).$$

Questo è assurdo: infatti la misura di A è nulla oppure positiva. Se fosse $m(A) = 0$, l'espressione di destra varrebbe 0, mentre se fosse $m(A) > 0$ essa varrebbe $+\infty$: in nessun caso essa può essere uguale a 1. Dunque A non è misurabile secondo Lebesgue.

L'assioma della scelta, oltre a consentirci - come abbiamo appena visto - di esibire insiemi non misurabili secondo Lebesgue, implica anche cose ben più strane, tra le quali è celebre il paradosso di Banach-Tarski: la palla unitaria di $\mathbf{R}^3$ può essere partizionata in un numero finito di sottinsiemi (non misurabili secondo Lebesgue!) che, tramite movimenti rigidi e senza sovrapposizioni, possono essere riassemblati ottenendo due copie identiche della palla iniziale.

Nell'introduzione dell'articolo del 1924 in cui questo teorema è stato pubblicato per la prima volta, Banach e Tarski citano espressamente la costruzione dell'insieme di Vitali come un'importante fonte di ispirazione per il loro lavoro.

La dimostrazione del teorema dipende però in modo essenziale anche dalla struttura algebrica del gruppo delle isometrie dello spazio.

In vista della definizione dell'integrale di Lebesgue, occorre definire un'importante classe di funzioni: le funzioni *misurabili*.

DEFINIZIONE (funzione misurabile): Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ misurabile, $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$. Il simbolo $\overline{\mathbf{R}}$ denota l'insieme $\mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$: in questo contesto, in futuro useremo la "strana" convenzione che $0 \cdot \pm\infty = 0$, mentre la somma $+\infty - \infty$ rimarrà non definita, come è giusto che sia!

La funzione f si dice *misurabile* (rispetto ad una fissata misura esterna, per esempio la misura di Lebesgue su $\mathbf{R}^n$) se per ogni $a \in \mathbf{R}$ gli insiemi $f^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > a\}$ sono misurabili.

Una caratterizzazione equivalente della misurabilità, di sapore un po' più topologico, è data dalla seguente

PROPOSIZIONE (Caratterizzazione delle funzioni misurabili): Una funzione $f : A_0 \to \overline{\mathbf{R}}$ (con $A_0 \subset \mathbf{R}^n$ misurabile) è misurabile se e solo se $f^{-1}(\{+\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\})$ sono misurabili e $f^{-1}(U)$ è misurabile per ogni aperto $U \subset \mathbf{R}$.

Vedremo domani la dimostrazione di questo risultato!

5 Lezione del 19/12/2019 (2 ore)

DIM.: Se sappiamo che $f^{-1}(\{+\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\})$ sono misurabili e $f^{-1}(U)$ è misurabile per ogni aperto $U \subset \mathbf{R}$, allora f è misurabile perché $f^{-1}((a,+\infty]) = f^{-1}((a,+\infty)) \cup f^{-1}(\{+\infty\})$.

Viceversa, supponiamo che f sia misurabile e dimostriamo che la controimmagine di un aperto è sempre misurabile.

Possiamo scrivere

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{N=1}^{\infty} f^{-1}((N,+\infty]),$$

per cui $f^{-1}(\{+\infty\})$ è misurabile in quanto intersezione numerabile di misurabili.

Dall'ipotesi di misurabilità di f segue allora che $f^{-1}((a,+\infty))$ è misurabile per ogni $a \in \mathbf{R}$. Dimostriamo che anche gli insiemi $f^{-1}([a,+\infty))$, $f^{-1}((-\infty,a))$ e $f^{-1}((-\infty,a])$ sono tutti misurabili per ogni $a \in \mathbf{R}$. Infatti, $f^{-1}([a,+\infty)) = \bigcap_{N=1}^{\infty} f^{-1}((a-\frac{1}{N},+\infty))$ è misurabile in quanto intersezione numerabile di misurabili. Le controimmagini di semirette "sinistre" del tipo $f^{-1}([-\infty,a))$ e $f^{-1}([-\infty,a])$ sono misurabili in quanto sono complementari di controimmagini di semirette "destre". Ne segue che $f^{-1}(\{-\infty\})$ è misurabile: $f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty,-N])$...e sono misurabili anche le controimmagini di semirette "sinistre" senza $-\infty$.

Allora, anche le controimmagini di intervalli aperti sono misurabili, infatti $f^{-1}((a,b)) = f^{-1}((-\infty,b)) \cap f^{-1}(a,+\infty))$. Se poi $U \subset \mathbf{R}$ è aperto, scriviamo $U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$, con $I_i \subset \mathbf{R}$ intervalli aperti. Allora $f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} f^{-1}(I_i)$ è misurabile. Q.E.D.

Osserviamo che una funzione continua a valori reali, definita su un aperto di $\mathbf{R}^n$, è certamente misurabile secondo Lebesgue. Perché?

Le funzioni misurabili sono "stabili" per tutta una serie di operazioni algebriche e di limite:

PROPOSIZIONE (Stabilità delle funzioni misurabili): Supponiamo che f, g siano misurabili, $\lambda \in \mathbf{R}$ e che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni misurabili. Allora

(i) l'insieme $\{x : \ f(x) > g(x)\}$ è misurabile;

(ii) se $\phi : \overline{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}$ è continua, allora $\phi \circ f$ è misurabile (sul suo dominio);

(iii) *le funzioni* $f+g$, λf, $|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ *e* fg *sono tutte misurabili nel loro dominio;*

(iv) *le funzioni* $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ *e* $\lim f_n$ *sono tutte misurabili nel loro dominio.*

DIM.: Per verificare la (i), osserviamo che se $f(x) > g(x)$, allora esiste un razionale q compreso tra $g(x)$ e $f(x)$. Allora il nostro asserto è vero in quanto possiamo scrivere

$$\{x:\ f(x) > g(x)\} = \bigcup_{q\in\mathbf{Q}} \left(f^{-1}((q,+\infty]) \cap g^{-1}([-\infty,q))\right),$$

per cui abbiamo espresso il nostro insieme come unione numerabile di insiemi misurabili.

La (ii), nel caso di funzioni a valori reali, è ovvia grazie alla nostra caratterizzazione delle funzioni misurabili: sappiamo infatti che la controimmagine di un aperto secondo ϕ è un aperto. Nel caso di funzioni a valori reali estesi, occorre precisare cosa vuol dire che Φ è continua: significa che la controimmagine di ogni aperto di $\overline{\mathbf{R}}$ è un aperto in $\overline{\mathbf{R}}$. A loro volta, gli aperti di $\overline{\mathbf{R}}$ sono gli insiemi che si possono ottenere prendendo unioni (è sufficiente prenderle numerabili) di intervalli aperti di $\mathbf{R}$ e di semirette "intorno di $\pm\infty$", cioè del tipo $(a,+\infty]$ oppure $[-\infty,a)$. È allora un semplice esercizio verificare che la composizione è ancora misurabile.

Vediamo la (iii): siano f, g misurabili e consideriamo la funzione somma $f+g$ (essa è definita sull'intersezione dei domini, privata dei punti in cui la somma si presenta nella forma $+\infty-\infty$ o $-\infty+\infty$). Essa è misurabile in quanto

$$(f+g)^{-1}((a,+\infty]) = \{x : f(x) > a - g(x)\}$$

è misurabile grazie a (i): la funzione $a-g(x)$ è infatti banalmente misurabile. Da (ii) segue poi la misurabilità di λf, di $|f|$ e di f^2 (che si ottengono da f componendo con una funzione continua). Se f, g sono a valori reali possiamo poi scrivere $\max\{f(x),g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|)$, $\min\{f(x),g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|)$, $f(x)g(x) = \frac{1}{2}((f(x)+g(x))^2 - f^2(x) - g^2(x))$, il che ci fornisce la misurabilità di $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ e fg. Nel caso generale di funzioni a valori reali estesi, il ragionamento appena fatto ci fornisce la misurabilità della restrizione delle funzioni che ci interessano all'insieme, evidentemente misurabile, dove sia f che g sono finite.

Tutto il resto è facilmente decomponibile in pochi pezzi misurabili, su ciascuno dei quali le funzioni in esame sono costanti: per esempio, $f(x)g(x)$ vale identicamente $+\infty$ sull'insieme (misurabile) $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = +\infty, g(x) > 0\}$, vale 0 sull'insieme $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = +\infty, g(x) = 0\}$, etc. In conclusione, se ne deduce facilmente che la funzione prodotto è misurabile.

Dimostriamo (iv): sia $f(x) = \sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \ldots\}$. Si ha $f^{-1}((a, +\infty)) = \bigcup_n f_n^{-1}((a, +\infty))$, per cui f è misurabile essendolo le f_n. Analogamente, $\inf_n f_n(x)$ è misurabile.

La funzione $\liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ è misurabile in quanto $\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \sup_n \inf\{f_m(x) : m \geq n\}$. Analogamente, $\limsup_{n\to+\infty} f_n(x)$ è misurabile. L'insieme dove le due funzioni misurabili $\liminf_n f_n$ e $\limsup_n f_n$ coincidono è misurabile: tale insieme è proprio quello in cui esiste $\lim_n f_n$, che quindi è misurabile. Q.E.D.

Un'importante sottoclasse delle funzioni misurabili è quella delle *funzioni semplici*: nella definizione di integrale di Lebesgue esse giocheranno lo stesso ruolo che le funzioni a scala avevano in quella dell'integrale di Riemann.

Ricordiamo che, dato $A \subset \mathbf{R}^n$, la sua *funzione caratteristica* è la funzione

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

DEFINIZIONE: Una *funzione semplice* $\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili. In altre parole, ϕ è semplice se esistono un numero finito di insiemi misurabili $A_1, A_2, \ldots, A_N$ e dei numeri reali $c_1, c_2, \ldots, c_N$ tali che $\phi(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$. Evidentemente, non è restrittivo supporre che gli A_i siano due a due disgiunti. In modo equivalente, possiamo dire che una funzione semplice è una funzione *misurabile* la cui immagine è un *insieme finito.*

Se $\phi(x) \geq 0$ per ogni x, definiamo in modo naturale l'integrale (di Lebesgue) di ϕ rispetto alla misura m come

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} c_i\, m(A_i).$$

Osserviamo che una funzione a scala è una funzione semplice in cui gli insiemi A_i sono intervalli. Per la misura di Lebesgue e per questo tipo di funzioni, la nuova definizione di integrale coincide con quella di Riemann. Inoltre, non è difficile vedere che l'integrale sulle funzioni semplici gode delle usuali proprietà di monotonia, di additività e di omogeneità rispetto alla funzione integranda.

Come vedremo, l'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile non negativa f si definisce in maniera del tutto analoga all'integrale (inferiore) di Riemann, sostituendo le funzioni a scala con le funzioni semplici: $\int f(x)\,dx = \sup\{\int \phi(x)\,dx : \ \phi \text{ semplice}, \ \phi \le f\}$.

Tuttavia, per provare che quest'oggetto gode di tutte le proprietà che ci aspettiamo, sarà necessario provare un risultato di approssimazione: il prossimo, fondamentale teorema dice che ogni funzione misurabile *non negativa* può essere approssimata da sotto con una successione di funzioni semplici:

TEOREMA (Approssimazione di funzioni misurabili con funzioni semplici): Sia $f : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Allora esiste una successione $\phi_k : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty)$ di funzioni semplici tali che $f \ge \phi_{k+1} \ge \phi_k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) e tali che

$$\lim_{k\to+\infty} \phi_k(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

DIM.: Per ogni fissato $k = 1, 2, \ldots$ e $j = 0, 2, \ldots, k2^k - 1$ definiamo gli insiemi misurabili $E_{k,j} = f^{-1}([\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}))$, mentre poniamo $E_{k,k2^k} = f^{-1}([k2^k, +\infty])$.

Consideriamo poi le funzioni semplici[3]

$$\phi_k(x) = \sum_{j=0}^{k2^k} \frac{j}{2^k} \mathbf{1}_{E_{k,j}}(x).$$

Per costruzione, queste funzioni sono misurabili e sono tutte minori o uguali a f. Inoltre, esse formano una successione crescente: basta osservare che per ogni k e per ogni $j = 1, \ldots, k2^k - 1$ si ha $E_{k,j} = E_{k+1,2j} \cup E_{k+1,2j+1}$. Quanto poi a $E_{k,k2^k}$, questo verrà suddiviso al passo successivo in $2^k + 1$ insiemi...

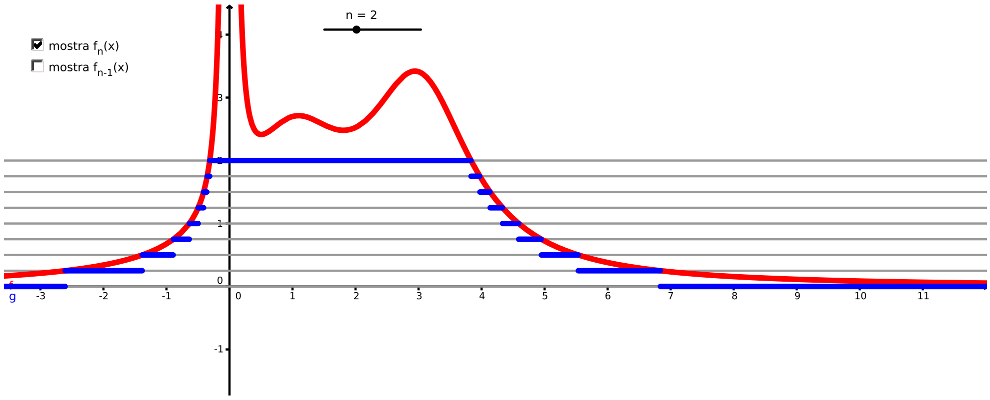
È poi facile vedere che $\phi_k(x) \to f(x)$ per ogni x: se $f(x) < +\infty$, per k abbastanza grande si ha $f(x) - \phi_k(x) \le 2^{-k}$, mentre se invece $f(x) = +\infty$ si ha $x \in E_{k,2^k}$ per ogni k e quindi $\phi_k(x) = k \to +\infty$.

Ecco un tentativo di visualizzare la costruzione delle funzioni ϕ_k con un foglio GeoGebra[4].

---

[3]Possiamo esprimere queste funzioni anche nel seguente modo più compatto: $\phi_k(x) = \min\{k, 2^{-k}[2^k f(x)]\}$, dove $[\cdot]$ denota la parte intera.

[4]`https://www.geogebratube.org/student/m51513`



Q.E.D.

È finalmente giunto il momento di introdurre l'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile non negativa: la definizione è quella anticipata prima.

DEFINIZIONE: L'*integrale di Lebesgue* di una funzione misurabile $f : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ si definisce come

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \sup\{\int_{\mathbf{R}^n} \phi(x)\, dx : \ \phi \text{ semplice},\ \phi \leq f\}.$$

Il prossimo risultato di convergenza integrale si rivelerà importantissimo per la teoria dell'integrale di Lebesgue, grazie anche al risultato di approssimazione con funzioni semplici che abbiamo dimostrato prima.

TEOREMA (di Beppo Levi o della convergenza monotona): Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni misurabili non negative, $f_k : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$, e supponiamo che la successione sia anche crescente: $f_{k+1}(x) \geq f_k(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ e per ogni $k = 1, 2, 3, \ldots$. Allora, se $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$, si ha

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx.$$

Prima della dimostrazione, vediamo una importante conseguenza del teorema di Beppo Levi:

OSSERVAZIONE (Additività dell'integrale rispetto alla funzione integranda): Siano $f, g : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ funzioni misurabili. Allora

$$\int_{\mathbf{R}^n} (f(x) + g(x))\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx + \int_{\mathbf{R}^n} g(x)\, dx.$$

Infatti possiamo trovare due successioni crescenti di funzioni semplici, $\{s_k\}$, $\{u_k\}$ con $s_k \to f$, $u_k \to g$. L'integrale delle funzioni semplici è evidentemente additivo: il teorema di Beppo-Levi ci consente di passare al limite e ottenere l'identità voluta.

6 Lezione del 7/1/2020 (2 ore)

Prima di dimostrare il Teorema di Beppo Levi, vediamo come definire l'integrale su sottinsiemi propri di $\mathbf{R}^n$ e l'integrale di funzioni di segno qualunque:

DEFINIZIONE (Integrazione su sottinsiemi di $\mathbf{R}^n$:)
Se $f : A \to [0, +\infty]$ è misurabile, definiamo $\int\limits_A f(x)\, dx$ come $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \tilde{f}(x)\, dx$, dove $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ si ottiene estendendo f ponendola uguale a 0 fuori da A.

DEFINIZIONE (Integrale di funzioni di segno qualunque): Che fare se abbiamo una funzione misurabile di *segno qualunque* $f : A \to \overline{\mathbf{R}}$? Definiamo la parte positiva e la parte negativa di f nel modo seguente:

$$f^+(x) := \max\{0, f(x)\}, \qquad f^-(x) := -\min\{0, f(x)\}.$$

Evidentemente, si ha $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ e $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$. Se gli integrali di f^+ e f^- non sono *entrambi* $+\infty$, f si dice *integrabile secondo Lebesgue* e definiamo

$$\int_A f(x)\, dx := \int_A f^+(x)\, dx - \int_A f^-(x)\, dx.$$

Se poi i due integrali della parte positiva e della parte positiva sono *entrambi finiti*, allora $f(x)$ si dice *sommabile*, ed ha integrale finito. Evidentemente, una funzione misurabile f è sommabile se e solo se il suo modulo ha integrale finito.

Grazie all'additività dell'integrale e al fatto evidente che le costanti possono essere portate fuori dal segno di integrale, l'integrale di Lebesgue è *lineare* sullo spazio vettoriale delle funzioni sommabili.

Dimostrazione del teorema di Beppo Levi: Notiamo innanzitutto che la funzione f è misurabile in quanto limite (sup) di funzioni misurabili. Inoltre, la successione $k \mapsto \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx$ è crescente: indichiamo con α il suo limite.

Evidentemente, essendo $f \geq f_k$ per ogni k, si ha $\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx \geq \alpha$: in particolare, se $\alpha = +\infty$, il teorema è dimostrato. Se invece $\alpha \in \mathbf{R}$, ci rimane da dimostrare la disuguaglianza opposta

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx \leq \alpha.$$

A tal fine, fissiamo $c \in (0,1)$ e una funzione semplice $s : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty)$ con $s \leq f$. La funzione semplice s può essere scritta $s(x) = \sum_{j=1}^N s_j \mathbf{1}_{A_j}(x)$, con A_j insiemi misurabili due a due disgiunti. Definiamo $E_k = \{x \in \mathbf{R}^n : f_k(x) \geq cs(x)\}$. Grazie al fatto che le f_k tendono a f e che $c < 1$, abbiamo che $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbf{R}^n$, e inoltre la successione di insiemi misurabili E_k è crescente perché lo è $\{f_k\}$. Definiamo poi $A_{j,k} = A_j \cap E_k$: grazie alla continuità della misura sulle successioni crescenti abbiamo $m(A_{j,k}) \to m(A_j)$ per $k \to +\infty$. Allora:

$$\begin{aligned}
&\alpha = \lim_{k\to+\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx \geq \\
&\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{E_k} f_k(x)\, dx \geq \lim_{k\to+\infty} \int\limits_{E_k} c\, s(x)\, dx = \\
&\lim_{k\to+\infty} c \sum_{j=1}^N s_j\, m(A_{j,k}) = c \sum_{j=1}^N s_j\, m(A_j) = c \int\limits_{\mathbf{R}^n} s(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Passando al sup su tutte le funzioni semplici $s \leq f$ e su tutti i $c < 1$, si ottiene la disuguaglianza che ci mancava. Q.E.D.

Si noti che la proprietà di additività rispetto alla funzione integranda continua a valere per funzioni sommabili. In particolare, poiché è evidente dalla definizione che le costanti si possono "portare fuori dall'integrale", l'integrale di Lebesgue è lineare sullo spazio vettoriale delle funzioni sommabili.

Vediamo l'enunciato di un altro celebre risultato: il Lemma di Fatou!

TEOREMA (Lemma di Fatou): Sia $f_k : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ una successione di funzioni misurabili non negative, $f(x) = \liminf\limits_{k\to+\infty} f_k(x)$. Allora

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx.$$

DIM.: Sappiamo già che f è misurabile non negativa. Si ha $f(x) = \lim_{k\to+\infty} g_k(x)$, dove $g_k(x) = \inf\{f_h(x) : \; h \geq k\}$. Poiché le g_k sono una successione crescente di funzioni misurabili non negative abbiamo per Beppo Levi

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} g_k(x)\, dx.$$

La tesi segue allora grazie alla monotonia dell'integrale di Lebesgue, poiché si ha evidentemente $g_k(x) \leq f_k(x)$. Q.E.D.

Un paio di osservazioni: il lemma di Fatou è in generale falso per funzioni di segno qualunque. Si prenda per esempio $n = 1$, $f_k(x) = -1/k$ (funzioni costanti). Allora $f_k(x) \to 0$, ma

$$\int_{\mathbf{R}} f_k(x)\, dx = -\infty, \qquad \int_{\mathbf{R}} 0\, dx = 0.$$

Siccome la nostra successione di costanti cresce, lo stesso esempio mostra che il teorema di Beppo Levi non vale per funzioni di segno qualunque. Infine, le stesse funzioni *cambiate di segno* mostrano che nella tesi del Lemma di Fatou può valere la disuguaglianza stretta.

Probabilmente il più celebre risultato di convergenza integrale nel quadro della teoria di Lebesgue è il seguente:

TEOREMA (Della convergenza dominata di Lebesgue): Sia $f_k : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ una successione di funzioni misurabili, e supponiamo che esista una funzione sommabile $\phi : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ tale che $|f_k(x)| \leq \phi(x)$ per ogni k e per ogni x. Se esiste il limite $f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x)$, allora

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} |f_k(x) - f(x)|\, dx = 0,$$
$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx.$$

DIM.: La funzione limite f è misurabile, ed è anche sommabile perché il suo modulo è dominato da ϕ. Inoltre, $|f_k(x) - f(x)| \leq |f_k(x)| + |f(x)| \leq 2\phi(x)$. Ne segue che la successione di funzioni $2\phi(x) - |f_k(x) - f(x)|$ è non negativa e tende puntualmente alla funzione sommabile $2\phi(x)$. Dal Lemma di Fatou segue allora che

$$\liminf_{k\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} (2\phi(x) - |f_k(x) - f(x)|)\, dx \geq \int_{\mathbf{R}^n} 2\phi(x)\, dx,$$

da cui semplificando l'integrale di $2\phi(x)$:

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} |f_k(x) - f(x)|\, dx \le 0,$$

che è la prima parte della tesi. La seconda parte segue perchè

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx - \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx \right| \le \int_{\mathbf{R}^n} |f_k(x) - f(x)|\, dx.$$

Q.E.D.

Vediamo subito qualche altra conseguenza interessante dei teoremi che abbiamo dimostrato.

ESEMPIO (Integrazione per serie): Se $\{f_k\}$ è una successione di funzioni misurabili non negative definite su A, allora

$$\int_A \sum_{i=1}^{\infty} f_k(x)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_A f_k(x)\, dx.$$

Basta applicare il teorema di Beppo Levi e l'additività dell'integrale rispetto alla funzione integranda alle somme parziali della serie.

ESEMPIO (Numerabile additività dell'integrale rispetto all'insieme di integrazione): Se $\{A_i\}$ è una successione di insiemi misurabili due a due disgiunti e f è una funzione misurabile non negativa definita su $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, allora

$$\int_A f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f(x)\, dx.$$

Basta infatti considerare la successione crescente di funzioni misurabili $g_k(x) = \sum_{i=1}^{k} f(x)\ \mathbf{1}_{A_i}(x)$, che converge alla funzione $g(x) = f(x)\ \mathbf{1}_A(x)$. Un'applicazione del teorema di Beppo Levi dimostra subito la tesi.

Il risultato rimane vero se f è di segno qualunque e sommabile: basta usare il teorema della convergenza dominata (con funzione dominatrice $|f(x)|\mathbf{1_A}(x)$.

7 Lezione del 8/1/2020 (1 ora)

OSSERVAZIONE: La convergenza puntuale nei teoremi di convergenza integrale non è necessaria in *tutti i punti*: non c'è niente di male se essa viene a mancare in un insieme di misura nulla. A questo proposito è utile introdurre una comoda terminologia: si dice che una certa proprietà è vera *per quasi ogni* $x \in \mathbf{R}^n$ *(o q.o.* $x \in A$*, con* A *misurabile)* se l'insieme degli x per cui la proprietà è falsa ha misura di Lebesgue nulla.

Per esempio, date due funzioni $f, g : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$, diremo che esse sono *quasi ovunque uguali* se $m(\{x : \ f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

È un semplice esercizio verificare che una funzione quasi ovunque uguale ad una funzione misurabile è essa stessa misurabile (infatti tutti gli insiemi di misura nulla sono misurabili). Inoltre, due funzioni quasi ovunque uguali hanno lo stesso integrale . Di più, nei teoremi di Beppo Levi, Fatou e Lebesgue, basta avere la convergenza *quasi ovunque* delle funzioni coinvolte (e la funzione dominante ϕ nel toerema di Lebesgue basta che domini le f_k quasi ovunque).

Vediamo per esercizio una semplice conseguenza del teorema della convergenza dominata:

ESEMPIO: Un risultato di integrazione per serie Se $f_k : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ sono sommabili e $\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f_k(x)| < +\infty$, allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge puntualmente ad una funzione sommabile $f(x)$ e

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_k(x)\, dx.$$

Sia infatti $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$: grazie al teorema di integrazione per serie che abbiamo già visto (come conseguenza del teorema di Beppo Levi), questa funzione è sommabile. Ne segue subito che $g(x) < +\infty$ per quasi ogni x: dunque la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge assolutamente per quasi ogni x ad una funzione che battezziamo $f(x)$.

Per concludere, basta applicare il teorema della convergenza dominata alle somme parziali della serie: esse sono dominate dalla funzione sommabile $g(x)$.

Mostriamo che una funzione non negativa con integrale 0 è nulla quasi ovunque:

PROPOSIZIONE: Se $f : A \to [0, +\infty]$ *è misurabile e* $\int\limits_A f(x)\, dx = 0$*, allora* $f = 0$ *quasi ovunque in* A*.*

DIM.: Possiamo scrivere

$$\{x \in A : \ f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : \ f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

Tutti gli insiemi a destra hanno misura nulla: se fosse infatti $m(E_{\overline{n}}) > 0$, con $E_{\overline{n}} = \{x \in A : \ f(x) > \frac{1}{\overline{n}}\}$ avremmo

$$\int\limits_A f(x)\, dx \geq \int\limits_{E_{\overline{n}}} f(x)\, dx \geq m(E_{\overline{n}})/\overline{n} > 0,$$

contro l'ipotesi. Q.E.D.

Il seguente teorema mostra che l'integrale di Riemann coincide con l'integrale di Lebesgue, fatto ovviamente rispetto alla misura di Lebesgue, sull'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann (limitate su un insieme limitato: per gli integrali impropri la faccenda è leggermente più complicata). Enunciamo e dimostriamo il teorema in dimensione 1: la generalizzazione a dimensione superiore si dimostra allo stesso modo.

TEOREMA: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann. Allora f è misurabile secondo Lebesgue, e il suo integrale di Lebesgue coincide con l'integrale di Riemann.

DIM.: Ai fini della dimostrazione, dobbiamo provvisoriamente distinguere l'integrale di Riemann da quello di Lebesgue: data $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, conveniamo che $\int_a^b f(x)\, dx$ rappresenti il suo integrale di Lebesgue, mentre indicheremo con $\mathcal{R} \int_a^b f(x)\, dx$ il suo integrale di Riemann (purché esistano)... Ricordiamo anche che l'integrale di Lebesgue delle funzioni a scala coincide per definizione con il loro integrale di Riemann.

Per definizione di integrale (superiore ed inferiore) secondo Riemann, è possibile trovare due successioni di funzioni a scala $\{\psi_n\}$ e $\{\phi_n\}$, con $\psi_n \geq f \geq \phi_n$ e

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \phi_n\, dx = \mathcal{R} \int_a^b f\, dx.$$

Siano ora $\overline{\psi}(x) = \inf\{\psi_n(x) : \ n = 1, 2, \ldots\}$, $\underline{\phi}(x) = \sup\{\phi_n(x) : \ n = 1, 2, \ldots\}$. Queste due funzioni sono misurabili, e $\underline{\phi} \leq f \leq \overline{\psi}$. Per la monotonia dell'integrale sarà

$$\int_a^b \psi_n(x)\, dx \geq \int_a^b \overline{\psi}(x)\, dx,$$

da cui passando al limite

$$\mathcal{R}\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b \overline{\psi}(x)\,dx,$$

e analogamente

$$\mathcal{R}\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \underline{\phi}(x)\,dx.$$

Siccome $\overline{\psi} \geq \underline{\phi}$, se ne deduce che $\int_a^b (\overline{\psi} - \underline{\phi})\,dx = 0$. Ora, abbiamo visto che una funzione non negativa ha integrale nullo se e soltanto se è quasi ovunque nulla (vedremo poi la dimostrazione). Quindi $\overline{\psi} - \underline{\phi} = 0$ quasi ovunque, ossia $\overline{\psi} = \underline{\phi} = f$ quasi ovunque in $[a,b]$. Ne segue immediatamente che f è misurabile e che il suo integrale di Lebesgue coincide con quello di Riemann. Q.E.D.

In realtà, si può dimostrare che una funzione limitata è integrabile secondo Riemann se e soltanto se essa è *quasi ovunque continua* (Teorema di Vitali). Per motivi di tempo, non dimostreremo questo teorema.

8 Lezione del 9/1/2020 (2 ore)

Come ulteriore applicazione dei risultati appena visti, introduciamo (o meglio, rivediamo... perché lo avete già visto col Prof. Orlandi!) lo spazio L^2 delle funzioni a quadrato sommabile:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$ una funzione misurabile. Definiamo la sua *norma quadratica* come $\|f\|_{L^2(a,b)} := \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^{1/2}$. Definiamo poi lo spazio delle *funzioni a quadrato sommabile* come

$$L^2(a,b) = \{f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}} : \ \|f\|_{L^2(a,b)} < +\infty\}.$$

Quozientiamo questo insieme rispetto alla classe di equivalenza di "essere uguali quasi ovunque": in tal caso, $\|\cdot\|_{L^2(a,b)}$ è effettivamente una norma. La norma è infatti evidentemente non degenere (le sole funzioni di norma nulla sono quelle quasi ovunque uguali a 0) e omogenea ($\|tf\|_{L^2} = |t|\ \|f\|_{L^2}$ per ogni $t \in \mathbf{R}$, $f \in L^2$). Per provare la disuguaglianza triangolare, partiamo dimostrando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

Abbiamo infatti

$$0 \leq \|tf + g\|_{L^2}^2 = t^2\|f\|_{L^2}^2 + 2\int_a^b f \cdot g \, dx + \|g\|_{L^2}^2 \quad \forall \, t \in \mathbf{R}, \ \forall f, g \in L^2.$$

Allora il discriminante di questo polinomio di secondo grado in t deve essere minore o uguale a 0, da cui segue subito la disugualianza voluta.

Usando Cauchy-Schwarz si ottiene subito

$$\begin{aligned} &\|f + g\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + 2\int_a^b f \cdot g \, dx + \|g\|_{L^2}^2 \leq \\ &\|f\|_{L^2}^2 + 2\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}^2 = (\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2})^2 \end{aligned}$$

che è la disuguaglianza triangolare al quadrato.

Lo spazio $L^2(a, b)$ è uno spazio metrico completo: la dimostrazione usa le stesse idee che abbiamo usato per dimostrare l'ultimo risultato di integrazione per serie. Eccola:

TEOREMA (Riesz-Fischer): Lo spazio $L^2(a, b)$ con la norma indotta dal prodotto scalare L^2 è completo.

DIM.: Sia $\{u_n\}_n$ una successione di Cauchy in L^2: questo vuol dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $m, n \geq \nu$ vale $\|u_n - u_m\|_{L^2} < \varepsilon$.

Applicando ripetutamente questa relazione con $\varepsilon = 1/2^k$, troviamo una successione crescente di numeri naturali $\{n_k\}_k$ tale che

$$(*) \ \|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|_{L^2} \leq 1/2^k.$$

Consideriamo ora la serie di funzioni non negative

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x)|.$$

La funzione $g(x)$ è una ben definita funzione a valori in $\overline{\mathbf{R}}$.

Denotiamo con $g_K(x)$ la somma parziale K-esima della serie. Grazie alla $(*)$ si vede subito che $\|g_K\|_{L^2} \leq 1$ per ogni K: applicando il teorema di Beppo Levi alla successione crescente di funzioni non negative $g_K^2(x)$ si ottiene che $\|g\|_{L^2} = \lim_{K \to +\infty} \|g_K\|_{L^2} \leq 1$. In particolare $g \in L^2$ e quindi $g(x) < +\infty$ per quasi ogni x.

Se ne deduce che per quasi ogni x la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x))$$

converge assolutamente. D'altra parte, si vede subito che la somma parziale K-esima di questa "serie telescopica" non è altro che $u_{n_{K+1}}(x) - u_{n_1}(x)$: abbiamo così dimostrato che la successione di funzioni $u_{n_k}(x)$ *converge puntualmente* ad un numero reale $u(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$.

Applichiamo ora il teorema della convergenza dominata alla successione di funzioni $(u_{n_k}(x))^2$: essa tende puntualmente quasi ovunque alla funzione $(u(x))^2$, e la convergenza è dominata dalla funzione sommabile $(u_{n_1}(x) + g(x))^2$. Allora $u(x) \in L^2(2\pi)$ e riapplicando il teorema della convergenza dominata alla successione $(u_{n_k}(x) - u(x))^2$ si ottiene che

$$\|u_{n_k} - u\|_{L^2} \to 0.$$

Quest'ultima proprietà vale in realtà per *tutta la successione* $\{u_n\}$ e non solo per la sottosuccessione u_{n_k}: fissiamo infatti $\varepsilon > 0$. Per definizione di successione di Cauchy troviamo $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\|u_n - u_m\|_{L^2} < \varepsilon$ per ogni $m, n \geq \nu$. Troviamo poi $K \in \mathbf{N}$ tale che $\{u_{n_k} - u\|_{L^2} < \varepsilon$ per ogni $k \geq K$.

Sia poi $n \geq \nu$, e scegliamo $k \geq K$ in modo tale che $n_k \geq \nu$: allora

$$\|u_n - u\|_{L^2} \leq \|u_n - u_{n_k}\|_{L^2} + \|u_{n_k} - u\|_{L^2} < 2\varepsilon.$$

Q.E.D.

Il teorema appena dimostrato ha un'interessante e forse "imprevisto" corollario:

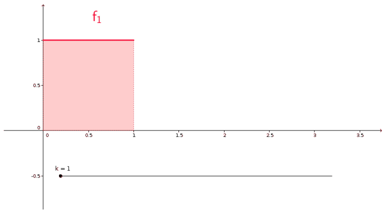
COROLLARIO: Siano $\{u_n\} \subset L^2$, $u \in L^2$ tali che $\|u_n - u\|_{L^2} \to 0$. Allora esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che $u_{n_k}(x) \to u(x)$ per quasi ogni $x \in (a, b)$.

DIM.: La successione $\{u_n\}$ è evidentemente di Cauchy in L^2 (le successioni convergenti sono di Cauchy). La dimostrazione del teorema di Riesz-Fischer ci permette di costruire una sottosuccessione che converge puntualmente quasi ovunque ed in L^2 ad una qualche funzione $v \in L^2$. Siccome per ipotesi la stessa sottosuccessione converge in L^2 *anche* a u, deve essere $u(x) = v(x)$ per quasi ogni x (unicità del limite negli spazi metrici). Q.E.D.

OSSERVAZIONE: In generale la convergenza in L^2 *non* implica la convergenza puntuale quasi ovunque dell'*intera successione*: diamo un esempio di una successione $\{u_k\}$ che converge a 0 in $L^2([0, 1])$, ma che non converge a 0 in nessun punto dell'intervallo $[0, 1]$. Si tratta di una successione di funzioni caratteristiche di intervalli sempre più piccoli, che "girano" in tutte le possibili posizioni entro l'intervallo $[0, 1]$. Più precisamente, per $i \in [2^k, 2^{k+1} - 1] \cap \mathbf{N}$ definiamo

$$u_i(x) = \mathbf{1}_{[0,2^{-k}]}\left(x - \frac{i - 2^k}{2^k}\right).$$

Ecco un'animazione della successione:



Le funzioni in $L^2([a,b])$ possono essere approssimate in norma da funzioni continue:

TEOREMA: Sia $u \in L^2([a,b])$. *Allora esiste una successione* $\{u_n\}_n \subset C^0([a,b])$ *tale che* $\|u_n - u\|_{L^2} \to 0$.

DIM.: Grazie al teorema di approssimazione di funzioni misurabili con funzioni semplici, è facile vedere che esiste una successione di funzioni semplici $\{s_n\}_n$ tali che $\|s_n - u\|_{L^2} \to 0$ (si scriva $u = u^+ - u^-$ e si applichi il teorema di approssimazione alla parte positiva ed alla parte negativa: la convergenza in L^2 segue dal teorema della convergenza dominata).

Possiamo allora supporre senza perdita di generalità che u sia una funzione semplice. Ora, una funzione semplice non è altro che una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili: non è restrittivo supporre che $u(x) = \mathbf{1}_A(x)$ con $A \subset [a,b]$ misurabile.

Per la regolarità della misura di Lebesgue, per ogni $n = 1, 2, 3, \ldots$ esiste un compatto $C_n \subset A$ tale che $m(A \setminus C_n) < \frac{1}{n}$, da cui $\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{C_n}\|_{L^2} \to 0$ per $n \to +\infty$: non è restrittivo supporre $u(x) = \mathbf{1}_C(x)$ con $C \subset [a,b]$ compatto.

Non ci resta che mostrare che $\mathbf{1}_C$ può essere approssimata in L^2 con una successione di funzioni continue: ad esempio possiamo definire

$$u_n(x) = \frac{1}{1 + n \text{ dist } (x, C)}.$$

Questa è una successione di funzioni continue a valori nell'intervallo $(0,1]$ che vale costantemente 1 in C e che tende puntualmente a 0 per $x \in [a,b] \setminus C$: per il teorema della convergenza dominata $\|u_n - \mathbf{1}_C\|_{L^2} \to 0$. Q.E.D.

DEFINIZIONE/OSSERVAZIONI (Prodotto scalare in L^2*, serie di Fourier):* La norma L^2 è indotta dal seguente *prodotto scalare*:

$$< f, g >_{L^2} = \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$$

L'integrale definisce infatti una funzione bilineare $L^2 \times L^2 \to \mathbf{R}$ che è simmetrica e definita positiva. Inoltre $\|f\|_{L^2} =< f, f >^{2}_{L^2}$.

Consideriamo ora una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-periodica, misurabile e tale che $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Avete già visto con il prof. Orlandi che la somma parziale $N-esima$ della serie di Fourier di f è data da

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

ove

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

$S_N(x)$ ha un'interpretazione "geometrica": si tratta della *proiezione ortogonale* della funzione f sul sottospazio di dimensione $(2N+1)$

$$\mathcal{P}_N = \text{span}\,\{1, \cos nx, \sin nx : \ n = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Per verificarlo, basta osservare che $\{1, \cos nx, \sin nx : \ n = 1, 2, \ldots, N\}$ è una *base ortogonale* di $\mathcal{P}_N$ e fare un semplice conto!

In altre parole, S_N è l'elemento di $\mathcal{P}_N$ *più vicino* alla funzione f rispetto alla distanza L^2: si tratta della migliore approssimazione possibile di f con *polinomi trigonometrici* di grado N.

Siamo allora in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA (di Fourier): Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$, $S_N(x)$ la somma parziale N-esima della serie di Fourier di f. Allora $\|S_N(x) - f(x)\|_L^2 \to 0$ per $N \to +\infty$: la serie di Fourier di f converge in media quadratica a f.

DIM.: Abbiamo visto che per ogni fissato N, $S_N(x)$ è il polinomio trigonometrico di grado N più vicino a f in media quadratica.

La tesi segue allora dal fatto che lo spazio vettoriale dei polinomi trigonometrici è *denso* in $L^2([-\pi, \pi])$: ogni funzione $f \in L^2$ può essere approssimata in media quadratica con una successione di polinomi trigonometrici.

Infatti, sappiamo dal teorema precedente che le funzioni continue sono dense in L^2. Inoltre, grazie al seguente teorema, ogni funzione continua in $[-\pi, \pi]$ può essere approssimata *uniformemente* (e quindi a maggior ragione in L^2) con una successione di polinomi trigonometrici. Q.E.D.

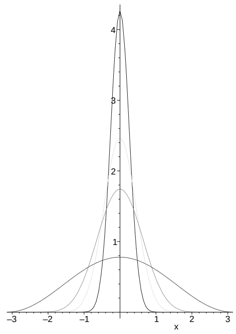
TEOREMA (Stone-Weierstrass trigonometrico): Sia $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua e 2π-periodica. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio trigonometrico $v(x)$ tale che $\|u - v\|_\infty < \varepsilon$.

Vedremo la prossima volta come si dimostra questo teorema!

9 Lezione del 14/1/2020 (2 ore)

DIM (solo accennata in classe): Per ogni numero naturale n, consideriamo i seguenti polinomi trigonometrici: $\phi_n(t) = c_n \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n$, dove la costante c_n è scelta in modo tale che $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(t)\, dt = 1$. Non è difficile verificare che queste funzioni sono effettivamente polinomi trigonometrici: usando le formule di Eulero si verifica infatti che il prodotto di due polinomi trigonometrici è sempre un polinomio trigonometrico.

Se disegnamo i grafici delle funzioni ϕ_n vediamo che si tratta di funzioni non negative che si "concentrano" attorno a 0:



Definiamo una successione di polinomi trigonometrici che converge uniformemente a u nel modo seguente:

$$u_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x+t)\phi_n(t)\, dt.$$

Queste funzioni sono ottenute facendo una specie di "media pesata" di u: verifichiamo che $u_n \to u$ uniformemente.

Prima di farlo, è però necessario mostrare che gli u_n sono effettivamente polinomi trigonometrici, cosa che non è affatto chiara dalla definizione... Per vederlo basta però cambiare variabile nell'integrale ponendo $s = x + t$: siccome tutte le funzioni coinvolte sono periodiche otteniamo

$$u_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} u(s)\phi_n(s-x)\, ds.$$

Le ϕ_n sono polinomi trigonometrici, per cui grazie alle formule di addizione ed alla linearià dell'integrale si verifica subito l'asserto!

Ci serve ora una stima delle costanti c_n che compaiono nella definizione di f ϕ_n: abbiamo

$$\frac{1}{c_n} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt \geq \int_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n \geq \frac{2}{\sqrt{n}} \left(\frac{1+\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})}{2}\right)^n.$$

La quantità tra parentesi nell'ultima espressione converge a $e^{-1/4}$, da cui $c_n \leq k\sqrt{n}$ per n abbastanza grande, con k costante positiva opportuna.

Siccome le funzioni ϕ_n sono non negative e con integrale 1, otteniamo

$$(*)|u_n(x)-u(x)| = |\int_{-\pi}^{\pi}(u(x+t)-u(x))\phi_n(t)\,dt| \leq \int_{-\pi}^{\pi}|u(x+t)-u(x)|\phi_n(t)\,dt.$$

Sia M un maggiorante per $|u|$: ricordando che u è uniformemente continua,per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo $\delta > 0$ tale che $|x-y| < \delta$ implica $|u(x)-u(y)| < \varepsilon$.

Spezziamo l'integrale di destra in (*) sugli insiemi $[-\delta, \delta]$ e $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Per la nostra scelta di δ abbiamo

$$\int_{-\delta}^{\delta}|u(x+t)-u(x)|\phi_n(t)\,dt \leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta}\phi_n(t)\,dt < \varepsilon.$$

D'altra parte

$$\int_{\delta}^{\pi}|u(x+t)-u(x)|\phi_n(t)\,dt \leq 2Mc_n \int_{\delta}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt \leq$$
$$2Mk\pi\sqrt{n}\left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^n,$$

e l'ultima espressione tende a 0 per $n \to +\infty$ uniformemente in x (perché è indipendente da x!). L'integrale su $[-\pi, -\delta]$ si stima allo stesso modo: per n abbastanza grande abbiamo allora $|u_n(x) - u(x)| < 2\varepsilon$ per ogni x. Q.E.D.

Nel confronto tra integrale di Lebesgue e di riemann, ci rimaneva da discutere il caso degli integrali impropri. Abbiamo mostrato che l'integrale improprio secondo Riemann di una funzione *non negativa*, se esiste, coincide col suo integrale di Lebesgue: basta usare opportunamente il Teorema di Bebbo Levi e il teorema di confronto tra integrale di Riemann e di Lebesgue dimostrato ieri. Stessa cosa se la funzione è assolutamente integrabile nel senso di Riemann (si usi il risultato per le funzioni non negative ed il teorema della convergenza dominata). Invece, se f è integrabile in senso improprio con integrale finito, ma l'integrale del suo valore assoluto diverge a $+\infty$, si vede facilmente che gli integrali della parte positiva e della parte negativa sono $+\infty$: per questo motivo, la funzione *non è integrabile* nel senso di Lebesgue.

Concludiamo con un importantissimo teorema, che migliora di gran lunga il teorema di riduzione degli integrali doppi che abbiamo visto per l'integrale di Riemann:

TEOREMA (di Fubini e Tonelli): Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \overline{\mathbf{R}}$ *una funzione misurabile. Allora* *(i)* *Se $f \geq 0$, allora per quasi ogni $y \in \mathbf{R}$ la funzione $x \mapsto f(x,y)$ è misurabile sulla retta reale. Inoltre, la funzione $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, dx$ è misurabile e si ha*

$$(*) \quad \int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Ovviamente, le stesse cose valgono anche scambiando il ruolo di x e y.

(ii) *Se f è di segno qualunque e $\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x,y)|\, dx \right) dy < +\infty$, allora f è sommabile. La stessa cosa vale anche scambiando l'ordine di integrazione.*

(iii) *Se f è di segno qualunque e sommabile, continua a valere l'enunciato del punto (i).*

La dimostrazione è un po' complicata, per cui la ometteremo.

Osserviamo che se la funzione f è di segno qualunque e non è sommabile, l'enunciato non è più vero e i due integrali iterati possono essere diversi, come mostrano esempi anche semplici[5]. Invece, il teorema si generalizza a dimensione superiore: lo spazio ambiente può essere $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$, e possiamo supporre $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^k$...

Torniamo finalmente alle equazioni alle derivate parziali.

Il primo esempio che vogliamo considerare è quello dell'*equazione del calore*: vogliamo trovare una funzione $u(t,x)$ che soddisfi il problema

$$(*) \quad \begin{cases} u_t = k u_{xx} & \textit{se } 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \textit{se } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \textit{se} 0 < x < \pi \end{cases}$$

La funzione $u(x,t)$ rappresenta la *temperatura*, nella posizione x ed al tempo t, di una sbarra metallica di lunghezza π che giace sull'asse delle x tra $x = 0$ e $x = \pi$. La seconda equazione ci dice che gli estremi della sbarra sono tenuti a temperatura 0 (valori al contorno), la terza equazione che la temperatura iniziale in posizione x è data da una funzione nota $f(x)$ (condizione iniziale). Infine, la prima equazione è un'equazione alle derivate parziali nota, appunto, come *equazione del calore*: essa descrive l'evoluzione temporale della temperatura in un corpo unidimensionale conduttore di calore.

Per risolvere il nostro *problema ai valori iniziali ed al contorno*, usiamo il *metodo della separazione delle variabili.* Cominciamo a cercare soluzioni

[5]Si consideri per esempio la funzione $f(x,y) = (x-y)/(x+y)^3$: i suoi integrali iterati sono finiti e diversi sul quadrato $[0,1] \times [0,1]$.

non banali dell'equazione differenziale che siano a variabili separate, ossia del tipo $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ (prodotto di una funzione della sola x e di una della sola t). Visto che abbiamo condizioni al contorno nulle, è naturale imporre anche che $X(0) = X(\pi) = 0$.

Sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo $XT' = kX''T$, da cui $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT}$. In quest'ultima equazione, a primo membro abbiamo una funzione della sola x, a destra una funzione della sola t: i due membri dell'equazione devono allora essere costanti, ossia deve essere

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

In particolare abbiamo $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, equazione lineare omogenea che si risolve immediatamente. Se $\lambda < 0$, la soluzione generale è $X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$: imponendo le condizioni al contorno troviamo $A = B = 0$, per cui c'è solo la soluzione nulla. Se $\lambda = 0$ abbiamo $X(x) = A + Bx$ e imponendo le condizioni al contorno troviamo ancora $A = B = 0$.

Infine, se $\lambda > 0$, la soluzione generale dell'equazione è $X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$. La condizione $X(0) = 0$ implica $A = 0$, mentre la seconda condizione diventa $B\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$. Possiamo prendere $B \neq 0$ se e solo se $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, cioè sse $\lambda = n^2$ con $n = 1, 2, 3...$ In questi casi, troviamo le seguenti soluzioni non nulle:

$$X(x) = B\sin(nx).$$

Le corrispondenti equazioni per $T(t)$ sono $T'(t) = -kn^2T(t)$, che hanno soluzione $T_n(t) = Ce^{-kn^2t}$.

In conclusione, le sole soluzioni non banali a variabili separate sono date da

$$u_n(x,t) = Be^{-kn^2t}\sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Vogliamo ora provare a trovare una soluzione del nostro problema in forma di *serie* di queste soluzioni a variabili separate: vogliamo scrivere cioè

$$(**) \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-kn^2t}\sin nx,$$

ove ovviamente i coefficienti b_n devono essere scelti in modo da soddisfare la condizione iniziale e *speriamo che la serie converga, e converga proprio ad una soluzione del problema (*)*!

Per trovare i coefficienti b_n, osserviamo che

$$(***) \quad f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \ldots$$

e il secondo membro ha tutta l'aria di una serie di Fourier di una funzione dispari! Estendiamo allora f ad una funzione 2π-periodica e dispari: i suoi coefficienti di Fourier sono dati da

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Vedremo domani che con questa scelta dei coefficienti la condizione iniziale (***) è soddisfatta purché f sia abbastanza regolare!

10 Lezione del 15/1/2020 (1 ora)

Torniamo alla convergenza della soluzione formale dell'equazione del calore trovata ieri. Supponiamo per esempio che f sia regolare a tratti e continua in modo da avere convergenza uniforme della serie con $t = 0$ al dato iniziale. In effetti, con questa ipotesi la serie di due variabili (**) converge totalmente sulla striscia $[0,\pi]\times[0,+\infty)$: la serie delle norme è maggiorata da

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}k^2 b_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2},$$

ove le serie a destra sono convergenti (i termini della prima delle serie di destra sono i quadrati dei coefficienti di Fourier di f' e la serie converge grazie alla disuguaglianza di Bessel, si riveda la dimostrazione del teorema di convergenza uniforme!). In particolare, la somma $u(x,t)$ della serie è continua sulla striscia e la condizione iniziale è genuinamente soddisfatta.

Si noti, in particolare, che i coefficienti di Fourier b_n tendono a 0 e sono quindi limitati da una certa costante M.

Le condizioni al contorno sono evidentemente soddisfatte: ci manca "solo" da mostrare che la funzione $u(x,t)$ definita dalla serie (**) è regolare per $t > 0$ e soddisfa effettivamente l'equazione del calore!

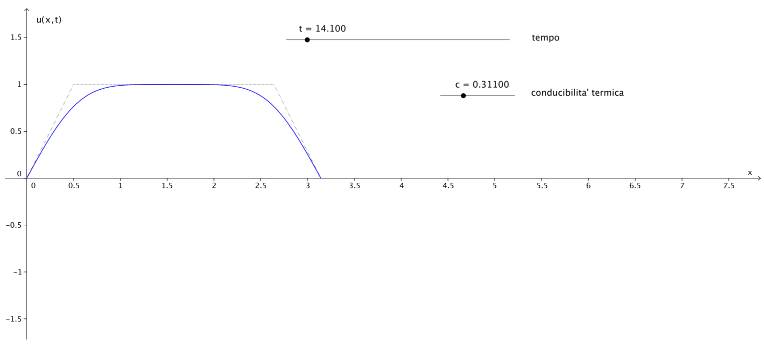
Consideriamo, sul rettangolo $[0,\pi]\times[\tau,T]$ con $0<\tau<T$, la convergenza totale delle serie che si ottengono derivando termine a termine la (**) una volta rispetto a t o due volte rispetto a x (vale a dire, le due serie che si ottengono calcolando formalmente u_t e u_{xx}). Le relative serie delle norme sono dominate (a meno di una costante moltiplicativa k nel caso di u_t) dalla serie convergente

$$M\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-kn^2\tau} < +\infty,$$

per cui si ha convergenza totale. La derivazione termine a termine è allora lecita, e (**) fornisce effettivamente una soluzione del nostro problema.

Il ragionamento appena fatto mostra la proprietà *regolarizzante* dell'equazione del calore: anche se il dato iniziale $f(x)$ è non derivabile, o persino discontinuo in qualche punto, la soluzione (**) diventa immediatamente regolare per tempi positivi[6].

Ecco un foglio GeoGebra che mostra un'animazione delle soluzioni dell'equazione del calore:



Tecniche molto simili si possono usare per risolvere l'*equazione della corda vibrante* (o *equazione delle onde* unidimensionale), cioè il problema

$$(V) \qquad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & se\ 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & se\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & se 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = 0 & se 0 < x < \pi \end{cases}$$

Questo problema descrive il movimento di una corda vibrante che a riposo giace sull'asse delle x tra 0 e π: $u(x,t)$ rappresenta lo spostamento verticale (rispetto a 0) del punto della corda di ascissa x, al tempo t. Le condizioni al contorno $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ dicono che gli estremi della corda sono fissati, $f(x)$ rappresenta la *posizione iniziale* della corda, mentre l'ultima condizione dice che la corda viene lasciata andare con velocità iniziale nulla (problema della *corda pizzicata*).

Procediamo ancora per separazione di variabili, cercando soluzioni non banali dell'equazione alle derivate parziali della forma $u(x,t) = X(x)T(t)$: otteniamo le equazioni

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda.$$

La prima equazione è esattamente quella di prima: abbiamo soluzioni non banali del tipo $X(x) = B \sin nx$ se e solo se $\lambda = n^2$. La corrispondente

[6] In realtà, con ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti sopra, si vede che le serie delle derivate di qualunque ordine convergono totalmente sul rettangolo $[0,\pi] \times [\tau, T]$: la soluzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$

equazione per T è $T'' + n^2c^2T = 0$ con la condizione $T'(0) = 0$ (proveniente dalla condizione su u_t): le soluzioni a variabili separate sono allora $u_n(x,t) = B \sin nx \cos cnt$ e cerchiamo di scrivere la soluzione del problema (V) come serie

$$(VI) \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos cnt.$$

Ancora una volta, affinché sia soddisfatta la condizione iniziale $f(x)$ dovremo scegliere $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$.

Mostriamo che, sotto opportune ipotesi su f, la serie (VI) fornisce effettivamente una soluzione del nostro problema. Per non avere problemi, supponiamo che f sia estendibile ad una funzione 2π-periodica e dispari *di classe almeno* C^3. La disuguaglianza di Bessel applicata alla derivata terza ci garantisce che $\sum_{k=1}^{\infty} k^6 |b_k|^2 < +\infty$ (si integri per parti 3 volte...).

Si ha ovviamente convergenza totale della serie (VI) su tutta la striscia $[0,\pi] \times [0,+\infty]$: la somma è una funzione continua che soddisfa la condizione iniziale e le condizioni al contorno. Per verificare che vale l'equazione, calcoliamo formalmente u_{tt} e u_{xx} derivando termine a termine la serie e verifichiamo che vi è convergenza totale: le serie derivate sono dominate da

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} k^3 |b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^6 |b_k|^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Ecco un foglio GeoGebra che mostra un'animazione delle soluzioni dell'equazione delle onde: