

Diario del Corso di Analisi Matematica I

Corso di Laurea: Matematica Applicata

Docente: Sisto Baldo

ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso vuole essere un riassunto abbastanza dettagliato di quello che è stato detto in aula, e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione. D'altra parte, queste brevi paginette NON possono costituire completamente un libro di testo, la lezione in aula o un'interazione diretta con il docente o l'esercitatore: siete quindi invitati a servirvi ANCHE di queste altre opportunità per approfondire le vostre conoscenze!

Indice

1 Lezione del 2/10/2024 (3 ore)	6
<i>Numeri reali: perché ne abbiamo bisogno? Modelli dei numeri reali e definizione assiomatica. Assioma di completezza di \mathbf{R}, estremo superiore.</i>	
2 Lezione del 7/10/2024 (2 ore)	10
<i>Proprietà di Archimede e densità dei razionali in \mathbf{R}.</i>	
3 Lezione del 8/10/2020 (3 ore)	12
<i>Caratterizzazione di sup e inf. Funzione esponenziale. Funzioni circolari: alcune disuguaglianze. Comportamento della funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ vicino a 0. Definizione di limite. Funzioni continue. Teorema dei carabinieri. Teoremi elementari sui limiti.</i>	
4 Lezione del 9/10/2024 (3 ore)	16
<i>Definizione di limite. Funzioni continue. Teorema dei carabinieri. Algebra dei limiti.</i>	
5 Lezione del 15/10/2024 (3 ore)	20
<i>Continuità di alcune funzioni elementari. Limite di funzione composta. Limiti infiniti, limiti all'infinito, limiti destri e sinistri. Limiti di successioni. Limiti di successioni monotone.</i>	
6 Lezione del 16/10/2024 (3 ore)	23
<i>Numero di Nepero. Limiti con esponenziali. Forme indeterminate. Limiti fondamentali con esponenziali. Continuità dell'esponenziale.</i>	
7 Lezione del 21/10/2024 (1 ora)	26
<i>Limiti con esponenziali. Teorema di esistenza degli zeri.</i>	
8 Lezione del 22/10/2024 (3 ore)	28
<i>Teorema dei valori intermedi. Continuità dell'inversa di una funzione continua e strettamente crescente su un intervallo. Sottosuccessioni. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Teorema di Weierstrass.</i>	
9 Lezione del 23/10/2024 (3 ore)	32
<i>Derivate. Continuità delle funzioni derivabili. Algebra delle derivate. Derivate di alcune funzioni elementari. Derivata di funzione composta (enunciato).</i>	

10 Lezione del 29/10/2024 (3 ore)	37
<i>Derivata di funzione composta e di funzione inversa. Derivate delle funzioni goniometriche inverse. Funzioni convesse e concave. Controesempio su funzioni crescenti e segno della derivata in un punto.</i>	
11 Lezione del 30/10/2024 (3 ore)	41
<i>Principio di Fermat. Teorema di Rolle. Teorema di Lagrange. Segno della derivata e crescita di una funzione su un intervallo. Teorema di l'Hôpital (enunciato). Retta tangente come retta di migliore approssimazione al grafico di una funzione.</i>	
12 Lezione del 4/11/2024 (3 ore)	45
<i>Polinomi di Taylor. Teorema di Taylor con resto di Peano. Derivate successive e punti di estremo relativo. Teorema di Cauchy. Enunciato del teorema di Taylor con resto di Lagrange.</i>	
13 Lezione del 5/11/2024 (3 ore)	49
<i>Dimostrazione del teorema di Taylor con resto di Lagrange. Approssimazione di funzioni tramite i loro polinomi di Taylor: serie di Taylor dell'esponenziale, delle funzioni goniometriche. Serie geometrica. Serie di Taylor di logaritmo e arcotangente. Irrazionalità di e. Calcolo di limiti con i polinomi di Taylor.</i>	
14 Lezione del 12/11/2024 (3 ore)	54
<i>Euristica dell'integrale. Funzioni a scala e loro integrale. Integrale superiore e inferiore, integrabilità nel senso di Riemann. Linearità e monotonia dell'integrale. Integrabilità delle funzioni monotone.</i>	
15 Lezione del 13/11/2024 (3 ore)	60
<i>Uniforme continuità. Teorema di Heine-Cantor. Integrabilità delle funzioni continue. Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Integrale indefinito. Integrali immediati.</i>	
16 Lezione del 18/11/2024 (3 ore)	66
<i>Esercizi: questionari a scelte multiple in preparazione della prova intermedia. Formule di integrazione. Esempi.</i>	
17 Lezione del 20/11/2024 (3 ore)	68
<i>Integrazione di funzioni razionali. Integrali impropri. Principio del confronto e dell'equivalenza asintotica per gli integrali impropri.</i>	
18 Lezione del 26/11/2024 (3 ore)	71

Esercizi in vista della prova intermedia. Convergenza assoluta e convergenza degli integrali impropri. Esercizi. Primi criteri di convergenza per le serie: criterio integrale, criterio del confronto, criterio dell'equivalenza asintotica.

19 Lezione del 27/11/2024 (3 ore) 75

Primi criteri di convergenza per le serie: criterio integrale, criterio del confronto, criterio dell'equivalenza asintotica, condizione necessaria di convergenza. Criteri del rapporto e della radice. Criterio di Leibniz. Serie di potenze.

20 Lezione del 3/12/2024 (3 ore) 80

Calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze col criterio della radice o del rapporto. Teorema di regolarità della somma di una serie di potenze. Applicazioni.

21 Lezione del 9/12/2024 (3 ore) 87

Correzione della prova intermedia. Massimo e minimo limite. Criterio della radice col massimo limite.

22 Lezione del 10/12/2024 (3 ore) 90

Successioni di Cauchy e completezza di \mathbf{R} . Equazioni differenziali ordinarie: generalità, problema di Cauchy, esempi. Che risultato di esistenza e unicità è lecito aspettarsi per il problema di Cauchy? Equazioni lineari del primo ordine.

23 Lezione del 17/12/2024 (3 ore) 96

Teorema di esistenza e unicità locale: esame delle ipotesi e del significato della tesi. Soluzione massimale. Esame qualitativo delle soluzioni dell'equazione logistica.

24 Lezione del 18/12/2023 (3 ore) 101

Esercizi su serie e integrali impropri. Dimostrazione del teorema di unicità per le soluzioni del problema di Cauchy. Equazioni autonome ed equazioni a variabili separabili.

25 Lezione del 7/1/2025 (3 ore) 105

Sistemi ed equazioni del secondo ordine. Equazioni lineari. Struttura delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine: formano uno spazio vettoriale di dimensione 2. Equazioni lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti. Esponenziale complesso.

26 Lezione del 8/1/2025 (3 ore) 111

Struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare non omogenea. Metodo della variazione delle costanti. Metodo di somiglianza o degli annihilatori.

27 Lezione del 14/1/2025 (3 ore) 115

Ancora sul metodo degli annihilatori. Esercizi sulle equazioni differenziali. Quiz di teoria stile esame.

28 Lezione del 15/1/2025 (2 ore) 118

Esercizi sulle equazioni differenziali. Equazioni differenziali lineari omogenee di grado superiore al secondo. Giustificazione del metodo degli annihilatori.

1 Lezione del 2/10/2024 (3 ore)

Buona parte della prima ora di lezione è stata dedicata alla presentazione del corso di laurea e del corso: si veda la registrazione su Panopto...

Argomento del corso: calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale.

Visto che nel corso ci occuperemo di funzioni reali di variabile reale, sarà bene capire esattamente cosa sono i numeri reali!

Consideriamo la seguente catena di insiemi numerici, sempre più grandi:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Ogni volta che passiamo da un insieme al successivo, *guadagnamo qualcosa...* Nell'insieme $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ dei numeri naturali non è possibile trovare l'elemento inverso di un numero rispetto alla somma (l'opposto): perché questo si possa fare dobbiamo allargarci all'insieme $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ dei numeri interi. Analogamente, in \mathbf{Z} non è possibile definire l'operazione inversa del prodotto: per questo, si introduce l'insieme \mathbf{Q} dei numeri razionali ($\mathbf{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$).

Con l'insieme dei numeri razionali potremmo dirci soddisfatti, almeno dal punto di vista delle quattro operazioni! E allora, perché sentiamo il bisogno di allargare ulteriormente l'insieme dei “numeri”?

Questa necessità divenne evidente già agli albori della matematica greca (anche se i greci avevano una visione più “geometrica” che “algebrica” della matematica): i pitagorici si accorsero che *la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 non è un numero razionale*. In termini moderni (e grazie al teorema di Pitagora), questo equivale a dire che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale... In seguito ci divertiremo a dimostrare questo fatto!

Vediamo di dimostrarlo! Lo faremo per assurdo: supponiamo che $\sqrt{2}$ sia razionale, cioè che esista un numero razionale $q = m/n$ (con $m, n \in \mathbf{N}$) tale che $q > 0$ e $q^2 = 2$. Riducendo la frazione ai minimi termini, non è restrittivo supporre che i numeri naturali m e n non abbiano fattori primi in comune.

Ora, la nostra supposizione equivale a $m^2 = 2n^2$, da cui segue che m^2 è un numero pari. Poiché ogni fattore primo di m^2 deve essere presente anche in m , ne deriva che m è pari.

Dunque, $m = 2r$ per qualche numero naturale r , e la nostra identità diventa $4r^2 = 2n^2$, da cui $2r^2 = n^2$. Ripetendo esattamente il ragionamento appena fatto, questo mostra che n è pari. Assurdo perché abbiamo supposto che m e n non abbiano fattori in comune, e quindi essi non possono essere entrambi pari!

In sostanza, il teorema appena dimostrato ci dice che esiste un problema “naturale” per la matematica che *non si può risolvere* nel campo \mathbf{Q} dei razionali: quello dell'estrazione della radice quadrata. In realtà, di questi problemi non risolvibili nel campo \mathbf{Q} ce ne sono moltissimi!

Per i pitagorici, la scoperta dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ ebbe sconvolgenti conseguenze filosofiche...per noi, significa solo che dobbiamo trovare un insieme *più ampio* di numeri, in modo che almeno uno di essi abbia quadrato uguale a 2 (e in cui magari sia possibile risolvere altri interessanti problemi!).

Una buona risposta a queste necessità è l'insieme \mathbf{R} dei numeri reali, che noi ben conosciamo. Vero?

Cosa sono i numeri reali di cui abbiamo parlato (e che abbiamo usato) per buona parte della nostra carriera scolastica?

Una possibile risposta: sono tutti i numeri decimali, eventualmente con infinite cifre dopo la virgola. Questo è un buon modello dei numeri reali, che presenta però un piccolo problema: se *definiamo* i reali come numeri decimali infiniti, non è poi facilissimo definire le operazioni e la relazione d'ordine, e mostrare poi che esse godono di tutte le proprietà che ci aspettiamo... Comunque, questo è possibile senza eccessive difficoltà.

Un approccio alternativo (adottato da molti testi di analisi matematica) è quello assiomatico: i numeri reali sono *per definizione* un *campo ordinato e completo*.

Come abbiamo anticipato prima, i numeri reali possono essere definiti in modo *assiomatico*. Questo si esprime dicendo che i numeri reali sono un *insieme* su cui sono definite due *operazioni* (la somma e il prodotto), ed una *relazione d'ordine* che godono di tutta una serie di buone proprietà, sostanzialmente quelle che ben conosciamo e che elencheremo meglio tra poco. Un tale oggetto si dice *campo ordinato*...ma anche \mathbf{Q} è un campo ordinato!

Quel che distingue \mathbf{R} da \mathbf{Q} è l'*assioma di completezza*, che vedremo tra un attimo in una delle sue possibili formulazioni.

DEFINIZIONE: l'insieme \mathbf{R} dei numeri reali è un campo ordinato completo.

Questo significa che i numeri reali sono un *insieme* su cui sono definite due *operazioni* (la somma e il prodotto), entrambe associative e commutative. Inoltre, entrambe le operazioni hanno un elemento neutro (0 e 1 rispettivamente) e sono “invertibili” (cioè per ogni $x \in \mathbf{R}$ esiste un altro elemento che denotiamo $(-x)$ tale che $x + (-x) = 0$; per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ esiste un altro elemento x^{-1} tale che $x \cdot x^{-1} = 1$). Vale inoltre la proprietà distributiva, che lega la somma al prodotto. Un insieme con due operazioni che godono di queste proprietà è detto *campo*.

C'è poi una *relazione d'ordine totale*, che dati due numeri reali ci consente di dire qual è il più grande. Questa relazione d'ordine è compatibile con le

operazioni (nel senso che possiamo manipolare le disuguaglianze nel modo in cui siamo abituati: sommando uno stesso numero reale ad ambo i membri di una disuguaglianza essa rimane vera, così come se moltiplichiamo ambo i membri per uno stesso numero reale positivo). Un campo che gode di queste proprietà è un *campo ordinato*: ma anche \mathbf{Q} è un campo ordinato!

Il campo ordinato \mathbf{R} è poi *completo*: in soldoni, questo significa che la retta reale “non ha buchi”, ma vediamo di dirlo in modo preciso!

Propongo qui due formulazioni dell’assioma di completezza (in classe abbiamo visto solo la seconda di quelle che seguono, la prima viene proposta agli interessati...):

ASSIOMA DI COMPLETEZZA, I FORMULAZIONE (Dedekind): Se A e B sono sottinsiemi di \mathbf{R} , entrambi non vuoti e tali che $a \leq b \forall a \in A, \forall b \in B$, allora esiste un numero reale c tale che

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Un tale numero c si dice *elemento separatore* di A e B .

In soldoni, se abbiamo due sottinsiemi non vuoti A e B della retta reale tali che A sta tutto a sinistra di B , possiamo trovare un numero reale che sta sia a destra di A che a sinistra di B . In altre parole, e sempre in modo informale, possiamo dire che la retta reale “non ha buchi”!

ASSIOMA DI COMPLETEZZA, II FORMULAZIONE (Esistenza dell’estremo superiore): Ogni sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato di \mathbf{R} ammette estremo superiore in \mathbf{R} .

Per capire la formulazione dell’assioma di completezza che si rifà al concetto di estremo superiore, abbiamo bisogno di alcune definizioni:

DEFINIZIONI: Se $A \subset \mathbf{R}$, un *maggiorante* di A è un numero reale M tale che $M \geq a$ per ogni $a \in A$.

Un sottoinsieme di \mathbf{R} si dice superiormente limitato se ammette almeno un maggiorante.

L’*estremo superiore* di un sottoinsieme A di \mathbf{R} è il *minimo* dei maggioranti di A , se questo minimo esiste.

Cerchiamo di comprendere il significato di questa definizione di estremo superiore (che per inciso si indica col simbolo $\sup A$...).

Se l’insieme A ammette massimo, allora l’estremo superiore coincide col massimo. Infatti il massimo dell’insieme è un maggiorante per definizione, e inoltre nessun numero più piccolo del massimo può essere un maggiorante (perché è superato dal massimo stesso, che è un elemento dell’insieme).

D'altra parte, un insieme infinito non è detto che possieda massimo anche se è superiormente limitato: per esempio, la semiretta $A = \{x \in \mathbf{R} : x < 2\} = (-\infty, 2)$ non possiede un elemento massimo. Infatti, dato un qualunque elemento $a \in A$, il numero $\frac{a+2}{2}$ è ancora minore di 2, ed è maggiore di a : *a non può essere dunque l'elemento massimo della semiretta*. Invece, è immediato verificare che $\sup A = 2$... L'estremo superiore è la *naturale generalizzazione del concetto di massimo* agli insiemi superiormente limitati che non hanno massimo!

L'assioma di completezza nella sua seconda formulazione dice una cosa non ovvia: *qualunque* sottinsieme non vuoto e superiormente limitato $A \subset \mathbf{R}$ ammette il sup. La cosa *non* è immediata perché il sup è definito come minimo di un insieme *infinito* (l'insieme dei maggioranti di A), e non sempre un insieme infinito ammette minimo!

Per gli studenti interessati, mostriamo l'equivalenza delle due formulazioni dell'assioma di completezza. Fermo restando che gli studenti non interessati possono limitarsi a studiare quella che predica l'esistenza del sup...

Cominciamo col mostrare che se vale l'assioma di Dedekind, allora ogni sottinsieme non vuoto e superiormente limitato di \mathbf{R} ammette estremo superiore.

Sia infatti $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$, A superiormente limitato. Definiamo

$$B = \{b \in \mathbf{R} : b \text{ è un maggiorante di } A\}.$$

La coppia di insiemi A e B soddisfa le richieste dell'assioma di Dedekind (B è non vuoto perché A è superiormente limitato, e giace a destra di A perché contiene solo maggioranti di A), quindi esiste un elemento separatore $c \in \mathbf{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$. La disuguaglianza di sinistra dice che c è un maggiorante di A , mentre quella di destra assicura che è più piccolo di ogni altro maggiorante: in conclusione, $c = \sup A$.

Mostriamo che la seconda formulazione dell'assioma di completezza implica la prima.

Siano A, B due sottinsiemi come nell'assioma di Dedekind (cioè sono non vuoti e A giace tutto a sinistra di B). Poniamo $c = \sup A$ (esiste per ipotesi, visto che A è non vuoto, ed è anche superiormente limitato perché B è non vuoto ed è tutto fatto di maggioranti di A).

Dico che c è un elemento separatore tra A e B : infatti, c è un maggiorante di A per definizione di sup. Inoltre, è minore o uguale di *ogni* elemento di B perché è il minimo dei maggioranti di A , e B è costituito interamente da maggioranti di A . Q.E.D.

Torniamo dunque ai numeri reali ed ai loro assiomi, in particolare all'assioma di completezza.

Evidentemente esso (in una qualunque delle sue formulazioni equivalenti) *non è vero* nel campo dei razionali: per esempio, l'insieme $A = \{q \in \mathbf{Q} : q \geq 0, q^2 \leq 2\}$ è un sottinsieme di \mathbf{Q} non vuoto e superiormente limitato (per esempio, 2 è un maggiorante), ma esso non ha estremo superiore in \mathbf{Q} : il problema è che possiamo trovare maggioranti razionali *arbitrariamente vicini* a $\sqrt{2}$, che però non appartiene ai razionali. Ovviamente, se vediamo questo insieme come *sottinsieme di \mathbf{R}* , l'estremo superiore c'è ed è uguale a $\sqrt{2}$.

L'affermazione appena fatta è una conseguenza praticamente immediata della proprietà di *densità* dei numeri razionali in \mathbf{R} , che vedremo tra poco.

La definizione assiomatica di \mathbf{R} è comoda (è sostanzialmente un menù delle proprietà che possiamo utilizzare quando manipoliamo i numeri reali),

ma rimane il problema di mostrare che *esiste almeno un insieme, dotato di operazioni e relazione d'ordine, che soddisfa tutti gli assiomi*: abbiamo bisogno di un *modello* dei numeri reali.

Come accennavamo, un tale modello è costituito dai *numeri decimali infiniti*. Non è difficile convincersi che con tale modello si possono definire le operazioni e la relazione d'ordine, e che esse godono di tutte le proprietà che ci servono...

Per gli studenti interessati, cerchiamo di mostrare che in questo modello vale l'assioma di completezza: precisamente, supponiamo di avere un insieme $A \subset \mathbf{R}$ (cioè A è una collezione di decimali infiniti) non vuoto e inferiormente limitato, e mostriamo come sia possibile identificarne l'estremo inferiore *come decimale infinito*.

Evidentemente, non è restrittivo supporre che 0 sia un minorante di A (basta compiere una traslazione, cioè aggiungere a tutti gli elementi di A uno stesso numero, per esempio l'opposto di un minorante: anche l'estremo inferiore risulterà modificato nello stesso modo...).

Ci troviamo nella seguente situazione: abbiamo un sottinsieme della retta reale che giace tutto a destra di 0, e ci chiediamo come calcolare *le cifre decimali* del massimo dei suoi minoranti.

Evidentemente, per trovare l'estremo inferiore a meno di un'unità, ci basta prendere il *massimo dei numeri naturali che sono minoranti di A* , per trovarlo a meno di un decimo ci basta prendere il *massimo dei numeri decimali finiti con una cifra dopo la virgola che sono minoranti di A* , per trovarlo a meno di un centesimo troveremo il *massimo dei numeri decimali finiti con due cifre dopo la virgola che sono minoranti di A* , e così via... Ogni volta, dobbiamo trovare il massimo di un insieme finito. Inoltre, ogni volta che raffiniamo la suddivisione è evidente che *le cifre che avevamo già trovato in precedenza non cambiano*.

Proseguendo indefinitamente, abbiamo una ricetta per trovare tutte le cifre che vogliamo di un numero decimale infinito c , che gode di questa proprietà: se arrestiamo c alla k -esima cifra dopo la virgola e chiamiamo c_k il numero decimale finito così ottenuto¹, c_k è un minorante di A ed esiste un elemento di A che dista meno di $1/10^k$ da c_k (altrimenti avrei potuto aumentare di almeno un'unità la k -esima cifra decimale di c). Siccome k può essere preso arbitrariamente grande, questo ci dice che *esistono punti di A arbitrariamente vicini a c* .

In conclusione, c è per costruzione un minorante di A , ed è il massimo perché l'insieme A possiede punti arbitrariamente vicini a c , per cui un qualunque numero più grande di c non può essere più un minorante di A .

2 Lezione del 7/10/2024 (2 ore)

L'esistenza della radice quadrata di un numero reale positivo può essere recuperata usando l'estremo superiore: se $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, definiamo $\sqrt{a} = \sup\{x \in \mathbf{R} : x^2 \leq a\}$. Questo definisce un numero reale positivo, il cui quadrato si può dimostrare che è uguale ad a .

Non dimostriamo questo fatto, perché esso è una conseguenza immediata del teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue, che verrà enunciato e dimostrato tra poche lezioni in questo corso... Durante questo breve periodo, faremo un atto di fede e continueremo a “confidare” nell'esistenza delle radici n -esime, della funzione esponenziale, della funzione logaritmo, etc...

È importante verificare che le “copie” di \mathbf{N} e di \mathbf{Q} dentro al campo completo \mathbf{R} hanno le proprietà che ci aspettiamo. Cominciamo col dimostrare che \mathbf{N} è illimitato superiormente in \mathbf{R} e che esiste la funzione *parte intera*:

PROPOSIZIONE: \mathbf{N} è illimitato superiormente in \mathbf{R} . Inoltre per ogni $x \in \mathbf{R}$ esiste il numero intero $[x] = \max\{m \in \mathbf{Z} : m \leq x\}$. È l'unico numero intero con la proprietà che $[x] \leq x < [x] + 1$.

¹ c_k non è altro che il numero decimale ottenuto al k -passo del nostro algoritmo

DIM.: Supponiamo per assurdo che \mathbf{N} sia superiormente limitato, cioè che ci sia un numero reale M tale che $n \leq M$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Per l'assioma di completezza di \mathbf{R} , dovrebbe esistere $S = \sup \mathbf{N} \in \mathbf{R}$: si tratta del minimo dei maggioranti di \mathbf{N} . In particolare, $S - 1$ non è un maggiorante di \mathbf{N} : esiste $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che $S - 1 < \bar{n}$. Ma allora $S < \bar{n} + 1$, assurdo perché S è un maggiorante di \mathbf{N} .

Veniamo alla parte intera: sia $x \in \mathbf{R}$, $A = \{m \in \mathbf{Z} : m \leq x\}$.

Intanto, $A \neq \emptyset$. Infatti, siccome \mathbf{N} è illimitato superiormente, esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che $n > -x$. Ne segue subito che $-n \in A$.

A è poi superiormente limitato perché x è un maggiorante (per definizione): sia $S = \sup A \in \mathbf{R}$. Siccome $S - 1$ non è un maggiorante di A , esiste un numero intero $\bar{m} \in A$ tale che $S - 1 < \bar{m}$, da cui $S < \bar{m} + 1$. Ne segue che $\bar{m} + 1 \notin A$, cioè $\bar{m} \leq x < \bar{m} + 1$.

Questo numero intero \bar{m} è proprio il massimo di A (cioè $\bar{m} = [x]$... In particolare, a posteriori coincide con S ed è anche evidentemente unico). Infatti, siccome $\bar{m} + 1 \notin A$, nessun elemento di A può superare strettamente \bar{m} . Q.E.D.

Una variante della superiore illimitatezza di \mathbf{N} è la seguente proprietà di Archimede. Abbiamo inoltre la fondamentale proprietà di densità dei razionali in \mathbf{R} : un numero reale si approssima bene quanto si vuole con numeri razionali.

PROPOSIZIONE (Proprietà archimedeica e densità di \mathbf{Q} in \mathbf{R}): Siano a, b numeri reali con $0 < a < b$. Allora esiste un numero naturale n tale che $na > b$ (proprietà archimedeica).

Se poi $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$ (di segno qualunque), esiste un numero razionale q tale che $x_1 < q < x_2$ (densità di \mathbf{Q} in \mathbf{R}).

DIM.: Per provare la proprietà di Archimede basta prendere un numero naturale n tale che $n > \frac{b}{a}$. Esiste di sicuro grazie alla superiore illimitatezza di \mathbf{N} : ad esempio si può prendere $n = [\frac{b}{a}] + 1$.

Moltiplicando per a si ha la tesi.

Proviamo poi la densità dei razionali. Intanto, per la proprietà archimedeica esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che $n(x_2 - x_1) > 1$, da cui $nx_2 > 1 + nx_1$. Ne segue che c'è un numero naturale m compreso tra nx_1 e nx_2 (possiamo prendere semplicemente $[nx_2]$, tranne nel caso in cui nx_2 è intero: in quel caso prendiamo $nx_2 - 1$). Ma allora $nx_1 < m < nx_2$, da cui $x_1 < \frac{m}{n} < x_2$, come volevasi. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Anche i numeri irrazionali sono densi in \mathbf{R} . Siano infatti $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ con $x_1 < x_2$. Allora $x_1 + \sqrt{2} < x_2 + \sqrt{2}$ e per la densità dei razionali

esiste $q \in \mathbf{Q}$ tale che $x_1 + \sqrt{2} < q < x_2 + \sqrt{2}$. Ma allora $x_1 < q - \sqrt{2} < x_2 \dots$ e il numero $q - \sqrt{2}$ è evidentemente irrazionale.

OSSERVAZIONE: La proprietà di Archimede e la densità dei razionali *nei razionali* sono di dimostrazione praticamente ovvia. Nei reali abbiamo dovuto fare un giro un po' più lungo perché a priori non potevamo essere sicuri che le copie di \mathbf{N} , \mathbf{Z} e \mathbf{Q} nell'insieme \mathbf{R} avessero tutte le proprietà attese: abbiamo avuto bisogno di ricondurci agli assiomi di \mathbf{R} e in particolare all'assioma di completezza.

In matematica, oltre all'estremo superiore si usa spesso l'estremo inferiore che è l'oggetto simmetrico: sarà il *massimo dei minoranti* del nostro insieme, come vedremo meglio domani.

A titolo di esercizio, abbiamo visto che per l'insieme

$$A = \left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

si ha $\inf A = \min A = 0$, mentre $\sup A = 1$.

Infatti le frazioni che appartengono all'insieme A possono essere riscritte

$$1 - \frac{2}{n^2 + 1}.$$

È immediatamente evidente che sono tutte (strettamente) minori di 1, per cui 1 è un maggiorante di A . D'altra parte, nessun numero minore di 1 è un maggiorante di A : mostriamo infatti che scelto arbitrariamente $\varepsilon > 0$, il numero $1 - \varepsilon$ non è un maggiorante di A . Questo equivale a dire che esiste $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che $1 - \frac{2}{\bar{n}^2 + 1} > 1 - \varepsilon$. Manipolando la disuguaglianza scopriamo che deve essere $\bar{n} > \frac{2}{\varepsilon} - 1$, cosa ovviamente possibile perché i numeri naturali (e a maggior ragione i loro quadrati) sono illimitati superiormente.

3 Lezione del 8/10/2020 (3 ore)

DEFINIZIONE: Un minorante di un insieme $A \subset \mathbf{R}$ è un numero reale c tale che $c \leq a$ per ogni $a \in A$. A si dice inferiormente limitato se possiede un minorante. L'estremo inferiore di A (se esiste) è il massimo dei minoranti di A , e si indica con $\inf A$.

Ovviamente, l'estremo inferiore coincide con il minimo di A quando questo esiste.

Inoltre, un'ulteriore formulazione equivalente dell'assioma di completezza consiste nel chiedere che ogni insieme inferiormente limitato ammette estremo inferiore (esercizio)!

Per comodità, vale anche la pena di introdurre una notazione per indicare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di insiemi illimitati, e dell'insieme vuoto:

DEFINIZIONE: Il fatto che un insieme A non sia superiormente limitato si esprime con la scrittura $\sup A = +\infty$. Analogamente, per un insieme illimitato inferiormente scriveremo $\inf A = -\infty$. Poniamo poi $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.

È utile ricordare le seguenti *caratterizzazione* di estremo superiore ed estremo inferiore: siano $A \subset \mathbf{R}$, $M, m \in \mathbf{R}$. Allora si ha $\sup A = M$ se e solo se

- $a \leq M$ per ogni $a \in A$ (M è un maggiorante);
- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{a} \in A$ tale che $\bar{a} > M - \varepsilon$ (nessun numero strettamente minore di M è un maggiorante).

Analogamente si ha $m = \inf A$ se e solo se

- $a \geq m$ per ogni $a \in A$ (m è un minorante);
- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{a} \in A$ tale che $\bar{a} < m + \varepsilon$ (nessun numero strettamente maggiore di m è un minorante).

Ci siamo dedicati ad un ripasso critico sulle potenze: potenze ad esponente naturale, intero, razionale (la definizione è "obbligata" se vogliamo che valgano le proprietà delle potenze!).

Potenze ed esponente reale: se $a > 1$ e $x \in \mathbf{R}$, definiamo

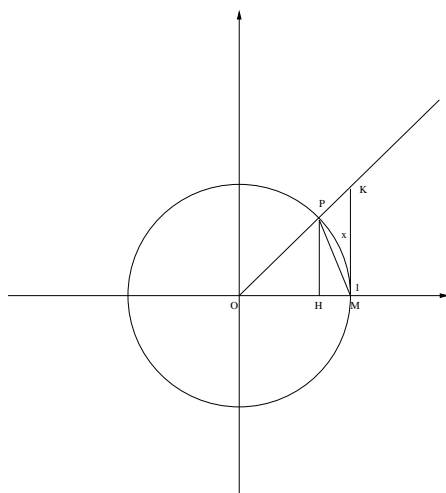
$$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbf{Q}, q \leq x\}.$$

Si può dimostrare che questo oggetto ha tutte le proprietà della funzione esponenziale che ben conosciamo (omettiamo però la dimostrazione).

Abbiamo parlato brevemente di come sono definite le funzioni trigonometriche seno e coseno: in particolare, ci siamo resi conto che c'è una difficoltà dovuta al fatto che è necessario definire in modo rigoroso la lunghezza di un arco di curva².

Dimostriamo un paio di disuguaglianze che torneranno utili nel seguito: attraverso semplici considerazioni geometriche, scopriamo che per $0 < x < \pi/2$ valgono le disuguaglianze $x \leq \tan x$ e $\sin x < x$:

²Applet GeoGebra sulle funzioni circolari: <https://www.geogebra.org/m/jph2ruxg>



La seconda disuguaglianza si ottiene osservando che l'arco PM (lungo x) è più lungo della corda PM , che a sua volta è più lunga del segmento $PH = \sin x$ (sono rispettivamente cateto e ipotenusa del triangolo rettangolo MPH).

Per ottenere la prima disuguaglianza, osserviamo che il settore circolare OMP è contenuto nel triangolo rettangolo OMK , per cui l'area del settore circolare è minore dell'area del triangolo. D'altra parte, l'area del settore circolare è $x/2$, mentre l'area del triangolo è $\tan x/2$.

Potete rivedere questa dimostrazione nell'applet GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/jn8tkeqy> (dove cambiano solo le lettere usate per denotare i punti).

Vogliamo ora introdurre, dapprima in modo assolutamente informale, le nozioni di limite di una funzione reale di variabile reale e di funzione continua.

Cerchiamo ora di affrontare un “esercizio” piuttosto difficile: vogliamo capire come è fatto il grafico della funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, funzione reale definita su $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Osserviamo che questa è una funzione pari (cioè $f(-x) = f(x)$) e che per $x > 0$ ha lo stesso segno della funzione seno ed è compresa tra le funzioni $-1/x$ e $1/x$. Quello che non è per niente chiaro a priori, è come si comporta la funzione per *valori piccoli della x* ...

Per $0 < x < \pi/2$ sappiamo poi che $\sin x < x < \tan x$ (lo abbiamo appena mostrato...) Ne segue subito che

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{se } 0 < x < \pi/2.$$

Si noti che le disuguaglianze rimangono valide anche per $-\pi/2 < x < 0$ perché tutte le funzioni coinvolte sono pari.

Geometricamente, questo dice che il grafico della funzione $f(x)$, per angoli piccoli, è compreso tra i grafici della funzione $\cos x$ e della funzione costante 1: possiamo quindi concludere che quando x si avvicina a 0, il valore della funzione $f(x)$ deve necessariamente avvicinarsi ad 1. Esprimiamo questo fatto scrivendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Possiamo dire, in altre parole, che la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ tende a 1 quando x tende a 0.

Torniamo all'esempio sul comportamento della funzione $\frac{\sin x}{x}$ vicino all'origine: più in generale, cerchiamo di dare una prima pseudodefinitione di limite:

DEFINIZIONE INFORMALE: la scrittura

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

esprime il fatto che il valore di $f(x)$ diventa arbitrariamente vicino al numero ℓ se x è sufficientemente vicina a x_0 (con $x \neq x_0$),.

Osserviamo che non è affatto necessario che la funzione f sia definita in x_0 (e, se lo fosse, conveniamo comunque di *non tenerne conto quando andiamo a verificare la relazione di limite*). Quel che serve, è solo che la funzione f sia definita in punti *arbitrariamente vicini ad x_0 e diversi da x_0* (in matematica, x_0 deve essere un punto di accumulazione del dominio di f).

Dopo questi discorsi informali, è ormai ora di arrivare ad una definizione rigorosa del concetto di limite: vale la pena di sottolineare che nei prossimi pochi secondi... percorreremo un iter che storicamente ha richiesto moltissimo tempo ed un'accesa discussione nella comunità matematica! Daremo infatti la definizione di limite dovuta a Weierstrass.

Avevamo detto che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se succede che, avvicinando *sufficientemente* x a x_0 (con $x \neq x_0$), $f(x)$ diventa *arbitrariamente vicina* a ℓ . Possiamo

tradurre questa frase nella seguente

DEFINIZIONE: Sia f una funzione definita in un intorno³ di x_0 . Diciamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se e soltanto se, comunque scegliamo un intervallo I_ℓ centrato in ℓ , piccolo quanto vogliamo, è possibile trovare un intervallo J_{x_0} centrato in x_0 tale che $f(x) \in I_\ell$ per ogni $x \in J_{x_0}$, $x \neq x_0$.

4 Lezione del 9/10/2024 (3 ore)

La lezione comincia con 45 minuti di ritardo a causa del mancato funzionamento dei sistemi di ripresa audio video. La registrazione della stessa risulta priva di video nella parte conclusiva a causa di un ulteriore malfunzionamento della telecamera.

Se scriviamo $I_\ell = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ e $J_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, la definizione si può tradurre nella seguente (che è assolutamente equivalente a quella sopra, ed è quella che ha sempre riscosso il maggior successo di pubblico e di critica):

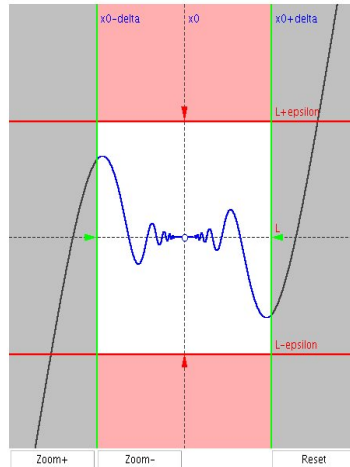
DEFINIZIONE: Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 . Diciamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se e soltanto se, per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile trovare $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \quad (P)$$

Vi sottopongo un mio “tentativo” di illustrare la definizione di limite con un grafico interattivo⁴ sul quale si può scegliere il proprio ε a piacere, e verificare poi l’esistenza di δ ... Non sono però completamente convinto dell’efficacia del risultato!)

³Un intorno di x_0 è, per definizione, un insieme che contiene un intervallo centrato in x_0 .

⁴<https://www.geogebra.org/m/wBNUDYCv>



Osserviamo, che la definizione di limite ha senso anche se f è definita su un sottinsieme di \mathbf{R} qualunque A , purchè A possieda punti *distinti da x_0 e vicini quanto si vuole a x_0* : questo si esprime dicendo che x_0 è un *punto di accumulazione* di A . Ovviamente, in tal caso la disuguaglianza nella definizione di limite andrà verificata solo per gli $x \in A$.

Avendo a disposizione il concetto di limite si può introdurre quello di funzione continua:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione reale di variabile reale definita su un intervallo. Se $x_0 \in [a, b]$, diciamo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se f è continua in ogni punto del suo dominio $[a, b]$, diciamo semplicemente che essa è continua.

Ci si convince facilmente che l'idea geometrica dietro al concetto di continuità è piuttosto semplice: il grafico di una funzione continua è una “curva continua”, cioè può essere disegnato “senza staccare la penna dal foglio”. Infatti, se rileggiamo la definizione di continuità alla luce della nostra pseudo-definizione di limite, vediamo che una funzione è continua in x_0 quando $f(x)$ diventa *arbitrariamente vicino* a $f(x_0)$ a patto di prendere x *sufficientemente vicino* a x_0 . In maniera ancora più informale possiamo dire che una funzione continua $f(x)$ ha la proprietà di “cambiare di poco” il suo valore quando si “cambia di poco” la variabile indipendente x .

In realtà, la definizione di funzione continua può essere generalizzata a domini più generali degli intervalli:

DEFINIZIONE: Sia $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione reale di variabile reale definita su un sottinsieme $A \subset \mathbf{R}$. Se $x_0 \in A$ e x_0 è punto di accumulazione di A , diciamo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se $x_0 \in A$ non è un punto di accumulazione per A (cioè se x_0 è un punto isolato di A), conveniamo lo stesso che f è continua in x_0 .

Confrontando questa definizione con la definizione di limite, vediamo che $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ è continua in $x_0 \in A$ se e soltanto se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ogni $x \in A$ con $|x - x_0| < \delta$. Questa osservazione è valida per ogni x_0 , sia di accumulazione per A che isolato!

Per il limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ ci è servito il seguente, semplice

TEOREMA (dei carabinieri): Se f, g, h sono tre funzioni definite in un intorno di x_0 , $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ in tale intorno e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, allora esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell.$$

DIM.: Per dimostrare il teorema dei carabinieri, fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo $\delta > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, $|g(x) - \ell| < \varepsilon$ ogni qual volta $0 < |x - x_0| < \delta$ (a priori, la definizione di limite potrebbe darci due valori diversi di δ per f e per g : perché sia vero quanto appena scritto, basta prendere il più piccolo dei due).

Le due disuguaglianze per f e per g possono anche essere scritte: $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$, $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$. Usando l'ipotesi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ otteniamo allora (per ogni x tale che $0 < |x - x_0| < \delta$):

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \ell + \varepsilon,$$

cioè $|h(x) - \ell| < \varepsilon$, Q.E.D.

Verifichiamo che con la definizione di limite che abbiamo adottato, valgono alcune proprietà dei limiti e delle funzioni continue che suonano abbastanza naturali e che si riveleranno utilissime:

- *Continuità delle costanti e della funzione identica:* Per mostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ basta prendere $\delta = \varepsilon$ nella definizione di limite. Dimostrare che il limite di una costante è la costante stessa è altrettanto facile!

- *Algebra dei limiti*: Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell_1} \quad \text{se } \ell_1 \neq 0.$$

Questi risultati, applicati alle funzioni continue, ci dicono ad esempio che i polinomi sono funzioni continue!

Dimostriamo le affermazioni sull'algebra dei limiti, cominciando dalla prima: per definizione di limite, scelto $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$, $|g(x) - \ell_2| < \varepsilon$. Ma allora $|(f(x) + g(x)) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < 2\varepsilon$, che implica la nostra tesi.

Per quanto riguarda il limite di prodotto e reciproco, cominciamo coll'osservare preliminarmente che una funzione che ammette limite finito in un punto è *limitata in un intorno di quel punto*: se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, allora esiste un intervallo I centrato in x_0 e una costante $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$ (che appartenga anche al dominio di f).

Analogamente, se f è come sopra e $\ell \neq 0$, allora esiste un intervallo J centrato in x_0 tale che $|f(x)| \geq |\ell|/2$ per ogni $x \in J \setminus \{x_0\}$ (che appartenga anche al dominio di f).

Per provare queste affermazioni basta applicare la definizione di limite, per la prima con $\varepsilon = 1$ e per la seconda con $\varepsilon = |\ell|/2$.

Siamo ora in grado di dimostrare l'affermazione sul limite del prodotto. Grazie a quanto appena visto possiamo trovare una costante positiva M tale che $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$ in un opportuno intorno di x_0 ($x \neq x_0$).

Fissato poi $\varepsilon > 0$, sia δ come sopra: evidentemente non è restrittivo supporre che δ sia tanto piccolo da far valere le nostre limitazioni $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$ per $0 < |x - x_0| < \delta$. Allora

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &= |f(x)g(x) - f(x)\ell_2 + f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \leq \\ &|f(x)| |g(x) - \ell_2| + |f(x) - \ell_1| |\ell_2| \leq 2M\varepsilon, \end{aligned}$$

che implica la tesi.

Infine, mostriamo l'ultima delle proprietà elencate: osserviamo che

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell_1} \right| = \frac{|f(x) - \ell_1|}{|f(x)||\ell_1|}.$$

Per quanto visto in precedenza, in un opportuno intervallino centrato in x_0 , diciamo di raggio δ_1 , si ha $|f(x)| \geq |\ell|/2$ (per $x \neq x_0$). A questo punto, basta riapplicare la definizione di limite con ε qualunque per stimare il numeratore: troviamo così un $\delta < \delta_1$ tale che

$$\frac{|f(x) - \ell_1|}{|f(x)||\ell_1|} < \frac{2\varepsilon}{|\ell_1|^2}$$

ogni qual volta $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$.

Abbiamo sostanzialmente usato il “teorema dei carabinieri” per far vedere che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$... anche se a rigore avremmo avuto bisogno di mostrare che la funzione $\cos x$ è continua in 0: abbiamo dato per scontato che “ $\cos x$ si avvicina a 1 quando x si avvicina a 0”. Questo, fortunatamente, può essere dedotto dalle considerazioni appena fatte: questo lo verificheremo la prossima volta.

5 Lezione del 15/10/2024 (3 ore)

Dimostriamo dunque la continuità delle funzioni seno e coseno sull'intera retta reale.

Anzitutto, abbiamo visto che per angoli acuti si ha $0 < \sin x \leq x$ (mentre per ragioni di simmetria avremo $x \leq \sin x < 0$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$): grazie al teorema dei carabinieri deduciamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

In altre parole, la funzione seno è continua in 0.

Sempre per angoli acuti (e positivi), da semplici considerazioni geometriche si ricava che $1 - \cos x < x$, da cui deduciamo subito che $1 - x < \cos x < 1$. Dal teorema dei carabinieri abbiamo allora $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ (per il limite a sinistra di 0, si ricordi che la funzione coseno è pari).

In realtà seno e coseno sono funzioni continue ovunque: se $x_0 \in \mathbf{R}$ possiamo scrivere

$$\sin x = \sin(x_0 + (x - x_0)) = \sin x_0 \cos(x - x_0) + \cos x_0 \sin(x - x_0)$$

da cui si deduce facilmente che $\sin x$ è continua in x_0 . In maniera analoga, la funzione $\cos x$ è continua in tutti i punti.

Analizziamo ora il limite di funzioni composte. Nel caso delle funzioni continue, l'enunciato è piuttosto semplice: la composizione di due funzioni continue è continua. In altre parole $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sono due funzioni definite (per semplicità) su tutto \mathbf{R} , ovunque continue, allora la funzione composta

(funzione di funzione) $f(g(x))$ è pure lei continua: un risultato del tutto plausibile se ricordiamo la nostra pseudo-definizione di continuità.

Per i limiti, occorre una certa cautela dovuta al fatto che nella definizione di limite non vogliamo tener conto del comportamento della funzione *nel punto in cui si calcola il limite*.

Diamo un enunciato preciso, che implica evidentemente quanto detto sopra sulle funzioni continue:

TEOREMA: Sia f definita in un intorno (ev. bucato) di x_0 tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, g definita in un intorno (ev. bucato) di y_0 tale che $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell$. Supponiamo poi che g sia (definita e) continua in y_0 , oppure che si abbia $f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0 (tranne eventualmente in x_0). Allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell.$$

Abbiamo visto con un esempio che se vengono a mancare contemporaneamente sia l'ipotesi di continuità di g che l'ipotesi che $f(x) \neq y_0$ in un intorno (eventualmente bucato) di x_0 , allora la tesi del teorema può essere falsa.

DIM.: Dimostriamo il risultato sul limite di funzione composta nel secondo caso: dato $\varepsilon > 0$, troviamo $\eta > 0$ tale che $|g(y) - \ell| < \varepsilon$ se $0 < |y - y_0| < \eta$.

Troviamo poi δ tale che, se $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - y_0| < \eta$ (e questa quantità è positiva, a patto di prendere η abbastanza piccolo, grazie all'ipotesi che $f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0). Usando dunque la disuguaglianza valida per g , otteniamo

$$|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon \quad \text{se } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

Se poi g è continua in y_0 , con la stessa notazione usata sopra avremo $g(y_0) = \ell$, per cui la disuguaglianza $|g(y) - \ell| < \varepsilon$ vale per $|y - y_0| < \eta$ (non c'è più bisogno di supporre $y \neq y_0$). Q.E.D.

Introduciamo alcune variazioni sul tema: limiti destro e sinistro, limiti all'infinito e limiti infiniti (e mostriamo qualche esempio di ciascuno): se $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, diremo che $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ (limite destro) se la restrizione di f all'insieme $A \cap (x_0, +\infty)$ ha limite ℓ nel punto x_0 (ovviamente x_0 dovrà essere di accumulazione per tale insieme). Analogamente si definisce il limite sinistro, restringendosi alla semiretta $(-\infty, x_0)$.

I limiti infiniti si definiscono come segue: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ implica $f(x) > M$ (e c'è una definizione analoga per il limite $-\infty$).

Limiti all'infinito: diciamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che $x > N$ implica $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Analogamente, si definisce il limite a $-\infty$, e anche i limiti infiniti all'infinito...

OSSERVAZIONE: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua e strettamente crescente (oppure strettamente decrescente), allora esiste la funzione inversa $g : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$, (rispettivamente $g : [f(b), f(a)] \rightarrow [a, b]$), anch'essa continua. Questo risultato è "geometricamente evidente", ed una sua dimostrazione rigorosa sarà dedotta facilmente dal teorema di esistenza degli zeri e da una notevole proprietà delle funzioni crescenti o decrescenti.

Per il momento, basti dire che questo implica ad esempio la continuità della funzione radice quadrata...

Si noti che per parlare di limite a $+\infty$ di una funzione f , basta che il dominio di f sia un insieme *illimitato superiormente*: in particolare, data una funzione $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, ha senso chiedersi se esiste il $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$.

Abbiamo poi visto che purtroppo il limite non esiste sempre. Ad esempio non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ (questa funzione compie *infinite* oscillazioni tra -1 e 1 in *ogni* intorno comunque piccolo di 0). Oppure può accadere che il limite non esista, ma esistano il limite destro e/o il limite sinistro (se ci fossero entrambi, dovrebbero però essere diversi altrimenti il limite esisterebbe!)

Ecco di seguito un caso particolare importante di limite all'infinito... Una funzione definita su \mathbf{N} si chiama *successione*. Di solito, per le successioni si adotta una notazione differente da quella usata per le funzioni: piuttosto che scrivere $f(n)$, si usa una scrittura del tipo $\{a_n\}$, dove il simbolo a_n rappresenta il valore della successione in $n \in \mathbf{N}$.

Facendo l'opportuna traduzione della definizione di limite in questo particolare caso, scopriamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Abbiamo già visto che il limite di una funzione in un punto non necessariamente esiste, così come non necessariamente esiste il limite di una successione per $n \rightarrow +\infty$: per esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ non ha limite.

Ci piacerebbe avere un risultato che dica almeno che le successioni *fatte in un certo modo* hanno limite. Ancora una volta, ci viene in aiuto la completezza di \mathbf{R} :

TEOREMA: Sia $\{a_n\}$ una successione crescente (cioè $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni n). Allora $\{a_n\}$ ammette limite per $n \rightarrow +\infty$, e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}.$$

Analogo risultato vale per successioni decrescenti: in questo caso il limite coincide con l'estremo inferiore dell'immagine della successione.

Dimostrazione: Sia $S = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$. Supponiamo dapprima che sia $S \in \mathbf{R}$: vedremo poi il caso $S = +\infty$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome S è un maggiorante dei valori assunti dalla successione, abbiamo che $a_n \leq S < S + \varepsilon$ per ogni n . D'altra parte, $S - \varepsilon$ non è più un maggiorante (per definizione di sup), per cui esiste un elemento della successione, chiamiamolo $a_{\bar{n}}$, tale che $a_{\bar{n}} > S - \varepsilon$. Siccome la successione è crescente, se $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n \geq a_{\bar{n}} > S - \varepsilon$.

Mettendo insieme le due disuguaglianze ottenute sopra, abbiamo che per $n > \bar{n}$ si ha $|a_n - S| < \varepsilon$.

Se poi $S = +\infty$, l'immagine della successione non ammette maggioranti. Dunque, per ogni fissato $M > 0$ esiste \bar{n} tale che $a_{\bar{n}} > M$. Per la crescita della successione abbiamo allora $a_n \geq a_{\bar{n}} > M$ per ogni $n \geq \bar{n}$ e dunque $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ Q.E.D.

6 Lezione del 16/10/2024 (3 ore)

In maniera del tutto analoga, si mostra che una funzione crescente (definita su un sottinsieme di \mathbf{R} illimitato superiormente) ammette limite a $+\infty$, e che questo limite è uguale al sup. Ancora, una funzione crescente $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ammette limite destro e sinistro in ogni punto: precisamente,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > x_0\}.$$

Usiamo ora il teorema sui limiti delle successioni monotone per *definire il numero di Nepero e (la base dei logaritmi naturali)*: poniamo per *definizione*

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Naturalmente, occorre far vedere che questo limite *esiste ed è finito!*

L'idea della dimostrazione non è difficile: mostriamo dapprima che la successione $a_n = (1 + 1/n)^n$ è crescente (e quindi il limite esiste!), ed è poi limitata superiormente (e quindi il limite è finito).

Come vedremo, il tutto può essere dimostrato usando la disuguaglianza di Bernoulli⁵.

⁵La disuguaglianza di Bernoulli afferma che $(1+a)^n \geq 1+na$ se $a > -1$ e $n \in \mathbf{N}$. Essa può essere dimostrata facilmente utilizzando il *principio di induzione*, procedendo come

Per dimostrare che la nostra definizione di e è una buona definizione, dobbiamo far vedere che $a_n \geq a_{n-1}$ per ogni numero naturale $n > 1$, ove $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Ora, manipolando un po' la disuguaglianza da dimostrare si vede che questa equivale a $(\frac{n^2-1}{n^2})^n \geq (\frac{n-1}{n})$, cioè a $(1 - \frac{1}{n^2})^n \geq (1 - \frac{1}{n})$: ma questo è esattamente quel che ci dice la disuguaglianza di Bernoulli! (In realtà, tenendo conto dei casi in cui la disuguaglianza di Bernoulli è stretta, abbiamo mostrato che la successione a_n è strettamente crescente...)

Per mostrare poi che il limite è finito, occorre mostrare che la successione è superiormente limitata. A questo scopo prendiamo la successione $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$, e mostriamo che questa è *decreciente*.

Si ha allora $2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4$, e possiamo essere certi che e è un numero reale compreso tra 2 e 4. Evidentemente, si possono avere stime migliori prendendo n grande, in quanto $a_n < e < b_n$...

Ci è rimasto da dimostrare che la successione $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ è *decreciente*. Manipolandola un po' ci si rende conto che la disuguaglianza $b_n \leq b_{n-1}$ è equivalente alla seguente:

$$1 + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n.$$

D'altra parte, grazie alla disuguaglianza di Bernoulli abbiamo

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2 - 1} = 1 + \frac{1}{n - \frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n},$$

come volevamo.

Dalla definizione del numero di Nepero e deriva il seguente *limite fondamentale* (di funzione reale!):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e.$$

La cosa può essere dimostrata senza troppa difficoltà giocando con le parti intere: ricordo che il simbolo $[x]$ indica *il più grande numero intero minore o uguale a x* , da cui si ha evidentemente $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]} = e$ grazie alla definizione del numero e . Inoltre, per $x > 0$ valgono le ovvie disuguaglianze

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

segue. Per $n = 0$ la disuguaglianza è ovviamente vera. Supponiamola vera per un certo n : allora $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n (1 + a) \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$, che dimostra il passo induttivo. Si noti che, in realtà, per $n \geq 2$, $a \neq 0$ la disuguaglianza è stretta!

Ora, è immediato verificare che la funzione a sinistra e quella a destra tendono entrambe ad e (grazie all'osservazione fatta sopra), e il risultato voluto segue dal teorema dei carabinieri.

Osserviamo che il calcolo del limite di rapporti, prodotti e somme diventa complicato in alcuni casi particolarmente delicati, detti *forme indeterminate*.

Infatti non è difficile convincersi che se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = 0$. Invece, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, (*forma indeterminata 0/0*) non è così chiaro cosa succeda al limite del rapporto!

Questo per un buon motivo: il limite del rapporto di due funzioni che tendono entrambe a 0 può combinare *qualunque cosa*. Può essere un qualunque numero reale, essere infinito o non esistere. Per vederlo prendiamo $x_0 = 0$ e (i) $f(x) = g(x) = x$: in questo caso il limite del rapporto è 1; (ii) $f(x) = x$, $g(x) = x^3$: in questo caso il limite è $+\infty$; (iii) $f(x) = x \sin(1/x)$, $g(x) = x$: in questo caso il limite non esiste.

Altre forme indeterminate (cioè situazioni come quella appena vista, in cui la sola conoscenza del limite delle funzioni f e g non permette di stabilire quanto fa il limite di f/g , $f \cdot g$, $f + g$ oppure f^g) sono ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 ... Il limite fondamentale che ci ha permesso di definire il numero di Nepero e è proprio nella forma indeterminata 1^∞ .

Il lettore può provare a ripetere l'esercizio sopra per la forma indeterminata $0 \cdot \infty$ (prodotto di una funzione che tende a 0 e di una che tende all'infinito), mostrando che anche in questo caso il limite del prodotto può essere finito, infinito o non esistere.

Usando il limite fondamentale dimostrato la volta scorsa e la continuità della funzione esponenziale e della funzione logaritmo (per il momento diamola per buona: la dimostreremo tra poco!), possiamo dimostrare senza eccessiva difficoltà che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Per dimostrare il primo limite, possiamo cominciare a far vedere che $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (questo è un semplice esercizio), da cui $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ (basta "cambiare variabile" ponendo $y = 1/x$... è anche opportuno distinguere il limite destro e il limite sinistro). Il limite voluto segue allora prendendo il logaritmo in base e (ricordando anche il teorema sul limite di funzione composta: prendiamo per buona la continuità della funzione logaritmo!). Il secondo dei due limiti fondamentali segue invece dal primo con il "cambio

di variabile" $y = e^x - 1$ (anche in questo caso, ci serve la continuità della funzione esponenziale per dire che $y \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$).

Verifichiamo finalmente che le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$ (con $a > 0$, $a \neq 1$) sono continue. Grazie alle proprietà delle potenze, è sufficiente verificarne la continuità in $x_0 = 0$: ci basta far vedere che $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

Supponiamo per fissare le idee che sia $a > 1$ (la generalizzazione al caso $0 < a < 1$ è lasciata per esercizio: basti osservare che $a^x = (1/a)^{-x}$...). Cominciamo col mostrare che vale il limite di successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Definiamo $b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$: questa è una successione positiva, ed il nostro limite sarà provato se facciamo vedere che $b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Ora, si vede subito che $a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$ (dove per l'ultimo passaggio usiamo la disuguaglianza di Bernoulli), da cui $0 < b_n \leq \frac{a-1}{n}$. Il limite segue allora dal teorema dei carabinieri. Sia ora $\varepsilon > 0$. Troviamo $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che $a^{1/\bar{n}} < 1 + \varepsilon$. Siccome la funzione esponenziale è crescente, se ne deduce che $1 < a^x < 1 + \varepsilon$ se $0 < x < \frac{1}{\bar{n}}$, per cui $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1$. Per mostrare che anche il limite sinistro ha lo stesso valore, basta osservare che $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$...

7 Lezione del 21/10/2024 (1 ora)

Dalla continuità di esponenziale e logaritmo si deducono molte proprietà importanti, ad esempio la continuità della funzione $f(x) = x^b$ ($x \geq 0$): basta scrivere $x^b = e^{b \log x}$ e usare la continuità di esponenziale e logaritmo.

Ecco un altro esercizio guidato per dimostrare due limiti fondamentali molto utili: visto che abbiamo parlato della funzione esponenziale e delle sue proprietà, questo è un buon momento per farlo!

ESERCIZIO: Si provino i due seguenti *limiti fondamentali*:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0$$

per ogni $a > 1$ e per ogni $b > 0$.

[*SUGGERIMENTO:* Cominciamo con l'osservare che, grazie alla disuguaglianza di Bernoulli, $a^n/\sqrt{n} = (1 + (a-1))^n/\sqrt{n} \geq (1 + n(a-1))/\sqrt{n} = 1/\sqrt{n} + \sqrt{n}(a-1) \rightarrow +\infty$, e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n}} = +\infty$.

Si ha poi, per $x > 0$,

$$\frac{a^x}{\sqrt{x}} \geq \frac{a^{[x]}}{\sqrt{[x]+1}} = \frac{a^{[x]+1}}{a\sqrt{[x]+1}}.$$

La quantità a destra, per $x \rightarrow +\infty$ tende a $+\infty$ grazie al limite di successione appena visto. Ne consegue che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Da questo segue facilmente il primo dei due limiti fondamentali scritti sopra, in quanto

$$\frac{a^x}{x^b} = \left(\frac{(a^{\frac{1}{2b}})^x}{\sqrt{x}} \right)^{2b} \cdots$$

Per verificare il secondo “limite fondamentale”, è sufficiente cambiare variabile ponendo $y = \log x$.]

Uno dei risultati fondamentali sulle funzioni continue, è il
TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Questo teorema dall’aria innocua si rivela in realtà assai utile. Per esempio, consideriamo la funzione continua $f(x) = x^2 - a$ (con $a > 0$) sull’intervallo $[0, a+1]$. Si vede subito che $f(0) = -a < 0$, mentre $f(a+1) = a^2 + a + 1 > 0$. Il teorema ci assicura che esiste un punto c dell’intervallo tale che $c^2 - a = 0$: abbiamo così dimostrato che esiste la radice quadrata di a . Essa è poi unica perché la funzione considerata è strettamente crescente sulla semiretta dei reali positivi (e quindi non si può annullare due volte).

In maniera analoga possiamo dimostrare l’esistenza del logaritmo, delle funzioni trigonometriche inverse, delle radici di ogni ordine....Non sarà nemmeno difficile verificare che tutte queste funzioni sono continue.

Propongo due diverse dimostrazioni del teorema di esistenza degli zeri (in aula abbiamo visto la seconda!).

PRIMA DIMOSTRAZIONE (lunghetta ma istruttiva...): Usiamo il cosiddetto *metodo di bisezione*. Sia $d = (b - a)/2$ il punto medio dell’intervallo $[a, b]$: se $f(d) = 0$ siamo felicissimi perché abbiamo trovato il punto voluto, in caso contrario avremo $f(d) < 0$ oppure $f(d) > 0$. In ogni caso, in uno dei due “mezzi intervalli” $[a, d]$ oppure $[d, b]$ si ripropone la situazione di partenza: f è negativa nell’estremo sinistro dell’intervallo, positiva nell’estremo destro. Chiamiamo $[a_1, b_1]$ il semiintervallo che gode di questa proprietà.

Ripetiamo poi la stessa costruzione: prendiamo il punto di mezzo dell’intervallo $[a_1, b_1]$ e osserviamo che se la funzione non si annulla nel punto di mezzo (ma se così fosse avremmo finito), in uno dei due mezzi intervalli che chiameremo $[a_2, b_2]$ si ripropone la situazione di partenza: $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$.

Iteriamo questa costruzione: se il processo non si arresta perché troviamo un punto in cui la funzione si annulla, avremmo individuato una successione infinita di intervalli $[a_n, b_n]$, ciascuno contenuto nel precedente e tali che $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. Per costruzione abbiamo che la successione degli estremi sinistri a_n è crescente, la successione degli estremi destri b_n è decrescente e inoltre $b_n - a_n = (b - a)/2^n$. Siccome una successione crescente e limitata ammette limite finito, esisterà il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c$, ed evidentemente $c \in [a, b]$.

È evidente che si ha anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = c$ per quanto osservato sopra sulla differenza tra a_n e b_n . Grazie alla continuità di f , si ha poi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(c) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c).$$

D'altra parte, il primo limite deve essere necessariamente ≤ 0 in quanto limite di una successione di numeri negativi, mentre il secondo deve essere ≥ 0 in quanto limite di una successione di numeri positivi: siccome i due limiti sono entrambi uguali a $f(c)$, ne deriva che $f(c) = 0$. Q.E.D.

DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA: Vogliamo proporre un'altra dimostrazione del teorema, leggermente più rapida.

Poniamo $c = \sup A$, dove $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Questo è evidentemente un numero reale compreso tra a e b . Dico che $f(c) = 0$.

Infatti, se per assurdo avessimo $f(c) > 0$, per definizione di limite avremmo $f(x) > 0$ anche per tutti gli x in un certo intorno sinistro $[c - \delta, c]$ di c ⁶. Quindi $c - \delta$ sarebbe un maggiorante di A più piccolo di c , contro la definizione di estremo superiore.

Se poi fosse $f(c) < 0$, dovrebbe essere $c < b$ (perché $f(b) > 0$). Per lo stesso motivo di prima, troveremmo $\delta > 0$ tale che $f(x) < 0$ per $x \in [c, c + \delta]$, e c non sarebbe più un maggiorante di A . Q.E.D.

8 Lezione del 22/10/2024 (3 ore)

Un immediato corollario del teorema di esistenza degli zeri è il seguente

TEOREMA (dei valori intermedi): Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua, essa assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

⁶Questo semplice fatto è noto come *teorema della permanenza del segno*: se una funzione ha limite positivo in x_0 , allora è positiva in un intorno di x_0 (con la possibile esclusione di x_0).

Dimostrazione: Sia y_0 un valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$. Basta applicare il Teorema di esistenza degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - y_0$...

Q.E.D.

Questo teorema è particolarmente utile per dimostrare che certe funzioni continue sono *invertibili*. Da esso discende l'esistenza della radice quadrata e del logaritmo e la continuità di queste funzioni, come vedremo tra breve.

DEFINIZIONE: Una funzione $f : A \rightarrow B$ (A, B insiemi) si dice *iniettiva* o *uno a uno* se $f(a_1) = f(a_2)$ implica $a_1 = a_2$: in altre parole, dato $b \in B$ esiste al più un $a \in A$ tale che $f(a) = b$ (oppure nessuno!).

f si dice poi *suriettiva* se per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$, ossia se *l'immagine coincide col codominio*: $f(A) = B$.

Infine, f si dice *biiettiva* o *biunivoca* o *invertibile* se è sia iniettiva che suriettiva. In tal caso, esiste un'unica funzione $g : B \rightarrow A$ tale che $g(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$ e $f(g(b)) = b$ per ogni $b \in B$. Tale g si chiama inversa di f . Vale evidentemente anche il viceversa: esiste dunque l'inversa se e soltanto se f è biiettiva.

Dal teorema dei valori intermedi segue che se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua e strettamente crescente (che è evidentemente iniettiva!), essa è *suriettiva* sull'intervallo $[f(a), f(b)]$: in altre parole, essa è *invertibile*. Questo ci assicura l'esistenza di radici, logaritmi, funzioni inverse delle funzioni trigonometriche...

Ecco un teorema che assicura la continuità della funzione inversa:

TEOREMA (Continuità delle funzioni monotone): Una funzione crescente $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è continua se e solo se

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

Un risultato analogo vale per le funzioni decrescenti.

DIM.: Se f è continua, la tesi è una conseguenza immediata del Teorema dei valori intermedi. Viceversa, supponiamo che f non sia continua, e sia x_0 un suo punto di discontinuità (supponiamo per semplicità $x_0 \in (a, b)$: le semplici modifiche necessarie nei casi $x_0 = a$ o $x_0 = b$ sono lasciate per esercizio).

Abbiamo osservato che le funzioni crescenti ammettono sempre limite destro e sinistro, che evidentemente devono essere diversi in x_0 :

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : a \leq x < x_0\} < \\ \ell_2 &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x_0 < x \leq b\}. \end{aligned}$$

Per la crescenza di f , segue subito che $f([a, b])$ contiene al più un punto dell'intervallo aperto (ℓ_1, ℓ_2) , ossia il valore $f(x_0)$ se questo non coincide con uno dei due limiti: per questo motivo f non può essere suriettiva.

Q.E.D.

Da quest'ultimo teorema segue che *la funzione inversa di una funzione continua e strettamente crescente definita su un intervallo $[a, b]$, è anch'essa continua*. Infatti, la funzione inversa è strettamente crescente e suriettiva da $[f(a), f(b)]$ in $[a, b]$.

Il teorema è vero anche per una funzione continua e strettamente crescente da un generico intervallo I in \mathbf{R} . Infatti se l'intervallo I non è chiuso o non è limitato, possiamo comunque invaderlo con intervalli chiusi e limitati sempre più grandi:

COROLLARIO: Sia I un intervallo di \mathbf{R} , $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua e strettamente crescente. Allora la funzione inversa $g : f(I) \rightarrow \mathbf{R}$ è anch'essa continua e strettamente crescente.

Sono in particolare continue le radici, i logaritmi, le funzioni trigonometriche inverse...

Un altro, importante risultato sulle funzioni continue è il

TEOREMA (di Weierstrass): Una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ammette massimo e minimo.

Attenzione: è importante che il dominio della funzione sia *chiuso e limitato*⁷ e che la funzione sia continua. Abbiamo visto con qualche esempio che senza queste ipotesi la tesi può anche essere falsa!

Per dimostrare il teorema di Weierstrass useremo un risultato che si rivelerà utilissimo in molte altre occasioni: il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Premettiamo un'importante definizione che sarà necessaria a comprenderlo.

DEFINIZIONE: Data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, una sua *sottosuccessione* è una nuova successione del tipo $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbf{N}}$, dove n_k è a sua volta una *successione strettamente crescente di numeri naturali*.

Per esempio, da una data successione si può estrarre la sottosuccessione dei termini di indice pari, dei termini di indice dispari, di quelli il cui indice è divisibile per 54...

⁷In realtà che sia un intervallo non è essenziale: il teorema è generalizzabile a domini chiusi e limitati qualunque... Un sottinsieme di \mathbf{R} si dice chiuso se tutto i suoi punti di accumulazione vi appartengono. La dimostrazione del Teorema di Weierstrass in queste ipotesi più generali è identica a quella che daremo nel caso di un intervallo!

Evidentemente, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$, a maggior ragione si avrà $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \ell$ per ogni sottosuccessione della prima. È però interessante notare che anche da una successione che *non ha limite* si può estrarre una sottosuccessione che ce l'ha: enunciando e dimostrando il Teorema di Bolzano-Weierstrass che afferma proprio questo!

TEOREMA (di Bolzano-Weierstrass): Da una successione limitata $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ è sempre possibile estrarre una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbf{N}}$ che ammette limite finito.

DIM.:

Per la dimostrazione usiamo il buon vecchio metodo di bisezione. Per ipotesi, la nostra successione è limitata, cioè esiste un intervallo $[\alpha, \beta]$ tale che $a_n \in [\alpha, \beta]$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Se dividiamo l'intervallo $[\alpha, \beta]$ in due metà, ce ne dovrà essere almeno una (che chiameremo $[\alpha_1, \beta_1]$) tale che $a_n \in [\alpha_1, \beta_1]$ per infiniti indici n . Analogamente, se dividiamo $[\alpha_1, \beta_1]$ in due parti uguali, ce ne sarà una che chiameremo $[\alpha_2, \beta_2]$ tale che $a_n \in [\alpha_2, \beta_2]$ per infiniti indici n .

Proseguendo in questo modo, costruiamo una successione infinita di intervalli $[\alpha_k, \beta_k]$, ciascuno dei quali è una delle due metà del precedente, con la proprietà che la successione $\{a_n\}$ cade entro $[\alpha_k, \beta_k]$ per infiniti indici n .

Evidentemente, $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ è una successione crescente per cui esisterà

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = \ell \in [\alpha, \beta].$$

Inoltre, avremo anche $\lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k = \ell$ poiché $\beta_k - \alpha_k = (\beta - \alpha)/2^k$.

Costruiamo una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ nel modo seguente: come n_1 prendiamo il più piccolo indice n per cui a_n appartiene a $[\alpha_1, \beta_1]$, come n_2 il più piccolo indice $n > n_1$ per cui $a_n \in [\alpha_2, \beta_2]$ (esisterà certamente: di indici siffatti ce ne sono infiniti per costruzione di $[\alpha_2, \beta_2]$)... Proseguiamo allo stesso modo: n_k sarà il più piccolo indice $n > n_{k-1}$ per cui $a_n \in [\alpha_k, \beta_k]$.

In questo modo, avremo individuato una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ tale che $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$ per ogni k . Grazie al teorema dei carabinieri, si avrà quindi $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \ell$. Q.E.D.

Vediamo finalmente la dimostrazione del teorema di Weierstrass.

Sia $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Dobbiamo mostrare che M è finito ed è il massimo di f , cioè che esiste $\bar{x} \in [a, b]$ tale che $f(\bar{x}) = M$. L'esistenza del minimo si dimostra poi in modo analogo.

Innanzitutto, dalla definizione di sup segue che possiamo trovare una successione $\{x_n\} \subset [a, b]$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M.$$

Infatti, se M è finito e $n \in \mathbf{N}$, basta osservare che $M - \frac{1}{n}$ non è un maggiorante dell'immagine di f per trovare $x_n \in [a, b]$ tale che $M - 1/n < f(x_n) \leq M$.

Se viceversa $M = +\infty$ e $n \in \mathbf{N}$, allora n non è un maggiorante dell'immagine di f (perché essa è illimitata superiormente): esiste dunque x_n tale che $f(x_n) > n$.

La successione $\{x_n\}$ è limitata (perché lo è l'intervallo $[a, b]$): il teorema di Bolzano-Weierstrass ci fornisce una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_k$ tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \bar{x}$. Evidentemente, $\bar{x} \in [a, b]$ (e per questo è essenziale la chiusura dell'intervallo...).

Allora, grazie alla continuità di f in \bar{x} si ha:

$$M = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x}),$$

e \bar{x} è il punto di massimo cercato. Q.E.D.

9 Lezione del 23/10/2024 (3 ore)

Concluso il nostro studio delle funzioni continue, è giunto il momento di avvicinarci al calcolo differenziale. Cominciamo dunque a introdurre il fondamentale concetto di derivata di una funzione.

Supponiamo di avere una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, e di voler capire come è fatto il suo grafico: questo può avere un notevole interesse applicativo, per esempio se vogliamo massimizzare o minimizzare una quantità fisica rappresentata da f .

Se guardiamo il grafico di una funzione “a caso” (che sia però abbastanza regolare: supponiamo che il grafico sia una linea continua e senza spigoli vivi), ci accorgiamo che ci sarebbe estremamente utile saper identificare i tratti “in salita” e i tratti “in discesa” del grafico della funzione! Per far questo, abbiamo bisogno di una definizione di *pendenza del nostro grafico in un punto*.

Se la funzione è un polinomio di primo grado, cioè se $f(x) = mx + q$, il grafico è una retta e la risposta è facilissima: la pendenza del grafico (in senso “stradale”: rapporto tra quanto si sale e quanto ci si sposta in orizzontale!) è data *dal coefficiente angolare* m . In sostanza, per chi si sposta da sinistra verso destra, se $m > 0$ il grafico è in “salita”, se $m = 0$ è “piano” e se $m < 0$ è in “discesa”!

Se prendiamo però una funzione il cui grafico non sia una retta, la pendenza non sarà più costante, ma potrà cambiare da punto a punto.

Vediamo come possiamo definire la “pendenza” del grafico di una funzione reale di variabile reale in un suo punto di ascissa x_0 : se prendiamo due punti

abbastanza vicini sulla retta reale, x_0 e $x_0 + h$, è ragionevole pensare che la “pendenza” del grafico di f in x_0 (qualunque cosa questo significhi!), sia vicina alla pendenza della retta che passa per i due punti corrispondenti sul grafico, $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Tale pendenza è data dall’espressione

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

detta “rapporto incrementale”.

E’ ragionevole supporre che prendendo h sempre più piccolo (e quindi i due punti sempre più vicini), avremo un’approssimazione sempre migliore della pendenza del grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. Diamo dunque la seguente

DEFINIZIONE: La pendenza del grafico di f per $x = x_0$ si chiama derivata di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$. Essa si definisce ponendo

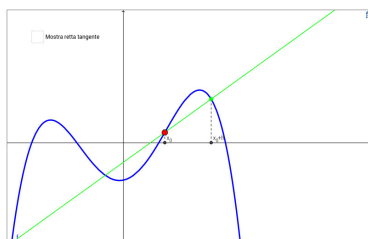
$$f'(x_0) =_{def} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

purché il limite esista finito.

Se il limite non esiste o è infinito, non è definita la pendenza e diciamo che la funzione non è derivabile in x_0 .

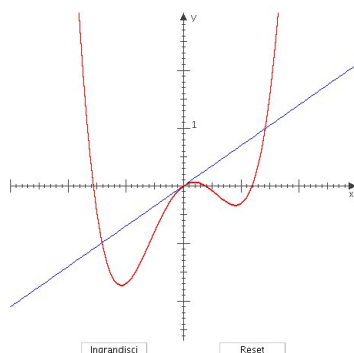
In particolare, se $f'(x_0)$ esiste, la *retta tangente* al grafico di f per $x = x_0$ sarà la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ la cui pendenza coincide con quella del grafico stesso: essa avrà dunque equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Per visualizzare meglio la definizione di derivata, vi propongo una animazione interattiva⁸ che illustra il concetto



I più curiosi potranno trovare anche un modo alternativo di vedere la retta tangente, come “limite di ingrandimenti del grafico di f attorno a $(x_0, f(x_0))$ ”:

⁸<http://www.geogebraTube.org/material/show/id/196977>



Un risultato assai semplice ma importante è il seguente

TEOREMA: Se f è una funzione definita in un intorno di x_0 derivabile in x_0 , allora f è anche continua in x_0 .

Dimostrazione: Si ha

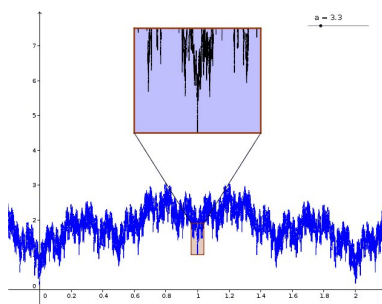
$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h = 0.$$

Infatti, nell'ultima espressione la frazione tende a $f'(x_0)$, mentre il fattore h tende a 0.

Q.E.D.

Osserviamo che il viceversa del risultato precedente non è vero: una funzione può essere continua ma non derivabile in un punto, come ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ in 0.

In realtà, può succedere ben di peggio: nel 1872 Karl Weierstrass costruì una funzione ovunque continua sulla retta reale, ma non derivabile in alcun punto. La costruzione di questa funzione richiede conoscenze un po' più raffinate di quelle che possediamo in questo momento. Nel frattempo, però, possiamo ammirarne il grafico (cliccando sull'immagine parte un filmato!):

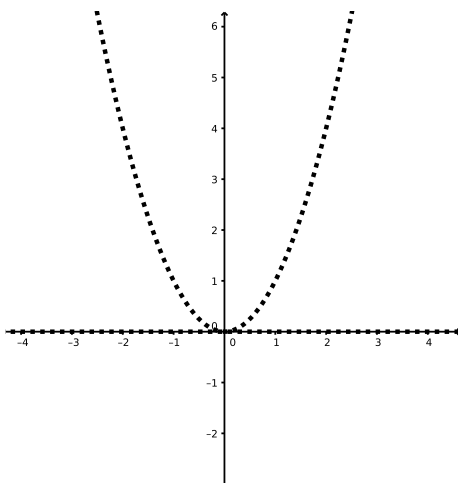


Abbiamo osservato anche che la derivabilità *in* x_0 non implica la continuità *in un intorno di* x_0 : ci sono esempi di funzioni derivabili e continue in

un punto ma discontinue in tutti gli altri. In concreto, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbf{Q}, \\ x^2 & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

è continua e derivabile in 0 (con $f'(0) = 0$), ma discontinua in tutti gli altri punti.



Diamo un'accenno di altre possibili interpretazioni del rapporto incrementale e della derivata: velocità media e velocità istantanea di un corpo che si muove di moto rettilineo, velocità media e istantanea di una reazione chimica, tasso di interesse (o tasso di inflazione...).

Come abbiamo fatto con i limiti, possiamo chiederci cosa sia la derivata della somma, del prodotto o del rapporto di due funzioni:

TEOREMA (Algebra delle derivate): Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni definite in un intorno di x_0 , derivabili in x_0 .

- (i) La somma di f e g è derivabile in x_0 , e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- (ii) Il prodotto di f e g è derivabile in x_0 , e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
- (iii) se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Dimostrazione: La (i) è praticamente ovvia (il rapporto incrementale della somma è la somma dei rapporti incrementali...)

Dimostriamo la (ii): abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ & \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h) + f(x_0)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ & \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}g(x_0 + h) + f(x_0)\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \end{aligned}$$

e passando al limite per $h \rightarrow 0$ (tenendo conto anche della continuità delle funzioni derivabili) si ottiene (ii).

Per dimostrare la (iii), calcoliamoci la derivata di $1/g(x)$: dobbiamo fare

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \cdot \frac{1}{g(x_0 + h)g(x_0)} = - \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

La (iii) segue allora immediatamente usando la formula appena ricavata e la (ii). Q.E.D.

Abbiamo proseguito la lezione calcolando la derivata di $f(x) = x^n$ per $n \in \mathbf{N}$: per induzione si vede subito che $f'(x) = nx^{n-1}$.

Usando ancora le regole di derivazione, e la stessa definizione di derivata, verifichiamo senza difficoltà che $(x^n)' = nx^{n-1}$ per $n \in \mathbf{Z}$.

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(e^x)' = e^x$ (e analogamente $(a^x)' = a^x \log a$), $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

Vediamo ora come si deriva una funzione composta:

TEOREMA (Chain Rule): Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 , derivabile in x_0 , e sia g una funzione definita in un intorno di $y_0 = f(x_0)$, derivabile in y_0 . Allora la funzione composta $g \circ f(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Vedremo la dimostrazione la prossima volta. Nel frattempo, usando questa formula possiamo calcolarci altre derivate. Per esempio, se $x > 0$ e $a \in \mathbf{R}$ abbiamo: $(x^a)' = (e^{a \log x})' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$.

Analogamente

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \log f(x)})' = \dots$$

10 Lezione del 29/10/2024 (3 ore)

DIM.: Introduciamo la seguente funzione ausiliaria, definita in un intorno di 0:

$$A(k) = \begin{cases} \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} & \text{se } k \neq 0, \\ g'(y_0) & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Evidentemente, questa funzione è *continua in 0*, per definizione di derivata.

Costruiamo ora il rapporto incrementale della funzione $g \circ f$, e passiamo al limite per $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} &= \\ A(f(x_0 + h) - f(x_0)) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &\rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Ci poniamo ora la questione della derivabilità dell'inversa di una funzione derivabile (ed invertibile).

TEOREMA (Derivata della funzione inversa): Sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua e strettamente crescente su un intervallo aperto I , $g : J \rightarrow I$ la sua inversa (definita sull'intervallo $J = f(I)$). Se f è derivabile in $x_0 \in I$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, e $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$. In altre parole,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Dimostrazione: Osserviamo che se *sapessimo già* che la funzione inversa g è derivabile in y_0 , la formula per la derivata di g sarebbe facilissima da trovare. Infatti $g(f(x)) = x$, e derivando ambo i membri si ha $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1$, da cui la formula voluta.

Siccome però non sappiamo che g è derivabile in y_0 , dobbiamo proprio trovare il limite del rapporto incrementale $(g(y_0 + h) - g(y_0))/h$ per $h \rightarrow 0$.

Se poniamo $y_0 + h = f(x_0 + k)$, applicando la g ad ambo i membri troviamo $g(y_0 + h) = x_0 + k = g(y_0) + k$, da cui $g(y_0 + h) - g(y_0) = k$. Siccome sappiamo che con le nostre ipotesi la funzione inversa g è continua, vediamo che quando $h \rightarrow 0$ anche $k \rightarrow 0$. Dunque

$$g'(y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{f(x_0 + k) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Q.E.D.

Utilizziamo il teorema di derivazione della funzione inversa per trovare la derivata di $\arcsin y$:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos \arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

In maniera del tutto analoga troviamo che $(\arccos y)' = -1/\sqrt{1 - y^2}$, e che $(\arctan y)' = 1/(1 + y^2)$ (per quest'ultima formula, si ricordi l'identità $\cos^2 \alpha = 1/(1 + \tan^2 \alpha)$).

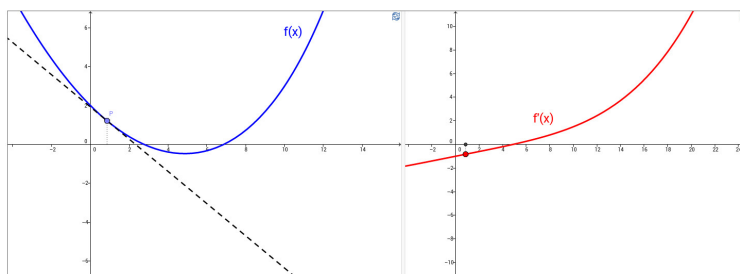
Ora abbiamo a disposizione un arsenale di risultati sufficiente a calcolare le derivate di tutte le funzioni esprimibili in termini di funzioni elementari tramite operazioni algebriche e di composizione. Quindi, in linea di principio, siamo in grado di studiare l'andamento di un gran numero di funzioni studiando il segno delle loro derivate.

In realtà, però, bisogna ammettere che per ora abbiamo solo "intuito" che una funzione con derivata positiva su un intervallo è crescente in tale intervallo: l'effettiva dimostrazione di questo plausibilissimo fatto verrà data in seguito e non è affatto immediata!

Per ora, ci siamo limitati ad osservare che la crescita della funzione *in un intervallo* implica chiaramente che la derivata è maggiore o uguale a zero in tutti i punti in cui la funzione stessa è derivabile: questo perchè le funzioni crescenti hanno rapporti incrementali maggiori o uguali a zero!

Per determinare in modo più accurato l'andamento del grafico di una funzione, è utile saper trovare gli intervalli di concavità e di convessità del grafico stesso: bisogna cioè saper determinare se, in un certo intervallo, la funzione "fa la pancia" verso il basso o verso l'alto....

Prima di proseguire nella lettura, potete esaminare la seguente introduzione interattiva alle funzioni convesse...⁹



⁹<http://www.geogebraTube.org/student/m210555>

Cominciamo con una definizione rigorosa di convessità *per una funzione derivabile*: in realtà, si può dare una definizione più generale, valida anche per funzioni non derivabili.

Definizione: Diciamo che una funzione derivabile $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è *convessa sull'intervallo* $[a, b]$ se il grafico di f giace tutto al di sopra di ogni retta tangente al grafico stesso, condotta per un punto qualunque di $[a, b]$. Con linguaggio simbolico, vogliamo che per ogni $x_0 \in [a, b]$ e per ogni $x \in [a, b]$ valga

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Se vale sempre la disuguaglianza opposta, diremo che la funzione è *concava*.

Se disegniamo il grafico di una funzione convessa, osserviamo come la pendenza delle rette tangenti cresca man mano che il punto di tangenza si sposta verso destra: in effetti, questa è una caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili:

TEOREMA: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Allora f è convessa se e solo se la funzione derivata f' è *crescente* sull'intervallo $[a, b]$.

Dimostrazione: Supponiamo che f sia convessa, e prendiamo x_1, x_2 in $[a, b]$, $x_1 < x_2$. Per la disuguaglianza di convessità abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1), \\ f(x) &\geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2), \end{aligned}$$

disuguaglianze valide per ogni $x \in [a, b]$. In particolare, prendiamo $x = x_2$ nella prima disuguaglianza, $x = x_1$ nella seconda, e sommiamo: si ottiene

$$(f'(x_1) - f'(x_2)) \cdot (x_2 - x_1) \leq 0,$$

che è proprio la crescita della funzione derivata.

Viceversa, supponiamo che la funzione f' sia crescente e prendiamo $x_0 \in [a, b]$. Consideriamo la funzione derivabile $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$. Si ha $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, per cui g' è una funzione crescente che è negativa per $x < x_0$, mentre è positiva per $x > x_0$. Ne deduciamo che la funzione g ha un *minimo assoluto* per $x = x_0$: essa è infatti *decreciente* nell'intervallo a sinistra di x_0 , *crescente* nell'intervallo a destra di x_0 ¹⁰. Poichè $g(x_0) \geq 0$, abbiamo $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$: questa è proprio la disuguaglianza di convessità!

Q.E.D.

¹⁰Abbiamo usato ancora una volta il fatto che una funzione derivabile è crescente su un intervallo se e solo se la sua derivata è non negativa.

Grazie a questo teorema, abbiamo un comodo criterio di convessità per funzioni la cui derivata sia ancora derivabile (ossia per funzioni derivabili due volte): una funzione f derivabile due volte in un intervallo sarà *convessa* se $f''(x) \geq 0$ per ogni x nell'intervallo, sarà invece *concava* se $f''(x) \leq 0$ in ogni punto x dell'intervallo.

Passiamo ora ad esaminare con le dovute cautele un fatto che abbiamo usato sinora con indebita disinvoltura. Infatti, abbiamo osservato che siccome la derivata corrisponde geometricamente alla “pendenza del grafico”, se una funzione ha derivata positiva in un intervallo, essa sarà crescente in esso.

Questo fatto è intuitivamente molto plausibile, perché non si vede come una funzione possa avere il grafico “in salita” in tutti i punti di un intervallo senza essere anche crescente! D'altra parte, non ne abbiamo vista alcuna dimostrazione rigorosa: tale dimostrazione è lo scopo dei discorsi che seguono.

Per apprezzare maggiormente la portata del teorema che afferma la crescita di una funzione con derivata positiva in un intervallo, vale la pena di vedere un paio di esempi “patologici” ...che sottolineano quanto la derivata sia un oggetto intrinsecamente *locale*: avere un teorema che consente di ottenere informazioni globali dalla derivata è quindi particolarmente interessante!

ESEMPIO: Una funzione può essere derivabile (e quindi continua) in un punto, ma essere discontinua in *tutti* gli altri punti del suo dominio. Inoltre, la sua derivata in quell'unico punto di derivabilità può essere positiva, senza che la funzione sia crescente in nessun intorno di esso.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \\ x & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Grazie alla densità di razionali e di irrazionali in \mathbf{R} , si vede subito che questa funzione è discontinua per ogni $x \neq 0$. D'altra parte, essa è derivabile in 0 con derivata 1 (si usi la definizione di derivata).

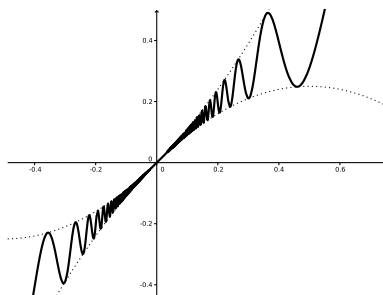
Questa funzione ha ovviamente la proprietà di avere derivata strettamente positiva in 0, ma di non essere crescente in alcun intorno di 0.

In realtà, questo esempio non dipende dal fatto che la derivata esiste solo in un punto: vedremo che lo stesso fenomeno è possibile anche per funzioni derivabili *ovunque*!

ESEMPIO: Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin(1/x^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Calcolando esplicitamente la derivata per $x \neq 0$, abbiamo verificato che questa cambia di segno infinite volte in un intorno di 0: non esiste alcun intorno di 0 in cui la funzione è crescente o decrescente. D'altra parte, un calcolo diretto usando la definizione di derivata mostra che f è derivabile in 0 con $f'(0) = 1$.



Dunque, dal fatto che la derivata sia strettamente positiva *in un punto* non possiamo dedurre che la funzione è crescente in un intorno di quel punto!

Si noti però che l'esempio funziona perché la derivata di f è discontinua in 0: se la derivata fosse continua, dovrebbe essere positiva in un intervallino centrato in 0 e la funzione sarebbe crescente in tale intervallo.

11 Lezione del 30/10/2024 (3 ore)

Torniamo dunque al nostro risultato teorico sulla crescita di una funzione con derivata positiva su un intervallo! Cominciamo col ricordare la seguente definizione:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Un punto $x_0 \in [a, b]$ si dice di *massimo relativo* (risp., di *minimo relativo*) per f se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ (risp., $f(x) \geq f(x_0)$) per ogni $x \in I_{x_0} \cap [a, b]$.

Veniamo ad un primo, semplice risultato: se una funzione è derivabile in un punto di *massimo o minimo relativo interno* all'intervallo di definizione, in quel punto la derivata si deve annullare:

TEOREMA (Principio di Fermat): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in (a, b)$ un punto di *massimo o minimo relativo* per f . Se f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

Prima della dimostrazione notiamo che questo risultato può essere falso per punti di massimo o minimo relativo che siano *agli estremi* dell'intervallo su cui f è definita. Per esempio, si consideri la funzione $f(x) = x$ sull'intervallo $[0, 1]$...

DIM.: Supponiamo per fissare le idee che x_0 sia di minimo relativo.

Consideriamo il rapporto incrementale per f in x_0 :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se prendiamo h abbastanza piccolo, in modo che $x_0 + h$ appartenga all'intorno I_{x_0} nella definizione di minimo relativo, vediamo subito che il numeratore è maggiore o uguale a 0. Ne consegue che il rapporto incrementale sarà positivo (o nullo) per $h > 0$ abbastanza piccolo, e negativo (o nullo) per $h < 0$ abbastanza piccolo in modulo. Ne segue che

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

e contemporaneamente

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Dunque, $f'(x_0) = 0$, Q.E.D.

Due conseguenze del principio di Fermat sono i teoremi di Rolle e di Lagrange, che sono tra i risultati più importanti del calcolo differenziale per funzioni di una variabile. Enunciamo il primo:

TEOREMA (di Rolle): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua, derivabile nell'intervallo (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Grazie al teorema di Weierstrass, la funzione possiede un punto di massimo assoluto x_M , e uno di minimo assoluto x_m .

Se uno di questi punti appartiene all'interno dell'intervallo, esso è anche di massimo o minimo relativo, e per il principio di Fermat la derivata si deve annullare in quel punto (che sarà dunque il punto c cercato).

In caso contrario, x_m e x_M coincidono con gli estremi a e b dell'intervallo. Allora, per ogni $x \in [a, b]$ si ha

$$f(a) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(b) = f(a),$$

per cui il massimo e il minimo di f coincidono. Ne segue che f è costante, e la sua derivata si annulla in *tutti* i punti dell'intervallo. Q.E.D.

Domani dimostreremo il seguente, fondamentale teorema e il suo ancor più importante corollario:

TEOREMA (di Lagrange): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua, derivabile nell'intervallo (a, b) . Esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

COROLLARIO: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, allora f è crescente in $[a, b]$.

Se f' è invece minore o uguale a 0, la funzione è decrescente in $[a, b]$. Infine, se $f' = 0$ in tutto l'intervallo, la funzione è costante.

DIM.: Consideriamo la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Questa è una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Inoltre $g(a) = f(a) = g(b)$, per cui possiamo applicare il teorema di Rolle e ottenere un punto $c \in (a, b)$ tale che $g'(c) = 0$. Questo è proprio il punto cercato. Q.E.D.

A lezione, abbiamo visto che le ipotesi dei teoremi di Rolle e Lagrange non possono essere in generale indebolite, e abbiamo discusso il significato geometrico di questi risultati.

Quel che è più importante, è comunque il corollario del teorema di Lagrange che assicura la crescita di una funzione con derivata positiva su un intervallo, da noi già ampiamente utilizzato. Dimostriamolo!

Dim. del corollario del teorema di Lagrange: Facciamo vedere per esempio che vale la prima delle nostre affermazioni: supponiamo che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Siano poi x_1 e x_2 due punti di $[a, b]$, con $x_1 < x_2$. Appliciamo il teorema di Lagrange a f sull'intervallo $[x_1, x_2]$: troviamo $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c).$$

Per l'ipotesi sulla derivata, il membro di destra è maggiore o uguale a zero. Q.E.D.

Vedremo in una prossima lezione il teorema di Cauchy, che è un'ulteriore generalizzazione del Teorema di Lagrange. Grazie ad esso si può dimostrare il teorema di l'Hôpital, che è utilissimo per il calcolo del limite di forme indeterminate. Per motivi di tempo, ne diamo solo l'enunciato!

Esso è applicabile a limiti di rapporti nella forma $0/0$ o ∞/∞ :

TEOREMA (l'Hôpital): Siano f, g funzioni derivabili in un intorno di x_0 , tranne eventualmente in x_0 (dove possono anche non essere definite). Supponiamo inoltre che $g'(x) \neq 0$ in tale intorno (eventualmente bucato) e che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Se esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

e questi due limiti sono uguali. L'enunciato del teorema rimane vero anche se $x_0 = \pm\infty$ e per limiti destri/sinistri (con le ovvie modifiche delle ipotesi).

A lezione, abbiamo visto un esempio di applicazione di questo teorema. Attenzione: il limite del rapporto $f(x)/g(x)$ (in una delle due forme interminate suddette) può benissimo esistere anche se non esiste il limite del rapporto delle derivate. Ad esempio, si prenda $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, $g(x) = x$ con $x_0 = 0$: il rapporto si presenta nella forma $0/0$ e tende a 0, ma non esiste il limite del rapporto delle derivate.

Come già detto, non vedremo la dimostrazione del teorema.

Ci occuperemo ora del problema di approssimare una funzione regolare, in un intorno di un punto, mediante polinomi.

Supponiamo di avere una funzione f derivabile in x_0 : se ci chiedessero qual è la retta che meglio approssima il grafico di f vicino a x_0 , probabilmente risponderemmo tutti che è la retta tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$: la cosa è ancora più plausibile se facciamo un disegno!

Vediamo però di precisare meglio (in maniera quantitativa) in che senso la retta tangente è quella che approssima meglio f in un intorno di x_0 : se $g(x) = ax + b$ è un polinomio di primo grado che approssima f , possiamo scrivere che $f(x) = g(x) + R(x)$, dove $R(x)$ è un "resto" che vogliamo sia il più piccolo possibile quando x si avvicina a x_0 .

Siccome $R(x) = f(x) - a(x - x_0) - b$, notiamo subito che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0 \iff b = f(x_0).$$

In questo senso, tutte le rette che passano per il punto $(x_0, f(x_0))$ "approssimano f ", nel senso che il resto tende a zero quando x si avvicina a x_0 ! Perché, dunque, la retta tangente è meglio delle altre?

Perché è l'unica per cui il resto tende a zero più rapidamente di $x - x_0$, cioè è l'unica per cui si abbia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Infatti, siccome abbiamo già osservato che deve essere $b = f(x_0)$, la quantità di cui dobbiamo fare il limite diventa:

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \rightarrow f'(x_0) - a.$$

Dunque, il limite è zero se $a = f'(x_0)$, mentre è non nullo in tutti gli altri casi.

Concludiamo dunque che la retta tangente è la retta di migliore approssimazione intorno a x_0 , nel senso che è quella per cui *il resto tende a 0 più rapidamente quando $x \rightarrow x_0$* !

Con il linguaggio degli o -piccoli che avete visto a esercitazione, possiamo riformulare il nostro risultato nel modo seguente: se per $x \rightarrow x_0$ si ha

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0),$$

allora necessariamente f è derivabile in x_0 e $m = f'(x_0)$.

12 Lezione del 4/11/2024 (3 ore)

Nel tentativo di generalizzare quanto appena scoperto, diventa naturale chiedersi qual è il polinomio di grado n che meglio approssima una certa funzione f (che supporremo derivabile quante volte si vuole) in un intorno di x_0 . Ci viene il sospetto che sia un polinomio simile alla retta tangente, nel senso che le sue derivate fino alla n -esima nel punto x_0 dovranno coincidere con quelle di f ...

Per semplificarci la vita, supponiamo che sia $x_0 = 0$: ci si può sempre ridurre a questa situazione con una traslazione lungo l'asse delle x .

Il *polinomio di Taylor di grado n per f centrato in 0* è definito da

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

(Si noti che, ironia della sorte, il polinomio di Taylor “di grado n ” ha in realtà grado *minore o uguale a n* ...)

LEMMA 1: Sia f una funzione derivabile n volte in 0. Tra tutti i polinomi $P(x)$ di grado minore o uguale a n , il polinomio di Taylor $P_n(x)$ è l'unico tale che $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$, ..., $P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$.

DIM.: A meno di una traslazione, ci riduciamo al caso $x_0 = 0$. Il generico polinomio di grado minore o uguale a n sarà della forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Ora, derivando h volte il monomio x^k si ottiene $k(k-1)\dots(k-h+1)x^{k-h}$ se $h < k$, $k!$ per $h = k$, mentre si ottiene 0 per $h > k$. Tale funzione è sempre nulla in 0, tranne che nell'unico caso in cui $h = k$, in cui vale $k!$.

Dunque, sostituendo nelle relazioni che abbiamo si ottiene $P(0) = a_0 = f(0)$, $P'(0) = a_1 = f'(0)$, $P''(0) = 2a_2 = f''(0)$, e in generale (per $k \leq n$) $P^{(k)}(0) = k!a_k = f^{(k)}(0)$. Di conseguenza, i coefficienti del polinomio devono essere proprio quelli che abbiamo attribuito al polinomio di Taylor di grado n . Q.E.D.

Il Polinomio di Taylor, tra tutti i possibili polinomi $P(x)$ di grado $\leq n$, è quello per cui l'errore $R(x) = f(x) - P(x)$ che si commette sostituendo $P(x)$ a $f(x)$ tende a 0 più velocemente per $x \rightarrow 0$.

TEOREMA (Di Taylor con resto di Peano): Sia f una funzione derivabile $n - 1$ volte in un intorno di 0 con derivata n -esima in 0. Se $P_n(x)$ denota il polinomio di Taylor di grado n centrato in 0, allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = 0.$$

Tra tutti i polinomi di grado minore o uguale a n , il polinomio di Taylor è l'unico ad avere questa proprietà.

Proseguiamo la nostra discussione sull'approssimazione di funzioni mediante polinomi. Ci servirà il seguente lemma:

LEMMA 2: Sia $g(x)$ una funzione derivabile $n - 1$ volte in un intorno di 0, con derivata n -esima in 0. Se $g(0) = g'(0) = g''(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0$, allora abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0.$$

DIM.: Basta applicare $n - 1$ volte il teorema di L'Hôpital (grazie alle nostre ipotesi, ad ogni passo abbiamo una forma indeterminata $0/0$) ed infine la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{nx^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!x} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(0)}{x} &= \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Se g è come nel lemma, ma qualcuna delle derivate di ordine minore o uguale a n è diversa da 0, il limite *non può* essere 0: rifacendo lo stesso calcolo, si trova che è infinito, oppure è un numero diverso da zero.

Come corollario, otteniamo una prima forma del Teorema di Taylor:

TEOREMA (Di Taylor con resto di Peano): Sia f una funzione derivabile $n - 1$ volte in un intorno di 0 con derivata n -esima in 0 . Se $P_n(x)$ denota il polinomio di Taylor di grado n centrato in 0 , allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = 0.$$

Tra tutti i polinomi di grado minore o uguale a n , il polinomio di Taylor è l'unico ad avere questa proprietà.

DIM.: Grazie al Lemma 1, la funzione $g(x) = f(x) - P_n(x)$ soddisfa le ipotesi del Lemma 2, e il teorema risulta dimostrato. L'unicità del polinomio di Taylor rispetto a questa proprietà segue dall'Osservazione fatta dopo la dimostrazione del Lemma 2. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Se al posto di 0 prendiamo un generico punto x_0 , il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 sarà

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

In questo caso, il teorema di Taylor dice che se f è derivabile $(n - 1)$ volte in un intorno di x_0 , e possiede derivata n -esima in x_0 , allora

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \text{ con } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Applichiamo ora la formula di Taylor con resto di Peano allo studio dei massimi e dei minimi relativi di una funzione. L'idea è che spesso, per capire se un punto in cui la derivata prima si annulla è di massimo o minimo relativo, basta studiare il segno della derivata seconda:

TEOREMA: Sia f una funzione derivabile k volte in x_0 ($k \geq 2$), e supponiamo che le prime $k - 1$ derivate esistano in un intorno di x_0 . Supponiamo anche che $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, mentre $f^{(h)}(x_0) = 0$ per $h = 1, \dots, k - 1$ (in altre parole, la prima derivata che non si annulla è la k -esima).

Allora

- se k è dispari, x_0 non è né di massimo relativo né di minimo relativo;
- se k è pari e $f^{(k)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo;
- se k è pari e $f^{(k)}(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.

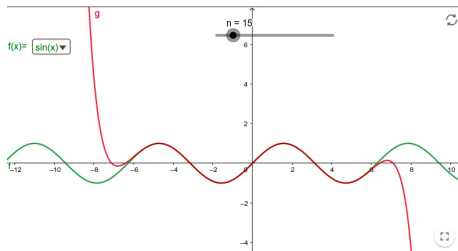
DIM.: Si tratta di studiare il segno della funzione $f(x) - f(x_0)$ quando x varia in un intorno sufficientemente piccolo di x_0 : se tale funzione è positiva siamo in presenza di un punto di minimo relativo, se è negativa di un massimo (mentre se essa cambia di segno in ogni intorno, comunque piccolo, di x_0 , il punto non è né di massimo né di minimo).

Se prendiamo x abbastanza vicino a x_0 in modo che valgano le ipotesi del teorema di Taylor, otteniamo

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_k(x) = \left[\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{R_k(x)}{(x - x_0)^k} \right] (x - x_0)^k.$$

Siccome $R_k(x)/(x - x_0)^k \rightarrow 0$, la quantità tra parentesi quadre tende a $f^{(k)}(x_0)/k!$ per $x \rightarrow x_0$. Di conseguenza, essa avrà lo stesso segno di $f^{(k)}(x_0)$ quando x varia in un intorno sufficientemente piccolo di x_0 . Poiché è invece chiaro che il polinomio $(x - x_0)^k$ è sempre positivo per k pari, mentre cambia di segno per k dispari (a seconda che x stia a destra o a sinistra di x_0), la tesi segue immediatamente. Q.E.D.

Abbiamo visto che tali polinomi di Taylor approssimano molto bene la rispettiva funzione anche in punti abbastanza lontani da 0, a patto di prendere un grado abbastanza alto:



Per dimostrare e rendere quantitativo questo fatto, abbiamo enunciato il Teorema di Taylor con resto di Lagrange, di cui vedremo domani la dimostrazione:

TEOREMA (Formula di Taylor con resto di Lagrange): Sia f una funzione derivabile $(n + 1)$ volte in un intervallo centrato in x_0 , e sia x un punto appartenente a tale intervallo. Allora esiste un punto c , compreso tra x_0 e x , tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

dove

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

è il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 .

Per la dimostrazione ci serve una versione leggermente più generale del teorema di Lagrange:

TEOREMA (di Cauchy): Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni continue, derivabili in (a, b) . Supponiamo poi che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

DIM.: Si noti che risulta $g(b) \neq g(a)$ (altrimenti otterremo un assurdo col teorema di Rolle): di conseguenza, il denominatore del secondo membro nella tesi non si annulla, e il teorema ha perfettamente senso.

Per dimostrarlo, basta applicare il teorema di Rolle alla funzione ausiliaria $h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$. Q.E.D.

Il teorema di Cauchy permette di dimostrare la regola di l'Hôpital (ma non lo faremo...), ed anche di dimostrare una variante particolarmente utile del teorema di Taylor.

Il prossimo teorema esprime appunto in modo molto preciso il resto che si ha nella formula di Taylor: questo permette di valutare l'errore che si commette, in un fissato punto $x \neq x_0$, sostituendo a $f(x)$ il valore del suo polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 .

TEOREMA (Formula di Taylor con resto di Lagrange): Sia f una funzione derivabile $(n + 1)$ volte in un intervallo centrato in x_0 , e sia x un punto appartenente a tale intervallo. Allora esiste un punto c , compreso tra x_0 e x , tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

dove

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

è il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 .

Vedremo la dimostrazione nella prossima lezione.

13 Lezione del 5/11/2024 (3 ore)

Dimostriamo ora il teorema di Taylor con resto di Lagrange (enunciato nella lezione precedente).

Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - P_n(x)$ (cioè il resto n -esimo).

Abbiamo visto la volta scorsa che essa ha la fondamentale proprietà di avere $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$. Inoltre, $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ perché la derivata $(n+1)$ -esima del polinomio P_n si annulla identicamente.

L'idea è ora di applicare $(n+1)$ volte il teorema di Cauchy, a partire dal rapporto

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g(x) - g(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0-x_0)^{n+1}}.$$

Infatti, il teorema di Cauchy applicato a tale espressione ci garantisce l'esistenza di un punto c_1 compreso tra x_0 e x , tale che l'espressione stessa è uguale a

$$\frac{g'(c_1)}{(n+1)(c_1-x_0)^n}.$$

L'ultima quantità può essere anche riscritta

$$\frac{g'(c_1) - g'(x_0)}{(n+1)(c_1-x_0)^n - (n+1)(x_0-x_0)^n},$$

e possiamo riapplicare il teorema di Cauchy... Ripetendo questo passaggio per $(n+1)$ volte troviamo:

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \dots = \frac{g^{(n)}(c_n) - g^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(c_n-x_0)} = \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

dove c_1, \dots, c_n, c sono opportuni punti compresi tra x_0 e x . Q.E.D.

ESERCIZIO: Supponiamo che una funzione f soddisfi le ipotesi del teorema appena dimostrato, e che inoltre la derivata $f^{(n+1)}$ sia continua in x_0 . Mostrare che allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0.$$

(In buona sostanza, avremo ridimostrato il Teorema di Taylor con resto di Peano, anche se con ipotesi leggermente più forti perché chiediamo la continuità della derivata $(n+1)$ -esima...)

Mettiamo subito a frutto il teorema dimostrato, usandolo per approssimare alcune importanti funzioni con polinomi.

Cominciamo col prendere $f(x) = e^x$ ($e_{x_0} = 0$): la formula di Taylor con resto di Lagrange ci dice che esiste un punto c compreso tra 0 e x tale che

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Dimostriamo ora che il resto, qualunque sia $x \in \mathbf{R}$, tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Si noti che, anche se c dipende in generale sia da x che da n , la quantità e^c è maggiorata da $e^{|x|}$, per cui ci basterà far vedere che $x^{n+1}/(n+1)! \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Questo fatto, a sua volta, si dimostra immediatamente ricordando la stima

$$n! \geq \left(\frac{n}{3}\right)^n,$$

che abbiamo provato per induzione.

In conclusione, abbiamo fatto vedere che

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

L'ultimo limite si chiama *serie di Taylor di e^x* , e si denota usualmente con $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$:

In generale, si ha la seguente definizione di serie:

DEFINIZIONE: Se $\{a_k\}$ è una successione di numeri reali, col simbolo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (che si legge “*serie degli a_k* ”, si intende per definizione il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k,$$

a patto che tale limite esista. Se il limite è finito, si dice che la serie *converge*, se è infinito che *diverge*, se infine non esiste si dice che la serie è *indeterminata*.

Come ulteriore applicazione del teorema di Taylor con resto di Lagrange, dimostriamo che *il numero di Nepero e è irrazionale*.

Supponiamo infatti per assurdo che si abbia $e = p/q$, con p e q numeri naturali. Appliciamo il teorema di Taylor con resto di Lagrange alla funzione esponenziale, con $x_0 = 0$ e $x = 1$: per ogni $n \in \mathbf{N}$ troviamo un punto $c \in (0, 1)$ tale che

$$e = \frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + e^c \frac{1}{n+1!}.$$

Prendiamo $n > q$, e moltiplichiamo ambo i membri dell'identità per $n!$. Otteniamo:

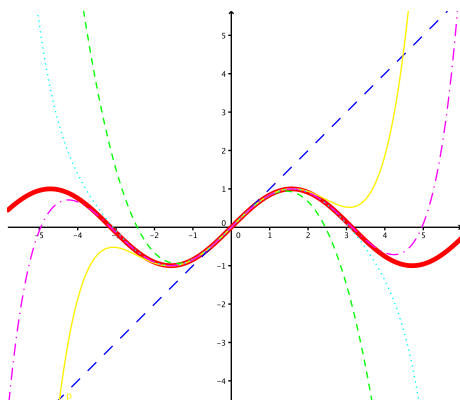
$$\frac{p}{q} n! = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \cdot n! + \frac{e^c}{n+1}.$$

Il membro di sinistra dell'uguaglianza è evidentemente un intero, così come il primo pezzo del membro di destra (la quantità tra parentesi tonde moltiplicata per $n!$). Invece, l'ultimo termine è non nullo e si avvicina a $e/(n+1)$ (perché $c < 1$), e quest'ultima quantità è strettamente minore di 1 per n abbastanza grande: questo è evidentemente assurdo (un intero non può essere uguale ad un intero più una quantità minore di 1).

Con lo stesso tipo di conti, abbiamo poi verificato che si ha anche

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$. Nella figura, tanto per rendere visivamente la cosa, abbiamo disegnato i primi polinomi di Taylor della funzione seno:



Ricordiamo poi la formula per la somma di una progressione geometrica:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1.$$

La si può dimostrare facilmente per induzione oppure moltiplicando ambo i membri per $1 - x$.

Cerchiamo poi di determinare un'altra serie di Taylor interessante in modo un po' bizzarro. Precisamente, studiamo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Per definizione di serie, abbiamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1, \\ +\infty & \text{se } x \geq 1, \\ \cancel{A} & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

dove abbiamo usato la formula per la somma di una progressione geometrica.

In conclusione, per $-1 < x < 1$ si ha

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

mentre al di fuori di questo intervallo la serie non converge ad un limite finito (o non converge affatto).

Ora, non è affatto difficile verificare che questa è proprio la serie di Taylor (centrata in 0) della funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$: infatti abbiamo $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, da cui $f^{(k)}(0) = k! \dots$. Oppure, basta osservare che $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ è il polinomio di Taylor di grado n di $1/(1-x)$ perché soddisfa il Teorema di Taylor con resto di Peano (conto immediato!).

Questo è un esempio di funzione la cui serie di Taylor centrata in zero converge alla funzione stessa su un intervallo centrato nell'origine, ma non sull'intera retta reale.

Sostituendo x con $-x$ nella serie precedente si ottiene

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad -1 < x < 1.$$

Grazie a quest'ultima formula (e per ora in modo per nulla rigoroso: formalizzeremo in seguito!) abbiamo dedotto le serie di Taylor di logaritmo e arcotangente:

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \\ \arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

La prima di queste due serie converge per $-1 < x \leq 1$, la seconda per $-1 \leq x \leq 1$.

Abbiamo concluso la lezione facendo vedere come si può applicare il teorema di Taylor con resto di Peano al calcolo di limiti di forme indeterminate.

A questo proposito, torna comoda la definizione di “o piccolo”:

DEFINIZIONE: Date due funzioni f, g definite in un intorno di x_0 , diremo che f è un “o piccolo” di g per $x \rightarrow x_0$, e scriveremo $f(x) = o(g(x))$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

cioè se $f(x)$ tende a zero più rapidamente di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Con il linguaggio degli “o piccoli”, il teorema di Taylor con resto di Peano dice che $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$...

Usando i polinomi di Taylor della funzione seno, sappiamo che $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$: questo ci permette ad esempio di calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)}{x^3} = -1/6. \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{(1 - \cos x)^2} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4))^2 - x^2}{(1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5) - x^2}{\frac{x^4}{4} + o(x^4)} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^4 + o(x^5)}{\frac{x^4}{4} + o(x^4)} &= -4/3 \end{aligned}$$

Abbiamo visto anche che un polinomio di Taylor di grado troppo basso non avrebbe permesso di calcolare questi stessi limiti: è vero che sarebbe perfettamente corretto scrivere $\sin x = x + o(x^2)$, ma sostituendo nei limiti precedenti otteniamo espressioni del tipo $o(x^2)/x^3$ su cui non abbiamo informazioni sufficienti per determinare quale sia il limite!

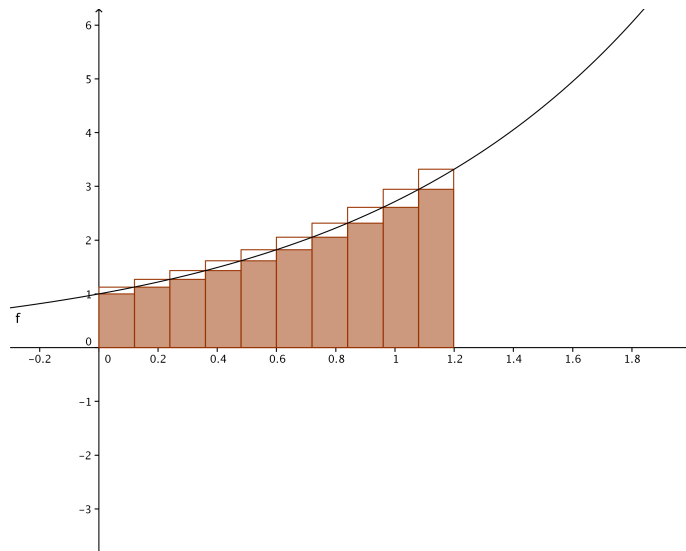
14 Lezione del 12/11/2024 (3 ore)

Conclusi per ora i nostri discorsetti sulla formula di Taylor, cominceremo a studiare una definizione rigorosa di area per certe figure piane delimitate da un contorno curvilineo. Questo ci porterà a dare la definizione di integrale nel senso di Riemann per una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$.

Partiamo da un esempio concreto: supponiamo di voler dare un senso all'area della regione limitata del piano delimitata dall'asse delle x , dal grafico della funzione $f(x) = e^x$, dall'asse delle y e dalla retta $x = a$: si tratta di una specie di trapezio rettangolo, solo che il lato obliquo è curvo (è infatti il grafico della funzione e^x).

Un'idea potrebbe essere la seguente: dividiamo l'intervallo $[0, a]$ in n intervallini uguali (che avranno quindi estremi $0, a/n, 2a/n, 3a/n, \dots, a$). Per ciascuno di questi intervallini, costruiamo un rettangolo che ha l'intervallino stesso come base, e altezza uguale al valore della funzione esponenziale

nell'estremo di sinistra: in altre parole, sull'intervallo $[ka/n, (k+1)a/n]$ costruiamo un rettangolo di altezza $e^{ka/n}$.



In questo modo otteniamo una figura “a scala” che è tutta *contenuta* nella figura curvilinea di cui vogliamo calcolare l’area: l’area di questa scala inscritta si calcola subito, e vale

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} e^{ka/n} = \frac{a}{n} \cdot \frac{e^a - 1}{e^{a/n} - 1}.$$

L’ultima espressione, per $n \rightarrow +\infty$, tende al numero $(e^a - 1)$, che rappresenta quindi il limite delle nostre approssimazioni per difetto.

In maniera analoga, possiamo costruire una “scala circoscritta” alla regione che ci interessa, prendendo su ciascun intervallo $[ka/n, (k+1)a/n]$ un rettangolo di altezza $e^{(k+1)a/n}$. In tal caso, l’area della scalinata sarà

$$e^{a/n} \frac{a}{n} \cdot \frac{e^a - 1}{e^{a/n} - 1},$$

che tende ancora al limite $e^a - 1$. Possiamo dunque legittimamente affermare che l’area del trapezoide curvilineo sotto la funzione esponenziale tra 0 e a , vale esattamente $e^a - 1$: tale numero si chiama *integrale* della funzione esponenziale tra 0 e a , e si indica

$$\int_0^a e^x dx = e^a - 1.$$

Vediamo ora come l’idea soggiacente a questo conticino con la funzione esponenziale sia estendibile ad un gran numero di funzioni!

DEFINIZIONE: Una funzione $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ si dice *a scala* se esiste una suddivisione di $[a, b]$ in un numero finito di intervallini di estremi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$, in modo tale che ϕ assuma valore costante c_i su ciascun intervallino (x_i, x_{i+1}) (per $i = 0, \dots, N - 1$).

L'*integrale* della suddetta funzione a scala si definisce come

$$\int_a^b \phi(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) c_i.$$

Come si vede, una funzione a scala è caratterizzata dal fatto che il suo grafico è un *istogramma*. Si noti che se ϕ è positiva, l'integrale della funzione a scala è semplicemente l'area dell'unione finita di rettangoli delimitata dal grafico di ϕ , l'asse delle x e le rette verticali $x = a$ e $x = b$. Se ϕ ha anche tratti negativi, l'unica differenza è che gli scalini con "altezza negativa" si contano con "area negativa".

Le funzioni a scala ed il loro integrale godono delle seguenti proprietà, la cui dimostrazione è lasciata alla riflessione del lettore:

LEMMA: Se ϕ_1 e ϕ_2 sono funzioni a scala su $[a, b]$, e $c \in \mathbf{R}$, allora

- $c\phi_1$ e $\phi_1 + \phi_2$ sono funzioni a scala;
- l'integrale è lineare:

$$\begin{aligned} \int_a^b (c\phi_1(x)) dx &= c \int_a^b \phi_1(x) dx \\ \int_a^b (\phi_1(x) + \phi_2(x)) dx &= \int_a^b \phi_1(x) dx + \int_a^b \phi_2(x) dx; \end{aligned}$$

- l'integrale è monotono: se $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b \phi_1(x) dx \leq \int_a^b \phi_2(x) dx.$$

Siamo ora in grado di definire l'integrale superiore, l'integrale inferiore ed eventualmente l'integrale di una funzione limitata:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione limitata. L'*integrale superiore* di f si definisce come

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x) dx : \phi \text{ a scala, } \phi \geq f \text{ in } [a, b] \right\}.$$

Analogamente, l'integrale inferiore di f si definisce come

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\left\{\int_a^b \psi(x) dx : \psi \text{ a scala, } \psi \leq f \text{ in } [a, b]\right\}.$$

Se l'integrale superiore e l'integrale inferiore coincidono, diremo che la funzione f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, ed indicheremo il valore comune dei due integrali con

$$\int_a^b f(x) dx,$$

integrale secondo Riemann di f su $[a, b]$.

Vale una semplice caratterizzazione dell'integrale di Riemann, che permette tra l'altro di verificare la correttezza di quanto trovato sopra per l'integrale della funzione esponenziale:

PROPOSIZIONE: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione limitata. f è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ si possono trovare due funzioni a scala ϕ, ψ con $\psi \leq f \leq \phi$ in $[a, b]$ tali che

$$\int_a^b \phi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx < \varepsilon.$$

DIM. della caratterizzazione delle funzioni integrabili:

Dimostriamo che se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono le due funzioni ϕ e ψ nell'enunciato, allora la funzione f è integrabile secondo Riemann.

Per definizione di integrale superiore e di integrale inferiore avremo

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi(x) dx &\geq \overline{\int_a^b f(x) dx}, \\ \int_a^b \psi(x) dx &\leq \underline{\int_a^b f(x) dx}, \end{aligned}$$

per cui

$$0 \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} \leq \int_a^b \phi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε , ne deriva che l'integrale superiore e l'integrale inferiore sono uguali.

Se viceversa f è integrabile, per definizione di integrale superiore e di integrale inferiore possiamo trovare due funzioni a scala ϕ e ψ , la prima maggiore o uguale e la seconda minore o uguale a f , tali che

$$\int_a^b \phi(x) dx < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon/2,$$

$$\int_a^b \psi(x) dx > \int_a^b f(x) dx - \varepsilon/2,$$

da cui

$$\int_a^b \phi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx < \varepsilon.$$

Q.E.D.

Vediamo un esempio di funzione *non integrabile* secondo Riemann:

ESEMPIO (Funzione di Dirichlet): Si consideri la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Abbiamo già incontrato questa funzione, ed abbiamo osservato che essa è ovunque discontinua. Attualmente, invece, ci preme di osservare che *una funzione a scala maggiore o uguale a f sarà ovunque maggiore o uguale a 1*, e che *una funzione a scala minore o uguale a f è ovunque minore o uguale a 0*. Questo segue dalla densità dei razionali e degli irrazionali: in ogni “scalino” di qualunque funzione a scala, esistono sia punti razionali in cui la funzione vale 1, che punti irrazionali in cui essa vale 0.

Se ne deduce che

$$\overline{\int_0^1} f(x) dx = 1, \quad \underline{\int_0^1} f(x) dx = 0,$$

e la funzione non è integrabile secondo Riemann.

Vedremo però tra breve che le funzioni abbastanza decenti, come le funzioni monotone e le funzioni continue, sono integrabili secondo Riemann!

Passiamo a verificare che l'integrale gode delle stesse proprietà di linearità dell'integrale delle funzioni a scala:

PROPOSIZIONE: Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni integrabili secondo Riemann, $c \in \mathbf{R}$. Allora le funzioni $c \cdot f$ e $f + g$ sono integrabili secondo

Riemann e si ha

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

DIM.: Supponiamo dapprima $c > 0$. L'integrabilità della funzione $c \cdot f$ (e la prima delle due identità nella tesi) segue subito se si osserva che l'insieme delle funzioni a scala maggiori o uguali a $c \cdot f$ coincide con l'insieme delle funzioni a scala maggiori o uguali a f moltiplicate per c . Poiché per le funzioni a scala è lecito "portare la costante c fuori dal segno di integrale" (si veda il lemma enunciato la volta scorsa), ne deduciamo che

$$\overline{\int_a^b c \cdot f(x) dx} = c \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Un'identità del tutto analoga vale per l'integrale inferiore, da cui la tesi.

Se invece $c < 0$ (il caso $c = 0$ è ovvio!), l'unico cambiamento da fare viene dal fatto che una funzione a scala maggiorante per f moltiplicata per c , darà una funzione a scala minorante per $c \cdot f$.

Ci rimane da dimostrare l'integrabilità della somma di due funzioni integrabili: osserviamo che

$$\{\Phi : \Phi \text{ a scala, } \Phi \geq f + g\} \supset \{\phi_1 + \phi_2 : \phi_1, \phi_2 \text{ a scala, } \phi_1 \geq f, \phi_2 \geq g\},$$

da cui, ricordando la definizione di integrale superiore:

$$\overline{\int_a^b [f(x) + g(x)] dx} \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} + \overline{\int_a^b g(x) dx}.$$

(A lezione abbiamo visto un esempio che mostra come, se togliamo l'ipotesi che f e g siano integrabili, possa anche succedere che valga la disuguaglianza stretta).

Analogamente, per gli integrali inferiori si ottiene

$$\underline{\int_a^b [f(x) + g(x)] dx} \geq \underline{\int_a^b f(x) dx} + \underline{\int_a^b g(x) dx}.$$

Mettendo assieme le due disuguaglianze e ricordando l'integrabilità di f e g otteniamo

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq \underline{\int_a^b [f(x) + g(x)] dx} \leq \overline{\int_a^b [f(x) + g(x)] dx} \leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

da cui la tesi. Q.E.D.

A questo punto, diventa importante far vedere che tutte le funzioni “abbastanza decenti” sono integrabili. Per esempio, sono integrabili le funzioni monotone:

TEOREMA: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è crescente (decescente), allora è integrabile secondo Riemann.

DIM.: Per fissare le idee, trattiamo il caso in cui f sia crescente.

Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali (lunghe $(b-a)/n$), di estremi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Definiamo una funzione a scala maggiorante ϕ_n e una funzione a scala minorante ψ_n nel modo seguente: nell' i -esimo intervallino $[x_i, x_{i+1})$, poniamo ϕ_n uguale a $f(x_{i+1})$, e ψ_n uguale a $f(x_i)$.

Si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi_n(x) dx - \int_a^b \psi_n(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \\ \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] &= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)], \end{aligned}$$

e l'ultima quantità può essere resa piccola a piacere a patto di prendere n abbastanza grande. Q.E.D.

Verificare che sono integrabili anche le funzioni continue non sarà altrettanto facile...

15 Lezione del 13/11/2024 (3 ore)

TEOREMA (Integrabilità delle funzioni continue): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile secondo Riemann.

La dimostrazione di questo teorema è molto meno semplice di quella che abbiamo dato per le funzioni monotone: in effetti, abbiamo bisogno di un concetto nuovo, quello di *uniforme continuità*.

DEFINIZIONE: Una funzione f si dice *uniformemente continua* su un intervallo I se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in I$ con $|x - y| < \delta$, si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

In questa definizione chiediamo qualcosa di più della continuità in tutti i punti di I : stiamo infatti pretendendo che δ dipenda da ε , ma non dal punto in cui andiamo a valutare la continuità. Lo stesso δ deve funzionare in tutti i punti dell'intervallo I !

In effetti, se è vero che ogni funzione uniformemente continua in I è anche continua in I , il viceversa può essere falso: per esempio, la funzione $f(x) = x^2$ è continua in tutti i punti della retta reale, ma non è uniformemente continua su \mathbf{R} .

Se però consideriamo soltanto intervalli chiusi e limitati, i due concetti coincidono:

TEOREMA (di Heine-Cantor): Una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è anche uniformemente continua.

DIM. del teorema di Heine-Cantor: Ragioniamo per assurdo. Se f non fosse uniformemente continua, dovrebbe esistere $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistano $x, y \in [a, b]$ con $|x - y| < \delta$ e tali che $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$.

Poniamo $\delta = \frac{1}{n}$ (δ può essere scelto arbitrariamente...): per quanto appena visto possiamo trovare due punti $x_n, y_n \in [a, b]$ con $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

Ora, la successione $\{x_n\} \subset [a, b]$ è limitata, per cui possiamo estrarre una successione $\{x_{n_k}\}$ tale che esiste $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \bar{x}$. Evidentemente, visto che si ha $x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$ avremo anche $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = \bar{x}$.

Per la continuità di f in \bar{x} avremo allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(y_{n_k}) = f(\bar{x}),$$

e in particolare

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Questo è assurdo perché per costruzione la disuguaglianza $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ deve valere per ogni k . Q.E.D.

DIM. dell'integrabilità di $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continua:

Sia $\varepsilon > 0$. Per il teorema di Heine-Cantor, f è uniformemente continua su $[a, b]$, e possiamo trovare $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ quando $x, y \in [a, b]$ e $|x - y| < \delta$.

In particolare, se I è un qualunque sottointervallo chiuso di $[a, b]$ di lunghezza minore di δ , avremo

$$\max\{f(x) : x \in I\} - \min\{f(x) : x \in I\} \leq \varepsilon.$$

Scegliamo ora n abbastanza grande, in modo che $(b-a)/n < \delta$, e suddividiamo $[a, b]$ in n parti uguali tramite i punti $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Definiamo una funzione a scala maggiorante ϕ_n ed una minorante ψ_n nel modo seguente: sull' i -esimo intervallino $[x_i, x_{i+1})$, la funzione ϕ_n vale $M_i =$

$\max\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, mentre ψ_n vale $m_i = \min\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$. Per quanto visto sopra, sarà $M_i - m_i \leq \varepsilon$.

Abbiamo

$$\int_a^b \phi_n(x) dx - \int_a^b \psi_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} (M_i - m_i) \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} = \varepsilon(b-a),$$

e questa quantità può essere resa piccola a piacere. Q.E.D.

Per il calcolo effettivo degli integrali, lo strumento fondamentale risulta il seguente

TEOREMA (teorema fondamentale del calcolo integrale): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua, e definiamo la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Allora F è derivabile, e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Evidentemente, se siamo in grado di calcolare la funzione integrale $F(x)$ associata a f , siamo a maggior ragione in grado di calcolare l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ (che sarà uguale semplicemente a $F(b)$).

Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che la funzione integrale $F(x)$ è da cercarsi tra le funzioni la cui derivata è data da $f(x)$ (che si chiamano *primitive* di f). Si capisce quindi che se siamo in grado di trovare le primitive di una data funzione $f(x)$, saremo anche in condizione di trovare la funzione integrale ad essa associata.

Vediamo come applicare il teorema fondamentale per trovare gli integrali di funzioni note. La dimostrazione del teorema fondamentale, invece, la vedremo tra un po'.

DEFINIZIONE: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, una *primitiva* di f è una funzione $G : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che la funzione integrale è una primitiva dell'integranda. Ora, spesso è facile "indovinare" una primitiva di una funzione f (e vedremo presto delle tecniche per trovare in modo più sistematico le primitive di moltissime funzioni elementari). Se ci riusciamo, siamo anche in grado di calcolare l'integrale di f :

PROPOSIZIONE: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua, $G : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una qualunque primitiva di f . Allora

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

DIM.: Per il Teorema fondamentale, anche la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è una primitiva di f . Ne segue che la funzione $F(x) - G(x)$ ha derivata nulla in $[a, b]$, e quindi è costante: esiste $C \in \mathbf{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + C$$

per ogni $x \in [a, b]$. Siccome $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, ponendo $x = a$ nell'ultima identità troviamo $C = -G(a)$, da cui $F(x) = G(x) - G(a)$. In particolare, per $x = b$ si ha la tesi. Q.E.D.

Vediamo subito degli esempi di applicazione della formula fondamentale del calcolo integrale.

ESEMPI:

- Se $f(x) = e^x$, riconosciamo subito che una primitiva è data dalla funzione $G(x) = e^x$, e quindi

$$\int_0^a e^x dx = G(a) - G(0) = e^a - 1.$$

Abbiamo così rapidamente riottenuto un risultato che ci eravamo conquistati con una certa fatica a partire dalla definizione di integrale!

- Se $f(x) = mx$, si vede che una primitiva è $G(x) = mx^2/2$, quindi

$$\int_a^b mx dx = m(b^2 - a^2)/2.$$

Possiamo convincerci della veridicità di questa formula se osserviamo che geometricamente l'integrale appena calcolato rappresenta l'area di un trapezio rettangolo di altezza $(b - a)$ e basi ma e mb .

- Se $f(x) = \sin x$, una primitiva sarà $G(x) = -\cos x$. Quindi

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 2,$$

risultato che non sarebbe stato facile prevedere in altro modo!

Per dimostrare il teorema fondamentale ci servirà il seguente risultato:

TEOREMA (Della media integrale): Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. Esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

DIM.: Sia $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Per la monotonia dell'integrale, avremo $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$, per cui la quantità

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

(che è detta *media integrale*) è compresa tra m e M .

Per il teorema dei valori intermedi, f assume tutti i valori compresi tra m e M , e quindi anche il valore corrispondente alla media integrale! Q.E.D.

Una proprietà dell'integrale che ci sarà piuttosto utile, è l'additività rispetto all'intervallo di integrazione:

PROPOSIZIONE: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è integrabile, $c \in (a, b)$ si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Lasciamo per esercizio la facile dimostrazione.

È utile definire l'integrale anche su intervalli "orientati alla rovescia": se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è integrabile secondo Riemann, poniamo *per definizione*

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Con questa posizione, la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo vale *in generale*, anche se c non è compreso tra a e b (in tal caso, f dovrà essere integrabile sul più grande tra gli intervalli coinvolti...).

DIM. DEL TEOREMA FONDAMENTALE: Consideriamo il rapporto incrementale della funzione F nel punto x . Ricordando l'additività dell'integrale rispetto all'intervallo si ha:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Applicando il Teorema della media all'ultimo integrale troviamo un punto c compreso tra x e $x+h$ tale che

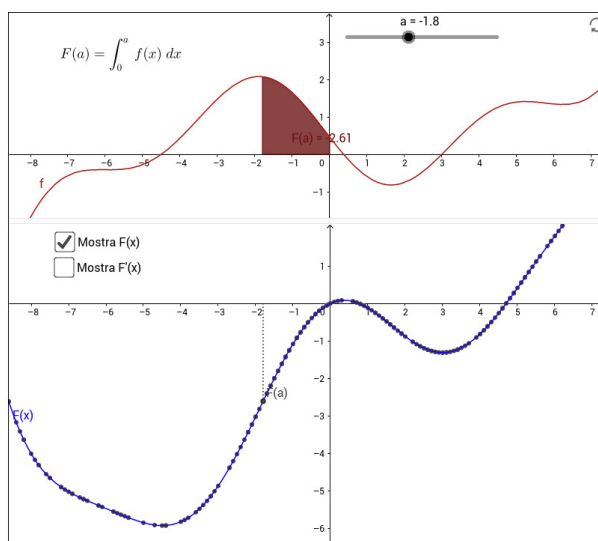
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c).$$

Passando al limite per $h \rightarrow 0$, avremo $c \rightarrow x$ e $f(c) \rightarrow f(x)$ (perché f è continua), da cui

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Q.E.D.

La seguente applet GeoGebra illustra il concetto di funzione integrale e l'enunciato del teorema fondamentale del calcolo: <https://www.geogebra.org/m/CgqEmGjX>



Cerchiamo ora di studiare una maniera un po' più sistematica per trovare le primitive di una data funzione elementare.¹¹

Conviene stabilire una notazione per l'insieme di tutte le primitive di una funzione f :

DEFINIZIONE: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua, l'insieme delle primitive $G : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ (cioè l'insieme delle funzioni derivabili la cui derivata è uguale ad f), si denota con il simbolo $\int f(x) dx$:

$$\int f(x) dx = \{G : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} : G'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]\}.$$

L'insieme delle primitive di f si chiama talvolta *integrale indefinito* di f .

Grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale e a quanto osservato la volta scorsa, sappiamo che la funzione integrale è una primitiva di f , e anche che due primitive diverse definite su uno stesso intervallo differiscono per una costante, dunque:

$$\int f(x) dx = \left\{ \int_a^x f(t) dt + C : C \in \mathbf{R} \right\}.$$

¹¹La parte che segue sarà corredata da numerosi esempi nelle esercitazioni. In particolare, a lezione non riusciremo a vedere tutti gli integrali che seguono.

Con lieve abuso di notazione, se G è una qualunque primitiva di f si scrive $\int f(x) dx = G(x) + C$, con C costante arbitraria.

Se prendiamo una tabella delle derivate delle funzioni elementari, e la leggiamo al contrario, troviamo la seguente tabella di integrali indefiniti “immediati”:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
x^a (con $a \neq -1$)	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$
$1/x$	$\log x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cotan x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

16 Lezione del 18/11/2024 (3 ore)

Nella prima metà della lezione abbiamo analizzato alcuni quiz a scelte multiple presenti su Moodle, in vista della prova intermedia del 4 dicembre prossimo.

Siamo poi tornati al calcolo di primitive: per integrare funzioni più complicate di quelle nella tabella delle primitive elementari, ci sono delle regole molto utili che vengono direttamente dalle regole di derivazione della somma e del prodotto:

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ (additività),
- $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$,
- $\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$ (formula di integrazione per parti).

Dalla formula per la derivata della funzione composta viene un’utile formula di *integrazione per sostituzione*: se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Se “cambiamo variabile” ponendo $y = g(x)$, l’identità appena scritta diventa $\int f(y) dy = \int f(g(x))g'(x) dx$. Questa formula può essere ricordata nel

seguinte modo, poco ortodosso ma efficace: usando la notazione di Leibniz per la derivata, abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(g(x))}{dx} = g'(x),$$

e moltiplicando ambo i membri per dx (cosa che *ovviamente* non ha alcun senso!) otteniamo l'identità $dy = d(g(x)) = g'(x) dx$, che sostituita nell'integrale $\int f(y) dy$ ci restituisce la formula voluta...

Evidentemente, abbiamo commesso più di un crimine matematico: la derivata NON è un rapporto, e il simbolo dx nell'integrale NON ha un significato matematico ben definito (se non quello di indicare la variabile indipendente rispetto alla quale si integra). D'altra parte, la notazione per la derivata e l'integrale si è rivelata suggestiva: agendo senza farci troppi scrupoli, abbiamo comunque ottenuto un risultato corretto (infatti lo avevamo già giustificato partendo dalla formula di derivazione di funzioni composte!).

ESEMPLI:

1. Si voglia calcolare $\int \cos^2 x dx$. Per una nota identità trigonometrica, abbiamo $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ da cui

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

2. Calcoliamo $\int e^x \sin x dx$. Integrando due volte per parti si ottiene: $\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$. Portando l'ultimo integrale a primo membro si ottiene subito

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C.$$

3. Calcoliamo poi $\int \sqrt{1-x^2} dx$. Poniamo $x = \sin y$, da cui (OK, non è ortodosso ma abbiamo verificato che funziona): $dx = \cos y dy$ e

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y dy = \int \cos^2 y dy = \frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4} + C.$$

Ora, $y = \arcsin x$ e $\cos y = \sqrt{1-x^2}$, da cui $\sin 2y = 2x\sqrt{1-x^2}$ e l'integrale cercato vale $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$.

L'integrale definito di questa funzione tra -1 e 1 vale allora $\pi/2$... e questo ha un semplice significato geometrico: quale? Questa è un'ulteriore conferma del fatto che l'integrale di Riemann è l'oggetto giusto per definire l'area di oggetti curvilinei del piano dal contorno abbastanza regolare!

4. Calcoliamo $\int \log x \, dx$. Integrando per parti si ha: $\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = \int (x)' \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \log x - x + C$.

5. Calcoliamo

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Poniamo $y = 1 - x^2$, da cui: $dy = -2x \, dx$ e l'integrale diventa

$$-\frac{1}{2} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{y} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Oppure, con un uso disinvolto della formula di integrazione per sostituzione:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

6. Si voglia calcolare $\int \sin \sqrt{x} \, dx$. Si ottiene subito il risultato ponendo $\sqrt{x} = y$, e integrando per parti.

17 Lezione del 20/11/2024 (3 ore)

Vediamo come possiamo integrare le funzioni razionali:

1. Integrazione di funzioni razionali: $f(x) = A(x)/B(x)$, con $A(x)$, $B(x)$ polinomi. Possiamo supporre che il grado di A sia strettamente minore del grado di B (altrimenti facciamo la divisione e scriviamo $A(x)/B(x) = Q(x) + R(x)/B(x)$, dove Q ed R sono rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione (e $\deg(R) < \deg(B)$). Siccome un polinomio è di integrazione immediata, ci siamo ricondotti al caso di cui sopra). Vediamo per semplicità come si affronta il caso in cui il polinomio a denominatore abbia grado 2: la situazione è nettamente diversa a seconda che $B(x)$ abbia due radici reali distinte, una radice doppia, nessuna radice reale. Cominciamo dal primo caso: si voglia calcolare $\int \frac{2x+5}{x^2-3x+2} \, dx$. Abbiamo $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$: la tecnica da usare è quella della *decomposizione in somma di frazioni parziali*, cerchiamo cioè di scrivere

$$\frac{2x+5}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1}.$$

Si trova subito che dobbiamo scegliere $a = 9$, $b = -7$ per cui

$$\int \frac{2x+5}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{9}{x-2} dx + \int \frac{-7}{x-1} dx = 9 \log|x-2| - 7 \log|x-1|.$$

2. Caso delle radici reali coincidenti: si voglia calcolare $\int \frac{3x+5}{x^2-2x+1} dx = \int \frac{3x+5}{(x-1)^2} dx$. Scriviamo $3x+5 = 3(x-1) + 8$. L'integrale diventa immediato e vale: $3 \log|x-1| - 8/(x-1) + C$.
3. Caso del polinomio di secondo grado irriducibile: vogliamo calcolare $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+6} dx$. In questo caso, la mossa vincente è scrivere il denominatore come somma di quadrati: $x^2+2x+6 = (x+1)^2+5$. Cambiamo poi variabile, ponendo $y = \frac{x+1}{\sqrt{5}} \dots$
4. Tecniche simili siano applicabili a funzioni razionali con denominatore di grado qualunque. In generale, il denominatore può essere decomposto in fattori irriducibili di primo e secondo grado. La tecnica della decomposizione in frazioni parziali funziona ancora: ad esempio

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Questi due esempi mostrano cosa succede quando c'è un fattore lineare ripetuto, oppure quando ci sono fattori di secondo grado irriducibili.

Altro esempio "esotico"

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Come abbiamo già osservato in precedenza, la nostra definizione di integrale di Riemann è abbastanza soddisfacente, ma nella pratica può essere utile definire l'integrale di una funzione su intervalli che siano *illimitati*. Precisamente, proponiamo in modo abbastanza naturale la seguente definizione:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. L'integrale (improprio o generalizzato) di f sulla semiretta $[a, +\infty)$ si definisce come

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

a patto che il limite esista.

A titolo di esempio, possiamo verificare che $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi/2$, mentre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$ e infine $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ non esiste.

In modo analogo possiamo definire l'integrale (generalizzato) di una funzione continua su un intervallo *aperto in uno dei suoi estremi*: se per esempio $f : (a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è continua, definiamo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow a^+} \int_\delta^b f(x) dx,$$

a patto che il limite esista.

Anche in questo caso, l'integrale può essere finito, infinito o non esistere.

Per esempio, un semplice conticino mostra che l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ è finito se e soltanto se $\alpha < 1$, mentre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ è finito se e solo se $\alpha > 1$ (e per $\alpha = 1$, *entrambi* gli integrali sono infiniti). Invece, l'integrale della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin(1/x)$ non esiste su $(0, 1]$.

A questo proposito, vale la pena di notare che se $f \geq 0$, l'integrale improprio *esiste sempre* (sia nel caso delle semirette che nel caso degli intervalli semiaperti). Infatti, in quel caso il limite nella definizione di integrale improprio è il limite di una funzione monotona, e sappiamo bene che questo esiste sempre (finito o infinito). Dunque, nel caso delle funzioni non negative, l'integrale improprio può essere finito (e in quel caso diremo che *converge*), oppure può *divergere a* $+\infty$.

Una semplicissima osservazione (che deriva dalla proprietà di monotonia dell'integrale) è la seguente

PROPOSIZIONE (Principio del confronto per gli integrali impropri): Siano $f, g : [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ due funzioni continue non negative, e supponiamo di sapere che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, +\infty)$. Allora, se l'integrale di g converge, converge anche l'integrale di f . Se invece l'integrale di f diverge, diverge anche l'integrale di g .

Un analogo principio di confronto vale anche per gli integrali impropri di funzioni continue su intervalli semiaperti.

Abbiamo visto alcuni esempi di applicazione di questo risultato...

Come conseguenza del principio del confronto abbiamo la seguente Proposizione, che ha anch'essa un'ovvia estensione agli integrali impropri di funzioni continue su intervalli semiaperti:

PROPOSIZIONE (Principio dell'equivalenza asintotica): Siano $f, g : [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ due funzioni continue non negative tali che $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ (questo significa che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = 1$, e si legge “ f è asintoticamente equivalente a g ”). Allora gli integrali impropri

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

hanno lo stesso comportamento: sono entrambi convergenti, oppure entrambi divergenti a $+\infty$.

DIM.: Per definizione di limite all'infinito, visto che $f \sim g$ esisterà $\bar{a} \geq a$ tale che

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x) \quad \forall x \geq \bar{a}.$$

La tesi segue allora dal principio del confronto applicato agli integrali impropri sulla semiretta $[\bar{a}, +\infty)$. Q.E.D.

18 Lezione del 26/11/2024 (3 ore)

Nella prima ora di lezione abbiamo svolto qualche esercizio in vista della prova intermedia prevista per la prossima settimana.

Vediamo ora una versione non del tutto ovvia del principio del confronto, valida per una funzione f di segno qualunque:

PROPOSIZIONE (della convergenza assoluta): Sia $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora, se l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

converge, esiste finito anche l'integrale improprio di f .

Possiamo applicare questo risultato, ad esempio, per verificare che

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

converge: infatti il modulo dell'integranda ha integrale convergente perché è maggiorato da $\frac{1}{x^2}$, che già sappiamo avere integrale convergente.

DIM. del teorema sulla convergenza assoluta degli integrali impropri: Consideriamo la funzione $h(x) = f(x) + |f(x)|$.

Segue subito che $0 \leq h(x) \leq 2|f(x)|$, per cui l'integrale improprio di h è convergente. Possiamo scrivere allora:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\int_a^M h(x) dx - \int_a^M |f(x)| dx \right],$$

e l'ultimo limite esiste finito perché i due integrali impropri coinvolti sono convergenti. Q.E.D.

Il teorema del confronto si rivela spesso utilissimo per dimostrare la convergenza (o la divergenza, nel caso di funzioni non negative) dell'integrale improprio di una funzione di cui *non si sappia calcolare esplicitamente una primitiva*. Purtroppo, però, la convergenza assoluta è una condizione sufficiente, ma non necessaria, per la convergenza di un integrale improprio.

ESEMPIO: L'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ esiste finito, mentre $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$.

Infatti, integrando per parti si ha

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} dx \rightarrow \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

L'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge per il principio del confronto, perché $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ e abbiamo visto che l'integrale dell'ultima funzione è finito.

Dunque, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ esiste finito.

Facciamo vedere che $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$.

Infatti, per ogni $n \in \mathbf{N}$ ($n \geq 2$) avremo

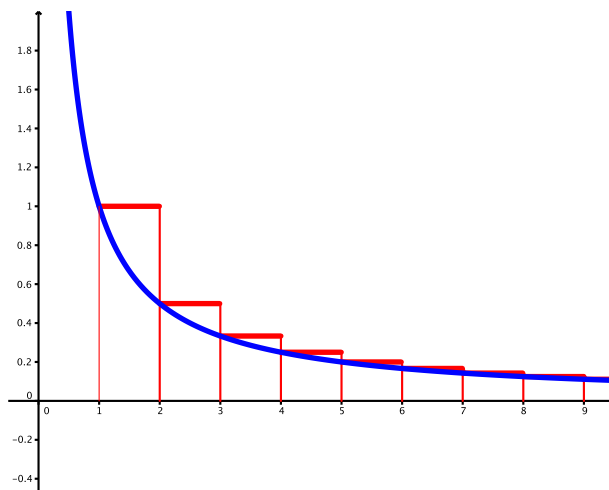
$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)}.$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ abbiamo quindi trovato la seguente disuguaglianza:

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

La serie nell'ultima disuguaglianza (cioè la serie dei reciproci dei numeri naturali) si chiama *serie armonica*: mostriamo che diverge!

Per farlo, useremo ancora una volta il principio del confronto per gli integrali impropri! Infatti, possiamo interpretare la serie armonica come l'integrale tra 2 e $+\infty$ della funzione a scala (con infiniti scalini) $\phi(x) = \frac{1}{[x]}$ ¹².



Visto che $\phi(x) \geq \frac{1}{x}$, e visto che $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$, il principio del confronto ci dice che l'integrale di ϕ (che è poi la serie armonica) diverge.

La discussione fatta per mostrare la divergenza dell'integrale improprio di $\frac{|\sin x|}{x}$, ci suggerisce un utilissimo *criterio di convergenza per le serie*. Ricordiamo a questo proposito, la fondamentale *definizione di serie* che abbiamo già visto parlando di polinomi di Taylor: se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali, poniamo *per definizione*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k,$$

a patto che il limite a secondo membro esista. La successione

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

si chiama *successione delle somme parziali* della serie, per cui la somma della serie è semplicemente il limite delle somme parziali!

¹²Si noti che la definizione di integrale improprio si può estendere senza cambiare nulla a funzioni anche non necessariamente continue, che siano però integrabili secondo Riemann su tutti gli intervalli limitati. Quindi, è perfettamente lecito fare l'integrale improprio di ϕ .

PROPOSIZIONE (Criterio integrale di convergenza per le serie): Sia $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione non negativa e decrescente. Allora l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Con questo vogliamo dire che se l'integrale converge, converge anche la serie, mentre se l'integrale diverge a $+\infty$, diverge anche la serie.

DIM.: Basta osservare che $f([x+1]) \leq f(x) \leq f([x])$, e interpretare la serie come l'integrale della funzione costante a tratti $f([x])$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \int_1^{+\infty} f([x]) dx.$$

Il risultato segue allora immediatamente dal principio del confronto tra gli integrali impropri. Q.E.D.

ESEMPIO: La serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$: basta usare il criterio integrale con la funzione $f(x) = 1/x^\alpha$.

Da quanto abbiamo appena visto, non ci stupirà scoprire che esistono delle analogie tra integrali impropri e serie! Cominciamo infatti con un elenco di alcune proprietà delle serie che ricordano quanto abbiamo già visto per gli integrali:

- Se $a_n \geq 0$, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ esiste sempre, finita o infinita: infatti, le somme parziali costituiscono una successione monotona. In sostanza una serie a termini positivi converge a una somma finita, oppure diverge a $+\infty$.
- Vale il seguente *criterio del confronto per le serie a termini positivi*: se $0 \leq a_n \leq b_n$, allora la convergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ implica la convergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, mentre la divergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ implica la divergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$.

- Vale anche un *criterio dell'equivalenza asintotica*: se $a_n, b_n > 0$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

allora le serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ hanno lo stesso comportamento. Basta infatti osservare che per n abbastanza grande $\frac{1}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}b_n$, e applicare il criterio del confronto.¹³

19 Lezione del 27/11/2024 (3 ore)

Un'altra proprietà interessante (che per gli integrali impropri *non* vale) è la seguente:

PROPOSIZIONE: Se la serie (a termini di segno qualunque) $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge, allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$$

DIM.: Se s_n denota la somma parziale n -esima della serie e s la sua somma (cioè $s_n \rightarrow s$), si ha $a_n = s_n - s_{n-1}$, e passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ si ha la tesi. Q.E.D.

Si noti che il viceversa *non è vero*: il termine generale della serie può essere infinitesimo senza che la serie converga. Come esempio, abbiamo visto il caso della serie armonica: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Questa condizione necessaria *non vale* per gli integrali impropri:

ESEMPIO/ESERCIZIO: Sia $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. Mostrare che la convergenza dell'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *non implica necessariamente* che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. In questo, gli integrali impropri si comportano in modo diverso dalle serie!

Ci si convince facilmente che se il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ esiste, allora deve essere proprio 0: usando la definizione di integrale improprio, si vede senza

¹³Questo criterio è falso per le serie a termini di segno qualunque. Infatti, le serie di termine generale $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ e $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ sono asintoticamente equivalenti. Grazie a un criterio di convergenza che vedremo la prossima volta (criterio di Leibniz), si verifica che la prima serie diverge a $+\infty$, mentre la seconda converge.

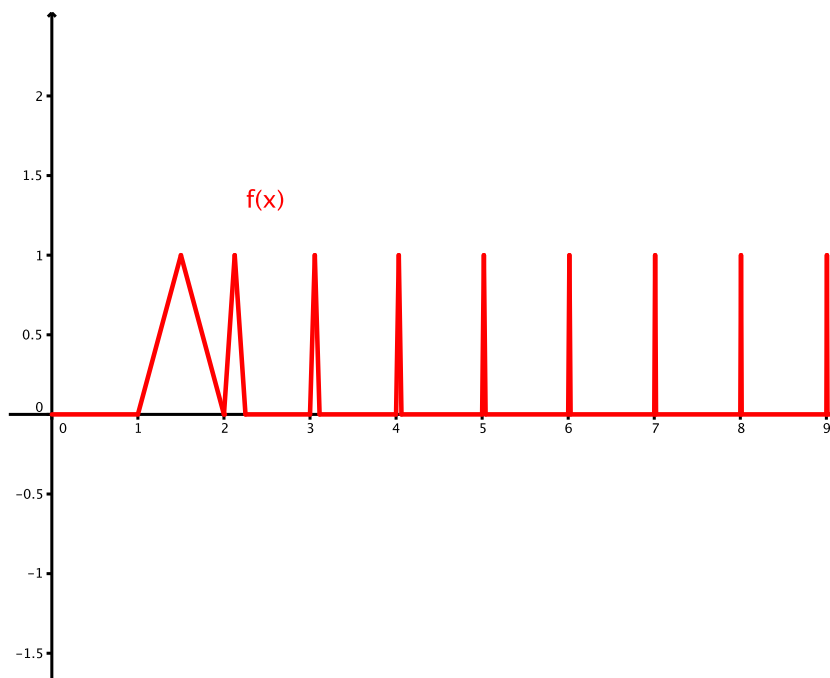
difficoltà che se il limite è un numero diverso da zero, allora l'integrale diverge a $\pm\infty$ (stiamo infatti calcolando l'area di una regione che contiene una striscia di altezza fissa e lunghezza infinita!).

Vogliamo dunque esibire una funzione f che abbia integrale improprio convergente e per la quale *non esista* il limite a $+\infty$. Se non fosse richiesta la continuità di f , potremmo prendere la funzione seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa funzione ha integrale improprio nullo (l'integrale non si accorge che essa vale 1 su un insieme discreto di punti: l'area del sottografico è proprio 0!), ma non ammette limite all'infinito.

Volendo f continua, siamo costretti a complicare un po' questo esempio. Una possibilità è la funzione della figura:



Si tratta di una funzione lineare a tratti che vale 0 “quasi sempre”, tranne nelle vicinanze dei numeri naturali: nel punto $x = n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ essa comincia a salire linearmente fino a 1, dove arriva per $x = n + \frac{1}{2n^2}$, per poi ridiscendere linearmente a 0 dove arriva per $x = n + 1/n^2$. In sintesi, a destra del punto $x = n$, il grafico di f produce un triangolo isoscele di base $1/n^2$ e altezza 1.

Questa funzione non ammette limite per $x \rightarrow +\infty$. Ma quanto vale il suo integrale improprio? Esso è la somma delle aree dei triangoli isosceli, cioè

$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: questa è una serie armonica generalizzata *convergente* (perché l'esponente è maggiore di 1)!

Sfruttando ancora l'interpretazione delle serie come integrali impropri (una serie è l'integrale improprio di una funzione a scala con scalini di larghezza unitaria. . .), abbiamo il seguente risultato:

PROPOSIZIONE: Se una serie è assolutamente convergente, cioè se converge $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$, allora anche la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ esiste finita¹⁴.

Un altro utilissimo criterio, particolarmente semplice da applicare, è il seguente:

PROPOSIZIONE (Criteri della radice e del rapporto): Sia a_n il termine generale di una serie, $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

- Supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell_1.$$

Allora, se $\ell_1 > 1$ la serie non converge, se $\ell_1 < 1$ converge assolutamente.

- Sia $a_n \neq 0$, e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell_2.$$

Allora, se $\ell_2 > 1$ la serie non converge, se $\ell_2 < 1$ converge assolutamente¹⁵.

¹⁴Anche in questo caso, non vale il viceversa: vedremo che una serie può convergere anche se non converge assolutamente.

¹⁵Si può far vedere che se esiste il limite del rapporto, allora esiste anche il limite della radice, e questi due limiti sono uguali: per questo, il criterio del rapporto è in realtà una conseguenza del criterio della radice. Mostriamo dunque che se $|a_{n+1}/a_n| \rightarrow \ell$, allora si ha anche $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \ell$. Usando la stima ottenuta nella dimostrazione del criterio del rapporto (vedi sotto), scopriamo che per qualunque $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che

$$|a_\nu|(\ell - \varepsilon)^{n-\nu} \leq |a_n| \leq |a_\nu|(\ell + \varepsilon)^{n-\nu} \quad \forall n > \nu$$

da cui

$$\sqrt[n]{|a_\nu|}(\ell - \varepsilon)^{1-\nu/n} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{|a_\nu|}(\ell + \varepsilon)^{1-\nu/n}.$$

Il membro di sinistra e quello di destra tendono a $\ell - \varepsilon$ e a $\ell + \varepsilon$ rispettivamente, quindi per n abbastanza grande si avrà $\ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \ell + 2\varepsilon$. Dall'arbitrarietà di ε segue che $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \ell$.

OSSERVAZIONE: I criteri della radice e del rapporto falliscono se i limiti ℓ_1 , ℓ_2 sono uguali ad 1. Per esempio, si consideri la serie armonica generalizzata di termine generale $a_n = 1/n^\alpha$. In questo caso, i limiti di radice e rapporto sono entrambi uguali a 1, ma abbiamo visto che la serie converge se $\alpha > 1$, mentre diverge per $\alpha \leq 1$.

Per dimostrare i criteri del rapporto e della radice occorre ricordare il seguente

ESEMPIO FONDAMENTALE (Serie geometrica): Come già abbiamo visto, possiamo usare la formula per la somma della progressione geometrica per studiare la *serie geometrica*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k,$$

in cui a è un numero reale chiamato *ragione* della serie.

Se $s_n = \sum_{k=0}^n a^k$ denota la somma parziale n -esima della serie, abbiamo visto che $s_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Se studiamo il limite di questa espressione per $n \rightarrow +\infty$, vediamo che la serie converge a $1/(1-a)$ per $|a| < 1$, diverge a $+\infty$ per $a \geq 1$, non esiste per $a \leq -1$.

DIM. dei criteri del rapporto e della radice: Cominciamo dal criterio della radice. Se $\ell_1 > 1$, scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $\ell_1 - \varepsilon > 1$. Per la definizione di limite, sappiamo che per n abbastanza grande avremo $\sqrt[n]{|a_n|} > \ell_1 - \varepsilon$, ossia $|a_n| > (\ell_1 - \varepsilon)^n$. Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo $|a_n| \rightarrow +\infty$, e la serie non può convergere perché il suo termine generale non tende a zero.

Se $\ell_1 < 1$, scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $\ell_1 + \varepsilon < 1$. Per n abbastanza grande avremo $\sqrt[n]{|a_n|} < \ell_1 + \varepsilon$, da cui $|a_n| < (\ell_1 + \varepsilon)^n$. Poiché la serie geometrica di ragione $\ell_1 + \varepsilon$ converge, converge *assolutamente* anche la nostra serie (criterio del confronto), e quindi essa converge.

Dimostriamo il *criterio del rapporto*: supponiamo $\ell_2 > 1$, e scegliamo ε tanto piccolo che $\ell_2 - \varepsilon > 1$. Per definizione di limite, troviamo $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \ell_2 - \varepsilon$ per $n \geq \nu$. Allora, se $n > \nu$:

$$|a_n| = |a_\nu| \cdot \left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \geq |a_\nu| \cdot (\ell_2 - \varepsilon)^{n-\nu}.$$

Passando al limite vediamo che $|a_n| \rightarrow +\infty$, e la serie non converge di sicuro.

Se poi $\ell_2 < 1$, scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $\ell_2 + \varepsilon < 1$. Troviamo $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \ell_2 + \varepsilon$ per $n \geq \nu$. Rifacendo il conto di prima abbiamo

$$|a_n| = |a_\nu| \cdot \left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \leq |a_\nu| \cdot (\ell_2 + \varepsilon)^{n-\nu},$$

e la serie dei moduli risulta maggiorata da una serie geometrica convergente. Q.E.D.

Che altro dire delle serie a termini di segno qualunque? Se esse non convergono assolutamente, abbiamo ben pochi strumenti a nostra disposizione. Uno di questi è il seguente:

PROPOSIZIONE (Criterio di Leibniz): Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri non negativi, e si consideri la serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n.$$

Se a_n è decrescente e tende a zero, allora la serie converge.

DIM.: Al solito, sia $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ la successione delle somme parziali. Si ha

$$s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq s_{2n},$$

cioè la successione delle somme parziali di indice pari è decrescente.

Analogamente, $s_{2n+3} \geq s_{2n+1}$: la successione delle somme parziali di indice dispari è crescente. Inoltre, evidentemente $s_1 \geq 0$ e $s_{2n} \geq s_{2n-1}$: ne segue che la successione delle somme parziali pari è non negativa, e tenderà a un limite finito ℓ (uguale al suo inf). Anche le somme parziali dispari tenderanno allo stesso limite:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (s_{2k} - a_{2k+1}) = \ell - 0.$$

Ne segue che ℓ è proprio la somma della serie. Q.E.D.

Il criterio di Leibniz ci dice ad esempio che la versione a segni alterni della serie armonica, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, è convergente (in realtà, si può far vedere che converge a $\log 2$).

Per visualizzare il comportamento di questa serie (e l'idea della dimostrazione del criterio di Leibniz), potete dare un'occhiata ad una animazione¹⁶ costruita con GeoGebra che ho messo in rete.

Si ricorderà che abbiamo incontrato per la prima volta le serie quando ci siamo accorti che alcune funzioni infinitamente derivabili possono essere sviluppate in *serie di Taylor*: la serie che si ottiene in quel caso è del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

¹⁶<http://www.geogebra.org/material/show/id/210707>

e si chiama *serie di potenze*.

Abbiamo visto che se $f(x)$ è una funzione analitica e scegliamo $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, allora la serie di potenze converge in un intorno di 0, e converge proprio a $f(x)$... a dire il vero, questa era proprio la definizione di funzione analitica!

È però interessante anche studiare il problema inverso: se ci viene data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, cosa possiamo dire del suo insieme di convergenza?

E se scopriamo che essa converge per gli x in un opportuno intorno di 0, sarà poi vero che la sua somma $f(x)$ è una funzione infinitamente derivabile, la cui serie di Taylor coincide con la serie di partenza?

Cominciamo con un'osservazione semplice ma interessante:

LEMMA: Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge per $x = x_0$, allora converge assolutamente per tutti gli x con $|x| < |x_0|$.

DIM.: Siccome la serie converge per $x = x_0$, abbiamo necessariamente $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n x_0^n = 0$. In particolare, per n abbastanza grande avremo $|a_n x_0^n| \leq 1$.

Se poi $|x| < |x_0|$ si ha (sempre per n abbastanza grande)

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq \left| \frac{x}{x_0} \right|^n,$$

e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$ converge perché è maggiorata da una serie geometrica convergente. Q.E.D.

20 Lezione del 3/12/2024 (3 ore)

Il lemma visto alla fine dell'ultima lezione ci suggerisce di dare la seguente, fondamentale

DEFINIZIONE: Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è l'estremo superiore dei valori di x per cui la serie converge.

Sia r il raggio di convergenza della nostra serie di potenze. Grazie al lemma visto sopra, possiamo concludere che

- Se $r = +\infty$, la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbf{R}$.

- Se $r > 0$, la serie converge assolutamente nell'intervallo aperto $(-r, r)$, mentre non converge per $|x| > r$.
- Se $r = 0$, la serie converge soltanto per $x = 0$.

Tutti e tre questi comportamenti sono possibili: la serie esponenziale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge per ogni $x \in \mathbf{R}$, la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ha raggio di convergenza 1, mentre la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$ ha raggio di convergenza 0 come si può facilmente verificare con il criterio della radice.

Si noti anche che il nostro lemma non dice nulla sul comportamento della serie per $x = \pm r$, cioè agli estremi dell'intervallo di convergenza: in effetti, in quei due punti può succedere qualunque cosa (la serie può convergere in tutti e due i punti, in uno solo di essi, oppure in nessuno dei due).

La convergenza di una serie di potenze agli estremi dell'intervallo di convergenza è spesso la cosa più difficile da valutare, e lo studio deve essere condotto caso per caso.

Vediamo ora come è possibile trovare il raggio di convergenza di una serie di potenze: in *quasi tutti i casi* è possibile dare una risposta grazie al criterio della radice o del rapporto.

Supponiamo infatti di sapere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$$

(oppure che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$). Usando il criterio della radice (del rapporto) vediamo subito che la serie converge per $|x| < \frac{1}{\ell}$, mentre non converge per $|x| > \frac{1}{\ell}$ (nei casi $\ell = 0$ e $\ell = +\infty$, l'insieme di convergenza è rispettivamente \mathbf{R} e $\{0\}$...).

L'unica situazione in cui questo metodo non funziona, è quella in cui non esiste il limite della radice n -esima di $|a_n|$ (anche in questo caso, tuttavia, è possibile aggirare il problema: se volete sapere come fare, leggete la nota¹⁷ qui sotto...).

¹⁷La semplice osservazione appena fatta può essere trasformata in una ricetta universale per trovare il raggio di convergenza: se è vero che non sempre esiste il limite della successione $\sqrt[n]{|a_n|}$, è però sempre possibile farne il massimo limite, un oggetto di cui vi infliggerò a breve la definizione.

Ora, il criterio della radice vale pari pari (e anche la dimostrazione non cambia granché) se si sostituisce il limite con il massimo limite: possiamo quindi affermare che il raggio di convergenza della nostra serie di potenze è dato dal reciproco di $\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dimostrazione completa tra poche lezioni!

Supponiamo di avere una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$. Possiamo allora definire una funzione $f : (-r, r) \rightarrow \mathbf{R}$ nel modo seguente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Ci chiediamo quali siano le proprietà della funzione $f(x)$. Vale il seguente:

TEOREMA (Regolarità delle serie di potenze): Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$. Allora $f(x)$ è continua e derivabile in $(-r, r)$. Inoltre la serie delle derivate $\sum_{n=1} a_n \cdot n x^{n-1}$ ha ancora raggio di convergenza r , e nell'intervallo $(-r, r)$ converge proprio alla derivata f' di f .

Il teorema dice dunque che una serie di potenze si può derivare termine a termine. Inoltre, iterando il procedimento si ottiene che $f(x)$ è derivabile infinite volte, e che la serie di partenza non è altro che la serie di Taylor di f centrata in 0.

Questo risultato è meno ovvio di quanto possa sembrare: se abbiamo una serie di funzioni continue, è in generale falso che la somma della serie sia continua, come mostra l'esempio seguente.

ESEMPIO: Poniamo $g_n(x) = \arctan(nx)$, $f_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x)$. Allora la somma parziale N -esima della serie di funzioni continue

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

è $g_N(x)$, che tende chiaramente ad una funzione discontinua per $N \rightarrow +\infty$.

Dimostriamo ora il teorema di regolarità della somma di una serie di potenze. Abbiamo per prima cosa verificato la parte più semplice dell'enunciato, ossia abbiamo eseguito la semplice verifica che la serie derivata $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ha ancora raggio di convergenza r . Infatti, il reciproco del raggio di convergenza della serie derivata è dato da $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n-1]{n|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, e l'ultima espressione sappiamo che vale $1/r$.

Abbiamo poi bisogno di alcuni lemmi. Il primo di essi riguarda la velocità con cui il resto N -esimo di una serie di potenze va a zero.

Se prendiamo una serie numerica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, il resto N -esimo è per definizione $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$: è immediato verificare che $\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N = 0$.

Se poi consideriamo il caso della nostra serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ di raggio di convergenza $r > 0$, il resto N -esimo $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$ tenderà a zero per ogni $x \in (-r, r)$. Il primo lemma dice che se $0 < \rho < r$ e $x \in [-\rho, \rho]$, allora possiamo stimare la velocità con cui $R_N(x)$ tende a zero in maniera *indipendente da x* : in matematiche, si dice che la serie di potenze converge *uniformemente* in $[-\rho, \rho]$.

LEMMA 1: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$, $\rho \in (0, r)$. Allora, per ogni $x \in [-\rho, \rho]$ si ha

$$|R_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \rho^n.$$

In altre parole, il resto N -esimo della serie è maggiorato, per ogni $x \in [-\rho, \rho]$, dal resto N -esimo della serie numerica convergente (la serie di potenze converge assolutamente per $x = \rho \dots$) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n$.

Dim.: Sia $x \in [-\rho, \rho]$, $M \geq N$. Usando la disuguaglianza triangolare otteniamo:

$$\left| \sum_{n=N+1}^M a_n x^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^M |a_n| |x|^n \leq \sum_{n=N+1}^M |a_n| \rho^n,$$

e passando al limite per $M \rightarrow +\infty$ si ha la tesi. Q.E.D.

Il prossimo lemma costituisce la prima parte del teorema di regolarità che vogliamo dimostrare: la somma di una serie di potenze è una funzione continua.

LEMMA 2: Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$. Allora la funzione f è continua in $(-r, r)$.

Dim.: Sia $x_0 \in (-r, r)$: mostriamo che f è continua in x_0 . A questo scopo, scegliamo $\rho > 0$ con $|x_0| < \rho < r$. Se $|x| \leq \rho$ e N è un qualunque numero

naturale possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(x_0)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \right| \leq \\
 & \left| \sum_{n=0}^N a_n (x^n - x_0^n) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x_0^n \right| \leq \\
 & \left| \sum_{n=0}^N a_n (x^n - x_0^n) \right| + |R_N(x)| + |R_N(x_0)| \leq \\
 & \left| \sum_{n=0}^N a_n (x^n - x_0^n) \right| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \rho^n,
 \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo fatto uso del Lemma 1. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e osserviamo l'ultima riga della nostra stima: il secondo addendo può essere reso minore di $\varepsilon/2$ a patto di prendere N abbastanza grande (si tratta del resto N -esimo di una serie numerica convergente). A questo punto, prendendo x abbastanza vicino a x_0 il primo addendo può essere reso minore di $\varepsilon/2$ (perché il polinomio $\sum_{n=0}^N a_n x^n$ è una funzione continua): in conclusione, se x è abbastanza vicino a x_0 si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, Q.E.D.

Il terzo lemma dice che possiamo integrare termine a termine una serie di potenze sugli intervalli chiusi contenuti in $(-r, r)$.

LEMMA 3: Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$, $[x_1, x_2] \subset (-r, r)$. Denotiamo con $S_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ le somme parziali della serie. Allora

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{x_1}^{x_2} S_N(x) dx.$$

In maniera più espressiva, questo è equivalente a scrivere

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} a_n x^n dx,$$

cioè si può scambiare il segno di serie con quello di integrale¹⁸).

¹⁸Infatti questo è chiaramente possibile per le somme parziali (additività dell'integrale): il lemma dice che è lecito passare al limite per $N \rightarrow +\infty$ ed estendere l'affermazione alla serie di potenze.

Dim: La funzione $f(x)$ è integrabile perché abbiamo dimostrato nel Lemma 2 che è continua.

Sia $\rho = \max\{|x_1|, |x_2|\}$: grazie al Lemma 1 abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - S_N(x)) dx \right| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} R_N(x) dx \right| \leq \\ \int_{x_1}^{x_2} |R_N(x)| dx &\leq \int_{x_1}^{x_2} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \rho^n = (x_2 - x_1) \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \rho^n, \end{aligned}$$

e l'ultima espressione tende a zero per $N \rightarrow +\infty$. Q.E.D.

Abbiamo così concluso il “lavoro sporco”: vedremo ora come la regolarità della somma di una serie di potenze segua facilmente dagli ultimi due lemmi!

Abbiamo visto infatti che la funzione somma $f(x)$ è continua, rimangono da dimostrare solo le affermazioni sulla derivabilità.

Innanzitutto, abbiamo già visto che la serie derivata $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ha ancora raggio di convergenza r .

Grazie al Lemma 2, sappiamo dunque che le somme parziali $S'_N(x)$ della serie derivata convergono ad una certa funzione continua $g(x)$ (la somma della serie derivata).

Ora, siano $S_N(x)$ le somme parziali della serie di potenze non derivata: grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, se fissiamo N si ha $S_N(x) = S_N(0) + \int_0^x S'_N(t) dt$. Passiamo al limite per $N \rightarrow +\infty$: il primo membro tende a $f(x)$, mentre il secondo membro tende a $f(0) + \int_0^x g(t) dt$ grazie al Lemma 3.

In conclusione, abbiamo mostrato che

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt,$$

per cui f è derivabile e la sua derivata è proprio g (teorema fondamentale del calcolo integrale). Q.E.D.

ESEMPIO: Come applicazione del teorema sulla somma delle serie di potenze, verifichiamo che

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} & -1 < x < 1; \\ \arctan(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Infatti, non è difficile vedere che entrambe le serie hanno raggio di convergenza 1. Se chiamiamo $f(x)$ la somma della prima e $g(x)$ la somma della seconda, derivando termine a termine si ottiene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x},$$

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2},$$

dove abbiamo usato la formula per la somma della serie geometrica. Integrando e tenendo conto del fatto che $f(0) = g(0) = 0$, si ottiene $f(x) = \log(1+x)$ e $g(x) = \arctan x$.

ESEMPIO: Consideriamo la *serie binomiale*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

in cui $\alpha \in \mathbf{R}$ e i coefficienti binomiali sono definiti da

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \quad (n \geq 1).$$

Usando il criterio del rapporto, si verifica subito che il questa serie ha raggio di convergenza 1¹⁹.

Mostriamo ora che la somma $f(x)$ della serie è uguale a $(1+x)^\alpha$ per ogni $x \in (-1, 1)$ (questa verifica NON è stata svolta in classe).

Derivando termine a termine la serie si ottiene infatti

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} (\alpha - n) x^n$$

(la seconda espressione si ottiene osservando che $\binom{\alpha}{n} n = \binom{\alpha}{n-1} (\alpha - n + 1)$ e cambiando l'indice, $(n-1) \leftrightarrow n$). Utilizzando queste due scritte equivalenti di $f'(x)$ si ottiene subito

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x), \quad \text{ovvero} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1+x}.$$

Integrando, si ha allora $\log f(x) = \log(1+x)^\alpha + C$, da cui (osservando che $f(0) = 1$) $f(x) = (1+x)^\alpha$.

¹⁹A meno che non si abbia $\alpha \in \mathbf{N}$: in tal caso solo i primi α coefficienti binomiali sono diversi da 0, e la serie si riduce a un polinomio.

21 Lezione del 9/12/2024 (3 ore)

Nella prima ora di lezione abbiamo corretto e discusso la prova intermedia del 4/12.

C'è un unico punto della dimostrazione del teorema di regolarità delle serie di potenze che è rimasto un po' in sospeso: per far vedere che la serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza della serie originale, abbiamo usato una formuletta per calcolare il raggio di convergenza tramite il *massimo limite* della radice. . .

È giunto il momento di vedere cosa sono il massimo ed il minimo limite di una successione!

Sia data dunque una successione reale $\{a_n\}$: in generale, non è affatto detto che essa ammetta limite per $n \rightarrow +\infty$. In compenso, è sempre possibile calcolare due “mezzi limiti” noti come massimo e minimo limite di a_n :

DEFINIZIONE (Massimo e minimo limite): Data una successione reale $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, definiamo il suo massimo e minimo limite come segue

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n &:= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{m \geq n} a_m, \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n &:= \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{m \geq n} a_m.\end{aligned}$$

Si noti che i due limiti nella definizione esistono sempre: le successioni $b_n = \inf_{m \geq n} a_m$ e $c_n = \sup_{m \geq n} a_m$ sono infatti rispettivamente crescente e decrescente (stiamo facendo l'inf ed il sup di insieme sempre più piccoli. . .). Possiamo allora scrivere la seguente definizione, del tutto equivalente a quella data sopra:

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n &:= \inf_{n \in \mathbf{N}} \sup_{m \geq n} a_m, \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n &:= \sup_{n \in \mathbf{N}} \inf_{m \geq n} a_m.\end{aligned}$$

Il massimo limite si indica anche con le scritture $\max \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, oppure $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Analogamente, il minimo limite si indica anche con le scritture $\min \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, oppure $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Vediamo ora una caratterizzazione del massimo e minimo limite, che aiuta a capire meglio questi strani oggetti.

Per rendere ancora più espressiva la nostra caratterizzazione, è utile spiegare cosa vuol dire che una certa proposizione $\mathcal{P}(n)$ (indicizzata da un numero naturale $n \in \mathbf{N}$) è vera *definitivamente* oppure *frequentemente*. Si dice che $\mathcal{P}(n)$ è vera *definitivamente* quando è vera *per tutti gli n abbastanza grandi*, cioè se esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq \nu$.

Si dice invece che $\mathcal{P}(n)$ è vera *frequentemente* se è vera *per infiniti n* . In modo equivalente, per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $m \geq n$ tale che $\mathcal{P}(m)$ è vera.

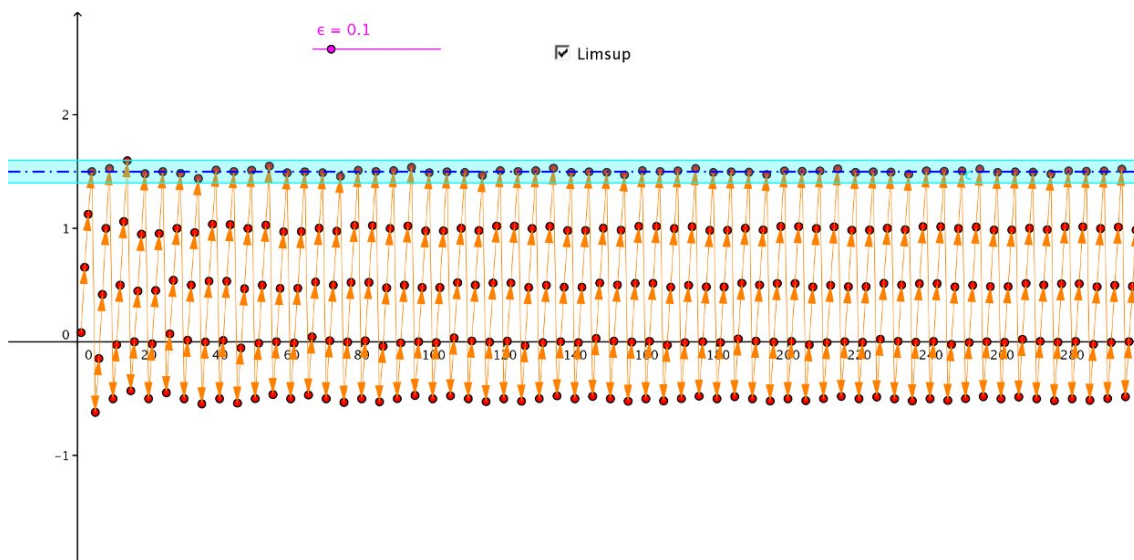
Tanto per fare degli esempi semplici, l'affermazione $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ è equivalente a dire che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha *definitivamente* $|a_n - \ell| < \varepsilon$. La successione $(-1)^n$ assume *frequentemente* il valore 1.

Enunciamo la caratterizzazione di massimo e minimo limite:

PROPOSIZIONE (Caratterizzazione di \liminf e \limsup): Data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ si ha $\ell_1 = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$ se e soltanto se per ogni $\varepsilon > 0$ vale che $a_n > \ell_1 - \varepsilon$ *definitivamente* e che $a_n < \ell_1 + \varepsilon$ *frequentemente*.

In maniera del tutto analoga, $\ell_2 = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ vale che $a_n < \ell_2 + \varepsilon$ *definitivamente* e che $a_n > \ell_2 - \varepsilon$ *frequentemente*.

Il seguente foglio dinamico GeoGebra²⁰ illustra la caratterizzazione:



Dimostriamo la caratterizzazione del \liminf con gli ε : per il \limsup la musica è la stessa... anche perché potete facilmente dimostrare (esercizio!) che $\limsup a_n = -\liminf(-a_n)$...

²⁰<http://www.geogebra.org/material/show/id/210739>

Sia dunque $\ell = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$, $\varepsilon > 0$. Per definizione il \liminf è il limite della successione $b_n = \inf_{m \geq n} a_m$: grazie alla definizione di limite avremo allora che

$$(*) \quad \ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon \quad \text{definitivamente.}$$

Siccome si ha evidentemente $a_n \geq b_n$ (perché a_n appartiene all'insieme di numeri di cui prendiamo l'inf), sarà anche vero che $a_n > \ell - \varepsilon$ definitivamente.

Fissiamo poi n abbastanza grande, in modo che valga (*). Allora $\inf_{m \geq n} a_m < \ell + \varepsilon$, dunque $\ell + \varepsilon$ non è un minorante dell'insieme di cui facciamo l'inf. Esiste dunque $m \geq n$ tale che $a_m < \ell + \varepsilon$. Siccome n può essere scelto arbitrariamente grande, possiamo concludere che $a_m < \ell + \varepsilon$ frequentemente. Le due affermazioni che costituiscono la caratterizzazione sono dunque dimostrate.

Viceversa, supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ valgano entrambe le proprietà richieste dalla nostra caratterizzazione. Dalla prima di esse segue subito che $b_n = \inf_{m \geq n} a_m \geq \ell - \varepsilon$ definitivamente. La seconda dice poi che $b_n < \ell + 2\varepsilon$: infatti $\ell + 2\varepsilon$ non può essere un minorante dell'insieme $\{a_m : m \geq n\}$ perché vale frequentemente la disuguaglianza opposta!

Concludiamo allora che $\ell - 2\varepsilon \leq b_n \leq \ell + 2\varepsilon$ definitivamente, da cui $\ell = \lim b_n = \liminf a_n$, Q.E.D.

ESEMPLI: Grazie alla definizione o alla caratterizzazione, si può immediatamente verificare che $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = -1$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = 1$, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n + \sin(n)/n = -1$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n + \sin(n)/n = 1$. Con minor facilità, potremmo far vedere che $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sin(n) = -1$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sin(n) = 1$.

OSSERVAZIONE: È evidente dalla definizione che si ha sempre $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Usando la caratterizzazione, segue subito che il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ esiste se e solo se il massimo ed il minimo limite sono uguali (e, in questo caso, essi coincidono con il limite).

OSSERVAZIONE/ESERCIZIO: Usando la caratterizzazione, non è difficile dedurre che esistono sempre sottosuccessioni di a_n che tendono al massimo e al minimo limite. Queste sottosuccessioni forniscono una dimostrazione alternativa del teorema di Bolzano-Weierstrass.

ESERCIZIO: Si mostri che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \min\{\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\} : \ell \text{ è il limite di una sottosuccessione di } a_n\}$$

e che una caratterizzazione simile vale per il massimo limite.

A questo punto, abbiamo tutti gli elementi per dimostrare il criterio della radice nella sua “versione limsup”:

PROPOSIZIONE (Criterio della radice con il massimo limite): Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sia $\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora se $\ell < 1$ la serie converge assolutamente, se $\ell > 1$ non converge.

DIM.: Nel caso $\ell > 1$, scegliamo $\varepsilon > 1$ in modo che $\ell - \varepsilon > 1$. Grazie alla caratterizzazione del lim sup, sappiamo che $\sqrt[n]{|a_n|} > \ell - \varepsilon$ frequentemente, da cui $|a_n| > (\ell - \varepsilon)^n$ frequentemente. Poiché $(\ell - \varepsilon)^n \rightarrow +\infty$, se ne deduce che $|a_n| \not\rightarrow 0$, e la serie non può convergere.

Se invece $\ell < 1$, scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $\ell + \varepsilon < 1$. Sempre grazie alla caratterizzazione, abbiamo $\sqrt[n]{|a_n|} < (\ell + \varepsilon)$ definitivamente, da cui $|a_n| < (\ell + \varepsilon)^n$. Dunque $|a_n|$ è definitivamente maggiorato dal termine generale di una serie geometrica convergente: la serie dei moduli converge allora grazie al criterio del confronto. Q.E.D.

COROLLARIO: Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, sia $\ell = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora il raggio di convergenza della serie è $1/\ell$ (rispettivamente $+\infty$ se $\ell = 0$, 0 se $\ell = +\infty$).

22 Lezione del 10/12/2024 (3 ore)

Iniziamo questa lezione con un argomento che sarà un ulteriore, piccolo approfondimento sulle successioni.

Tale argomento chiuderà anche la prima parte del corso di Analisi I in maniera “circolare”: daremo infatti un’ulteriore formulazione equivalente dell’assioma di completezza dei numeri reali. Questa formulazione può forse essere vista come poco più che una curiosità in \mathbf{R} , ma è gravida di importanti generalizzazioni, in quanto consentirà di estendere il concetto di completezza ad un contesto molto più ampio.

Ci poniamo il seguente problema: data una generica successione $\{a_n\}$, come possiamo riconoscere se essa possiede o meno un limite finito?

Usare la definizione di limite di una successione non sempre è facile: essa richiede infatti di *conoscere il valore ℓ del limite*. Che fare se non riusciamo a calcolarlo?

C’è però un semplice “test di convergenza” che ci permette di dire se una successione possiede un limite finito, senza necessità di calcolarlo: precisamente, il limite finito c’è se e soltanto se la successione è di Cauchy.

DEFINIZIONE: Una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ si dice di *Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}, \forall m \geq \bar{n}.$$

TEOREMA: Una successione $\{a_n\}$ ammette limite finito se e soltanto se essa è di Cauchy.

DIM.: Mostriamo la prima implicazione: supponiamo che esista $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \mathbf{R}$, e mostriamo che la nostra successione è di Cauchy.

Per definizione di limite, esiste $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Se ora $m, n \geq \bar{n}$, grazie alla disuguaglianza triangolare avremo

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e la nostra successione è di Cauchy.

Facciamo vedere il viceversa: se $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy, allora essa ammette un limite finito ℓ .

Cominciamo con l'osservare che una successione di Cauchy è *limitata*: usiamo la definizione di successione di Cauchy con $\varepsilon = 1$. Allora, per m e n maggiori o uguali a un certo indice ν avremo $|a_m - a_n| < 1$. In particolare, se prendiamo $m = \nu$ otteniamo

$$a_\nu - 1 < a_n < a_\nu + 1 \quad \forall n \geq \nu,$$

e la nostra successione è limitata (a rigore, dalla nostra disuguaglianza rimangono fuori i termini della successione di indice minore di ν , ma essi sono in numero finito e non possono certo renderla illimitata!).

Dunque, $\{a_n\}$ è limitata e possiamo applicare il teorema di Bolzano-Weierstrass: esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \ell \in \mathbf{R}$.

Dico che in realtà *tutta la successione* a_n , e non solo la sua sottosuccessione a_{n_k} , tende a ℓ . Prendiamo $\varepsilon > 0$. Per definizione di successione di Cauchy, troviamo \bar{n} tale che per $m, n \geq \bar{n}$ si abbia $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'altra parte, per definizione di limite troviamo \bar{k} tale che $|a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $k \geq \bar{k}$.

Evidentemente, non è restrittivo supporre che \bar{k} sia tanto grande che $n_{\bar{k}}$ sia maggiore o uguale a \bar{n} (se così non fosse, basterà sostituire \bar{k} con un valore opportunamente più grande). Allora, se $n > n_{\bar{k}}$ avremo

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{n_{\bar{k}}}| + |a_{n_{\bar{k}}} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Il teorema appena dimostrato può essere preso come *formulazione equivalente dell'assioma di completezza*.

Ci si convince subito che in \mathbf{Q} esistono delle successioni di Cauchy che non convergono ad alcun numero razionale (perché esse, se le si guarda come successioni reali, convergono ad un numero irrazionale!). Si noti che l'altra metà del teorema è invece vera anche in \mathbf{Q} : ogni successione convergente è di Cauchy.

Nel dimostrare che ogni successione di Cauchy in \mathbf{R} converge ad un limite finito, abbiamo fatto uso dell'assioma di completezza di \mathbf{R} (dove?). Viceversa, se assumiamo *come assioma* che ogni successione di Cauchy converge, possiamo mostrare che vale l'assioma di completezza in qualche altra sua formulazione: per esempio, possiamo mostrare che ogni insieme non vuoto ed inferiormente limitato ammette estremo inferiore in \mathbf{R} (Questo è relativamente facile. Negli appunti di una delle prime lezioni, c'è una parte scritta in piccolo in cui viene presentato un algoritmo per identificare l'inf di un insieme come numero decimale infinito: non è difficile verificare che la successione di numeri decimali finiti fornita da quell'algoritmo è proprio una successione di Cauchy!).

La formulazione dell'assioma di completezza tramite le successioni di Cauchy, non è particolarmente "conveniente" per quanto riguarda i numeri reali (anche se ci tornerà utile sapere che le successioni di Cauchy convergono).

Essa si presta però particolarmente bene ad essere generalizzata a situazioni più complicate. Il vantaggio principale è che nella definizione di successione di Cauchy non c'è bisogno di sapere che $\{a_n\}$ vive *in un insieme ordinato*. Per questo motivo, l'assioma di completezza può essere formulato con le successioni di Cauchy anche in \mathbf{R}^n , negli spazi funzionali, o negli spazi metrici in genere.

A lezione, ci siamo soffermati soltanto un attimo ad accennare agli spazi metrici: tutte queste cose verranno ampiamente discusse durante il corso di Analisi II.

Concluso l'argomento integrali impropri e serie, vogliamo ora cominciare un discorsetto introduttivo sulle *equazioni differenziali ordinarie*.

Vi sono ampie motivazioni per lo studio di questo argomento: la fisica fornisce numerosi esempi di equazioni del secondo ordine che "nascono" dall'applicazione del II principio della dinamica.

Cominciamo col ricordare qualche definizione: un'equazione differenziale è un'equazione *funzionale* (cioè un'equazione in cui l'incognita è una funzione)

della forma

$$f(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, x'(t), x(t), t) = 0,$$

dove $x(t)$ è la funzione incognita da cercare, e f è una funzione nota di $(n+2)$ variabili. L'equazione scritta sopra è *di ordine n* , perché la derivata di ordine massimo che vi compare ha appunto ordine n . In particolare, la più generale equazione differenziale ordinaria del primo ordine sarà del tipo

$$f(x'(t), x(t), t) = 0.$$

Almeno in questa prima fase, ci occuperemo soltanto di equazioni del primo ordine: vedremo infatti che uno studio accorto sulle equazioni e sistemi del primo ordine, ci darà poi un sacco di informazioni utili anche sulle equazioni di ordine superiore.

Notiamo che, in certi casi, un'equazione differenziale del primo ordine si può scrivere esplicitando $x'(t)$ in funzione di $x(t)$ e t :

$$x'(t) = g(t, x(t)).$$

In tal caso si dice che l'equazione è scritta *in forma normale*, e sarà di questo tipo di equazioni che ci occuperemo nel seguito.

Tanto per fare un esempio di equazione differenziale che *non* derivi dalla fisica, abbiamo visto che se $x(t)$ rappresenta il prezzo di un bene al tempo t , un ragionevole modello per l'evoluzione temporale del prezzo in assenza di eventi esterni è dato dall'equazione differenziale

$$x'(t) = \delta x(t),$$

dove δ rappresenta il tasso di incremento del prezzo nell'unità di tempo.

Se è noto il prezzo x_0 in un certo istante iniziale t_0 , dobbiamo dunque risolvere il *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = \delta x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Abbiamo visto in aula che il problema si può facilmente risolvere scrivendo l'equazione nella forma $x'(t)/x(t) = \delta$, e integrando ambo i membri tra t_0 e t : si trova $x(t) = x_0 e^{\delta(t-t_0)}$.

L'estrema semplicità dell'equazione differenziale che abbiamo appena risolto (che chiede di trovare una funzione proporzionale alla sua derivata...), costituisce una buona spiegazione dell'ubiquità della funzione esponenziale in un gran numero di fenomeni naturali...

Come abbiamo detto, se imponiamo il valore della soluzione $x(t)$ in un punto iniziale t_0 , otteniamo quello che si chiama *problema di Cauchy*: per

una generale equazione del primo ordine in forma normale esso assume la forma

$$\begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Ci sarebbe estremamente utile avere un *teorema di esistenza e unicità* che ci dicesse che il problema ha soluzione, e che questa soluzione è unica.

Nel caso in cui l'equazione differenziale rappresenti il modello di una situazione reale, è evidente l'importanza fisica e filosofica di un risultato di esistenza e unicità di questo tipo: se il modello è corretto, il sistema dovrà evolvere in qualche modo (e quindi ci devono essere soluzioni del problema di Cauchy), mentre l'unicità delle soluzioni corrisponde al requisito di *ripetibilità di un esperimento* (il sistema deve reagire nello stesso modo se sono identiche le condizioni iniziali: *determinismo*).

Si noti che è ragionevole cercare soluzioni del problema di Cauchy definite su un *intervallo* il più largo possibile che contenga l'istante iniziale t_0 : soluzioni su insiemi sconnessi (per esempio, su due intervalli disgiunti) non avrebbero molto senso, perché in una parte del dominio le soluzioni non avrebbero più alcun "collegamento" con la condizione iniziale!

Per cercare di capire che genere di risultato di esistenza e unicità possiamo aspettarci, vediamo un paio di esempi!

ESEMPIO: Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Scrivendo l'equazione nella forma $x'(t)/x^2(t) = 1$ e integrando, si trova che l'unica soluzione è $x(t) = 1/(1-t)$. Siccome una soluzione ci aspettiamo che sia continua e derivabile in un intervallo che contiene il punto iniziale, se ne deduce che la soluzione del problema *non è definita su tutta la retta reale, ma solo sulla semiretta* $(-\infty, 1)$.

Dunque, anche se il secondo membro dell'equazione è estremamente regolare, possiamo sperare solo in un teorema di esistenza e unicità *locale*, che ci assicuri l'esistenza di una soluzione in un opportuno *intorno dell'istante iniziale* t_0 .

ESEMPIO: Si noti che, affinché la nostra equazione differenziale abbia senso, sembra ragionevole assumere che la funzione $g(x, t)$ sia continua (anche se dovremo precisare cosa significa che una funzione di due variabili è continua).

La sola continuità non è però sufficiente a garantire l'unicità della soluzione del problema di Cauchy: ad esempio il problema

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni. Infatti, si vede subito che $x(t) = 0$ è una soluzione. Inoltre, applicando lo stesso trucco usato sopra scopriamo che la funzione $x(t) = t^2/4$ è una soluzione del problema per $t > 0$... e indoviniamo così che tutte le funzioni del tipo

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_0)^2}{4} & \text{se } t \geq t_0 \\ 0 & \text{se } t < t_0 \end{cases}$$

sono soluzioni del problema di Cauchy ($t_0 > 0$ è una costante). Questo esempio è noto come *pennello* o *baffo di Peano*. Ci sono anche soluzioni che “arrivano” alla soluzione nulla, come $x(t) = -\frac{(t-t_0)^2}{4}$ per $t < t_0$...

A questo punto, sappiamo che il nostro teorema di esistenza e unicità potrà darci soltanto un *risultato di esistenza locale*, e che per avere l'unicità dovremo chiedere più che la continuità della funzione g ...

L'enunciato che vedremo la volta prossima ci garantirà esattamente questo, purchè g sia una funzione di due variabili *continua* e con *derivate continue*. Anzi, in realtà avremo ipotesi un po' più generali di queste...

Una classe di equazioni del primo ordine che si possono risolvere esplicitamente (e per le quali la soluzione è *globale*) è costituita dalle *equazioni lineari del primo ordine*: esse sono della forma

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t),$$

dove a e b sono date funzioni continue definite su un certo intervallo (a, b) .

Se imponiamo anche la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ (con $t_0 \in (a, b)$), mostreremo ora che esiste un'unica soluzione, definita su tutto l'intervallo (a, b) : in questo caso particolarmente fortunato abbiamo *esistenza e unicità globale*, e possiamo anche scrivere esplicitamente la soluzione.

Il trucco consiste nel moltiplicare ambo i membri dell'equazione per il *fattore integrante*

$$F(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

Facendo questo, a primo membro avremo la derivata del prodotto $x(t)F(t)$, e integrando ambo i membri tra t_0 e t troviamo la soluzione esplicita del problema di Cauchy:

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(s) ds} b(t) dt \right).$$

ESEMPIO: Si consideri l'equazione lineare del primo ordine

$$x'(t) + \cos t x(t) = \sin 2t.$$

Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per il *fattore integrante* $e^{\sin t}$: otteniamo

$$(x(t)e^{\sin t})' = 2 \sin t \cos t e^{\sin t},$$

da cui integrando $x(t)e^{\sin t} = 2 \sin t e^{\sin t} - 2e^{\sin t} + C$: tutte le soluzioni sono date da

$$x(t) = 2 \sin t - 2 + Ce^{-\sin t},$$

ove C è una costante reale arbitraria. Per un problema di Cauchy, la costante C viene determinata usando la condizione iniziale: ad esempio, se imponiamo $x(0) = 3$ otteniamo la condizione $3 = x(0) = -2 + C$ da cui $C = 5$.

23 Lezione del 17/12/2024 (3 ore)

Dagli esempi visti la volta scorsa, abbiamo capito che quel che vogliamo è un teorema di *esistenza e unicità locale* per le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

In sostanza, vogliamo un risultato che ci dica che se la funzione f è *sufficientemente buona*, allora il problema ammette un'unica soluzione, e questa soluzione è definita *in un opportuno intorno* dell'istante iniziale t_0 .

Un tipico risultato di questo tipo è il seguente:

TEOREMA (Di esistenza e unicità locale o di Cauchy-Lipschitz): Sia $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione di due variabili continua, per cui esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(t, w) - f(t, z)| \leq L|w - z| \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall w, z \in [c, d]$$

(si dice in tal caso che f è *lipschitziana nella seconda variabile*, con una costante che non dipende dalla prima).

Siano poi $t_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$. Allora esiste $\delta > 0$ ed una funzione derivabile $y(t) : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbf{R}$ che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Questa soluzione è unica, nel senso che ogni altra soluzione del problema coincide con $y(t)$ nell'intervallo in cui sono definite entrambe.

Di questo teorema vedremo la dimostrazione nel corso di Analisi II, per quest'anno ci limiteremo a dimostrare l'unicità (in una delle prossime lezioni). Per il momento faremo comunque qualche osservazione sulle ipotesi, sul loro significato e sulle loro conseguenze in modo di impadronirci maggiormente dell'enunciato.

OSSERVAZIONI:

- Per capire l'enunciato, ci occorre la definizione di funzione continua in due variabili. In realtà, essa non cambia molto rispetto all'analoga definizione in una variabile: se $(x_0, y_0) \in A \subset \mathbf{R}^2$ e $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, diremo che f è continua in (x_0, y_0) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

ogni volta che la distanza tra i punti $(x, y) \in A$ e (x_0, y_0) è minore di δ .

Esattamente come in una variabile, si verifica facilmente che somma, prodotto, rapporto di funzioni continue è una funzione continua (se non si annulla il denominatore), che composizione di funzioni continue è continua, che i polinomi e le altre funzioni elementari sono continue. Inoltre, vale il teorema di Weierstrass: una funzione continua su un rettangolo chiuso e limitato ammette massimo.

Torneremo comunque sul concetto di continuità in due variabili nel corso di Analisi 2: ci accorgeremo che i limiti in più variabili possono essere decisamente difficili da calcolare...

- La condizione di lipschitzianità di f serve a garantire l'unicità della soluzione (per l'esistenza basterebbe la continuità): abbiamo visto che se f è soltanto continua, il problema di Cauchy può avere più di una soluzione.

Fortunatamente, la lipschitzianità è implicata da condizioni più maneggevoli da verificare: per esempio, è sufficiente che esista la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$, e che essa sia una funzione continua in tutto il rettangolo $[a, b] \times [c, d]$. Infatti, in tali condizioni il teorema di Weierstrass ci assicura che la funzione continua $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$ ammette massimo L sul rettangolo. Siano ora $t \in [a, b]$, $w, z \in [c, d]$. Usando il teorema di Lagrange (in una variabile) otteniamo:

$$|f(t, w) - f(t, z)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, c) \right| |w - z| \leq L|w - z|,$$

dove c è un opportuno punto compreso tra w e z .

Esistono anche teoremi che garantiscono l'unicità sotto ipotesi un po' più generali per alcune classi speciali di equazioni (per esempio per le equazioni a variabili separabili).

- Abbiamo visto che in generale non ci possiamo aspettare che la soluzione sia definita su tutto l'intervallo $[a, b]$: con le ipotesi generali che abbiamo scelto possiamo pretendere soltanto *esistenza locale*. Per avere *esistenza globale* ci sarà bisogno di avere qualche informazione supplementare sulla funzione f : per esempio, abbiamo visto che si ha esistenza globale nel caso delle equazioni lineari (e si riesce anche a scrivere esplicitamente la soluzione!).

ESEMPIO: La continuità in due variabili è... una brutta bestia! Consideriamo ad esempio la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La restrizione di f a qualunque retta per $(0, 0)$ è continua. Infatti f è identicamente nulla sugli assi coordinati. Sulla retta $y = mx$ (con $m \neq 0$) abbiamo, per $x \neq 0$, $f(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2}$, che tende a 0 per $x \rightarrow 0$.

D'altra parte, f è discontinua in 0 perchè sulla parabola $y = x^2$ abbiamo $f(x, x^2) = 1/2$.

Riprendiamo il problema di Cauchy di prima. Se f è definita su un sottoinsieme aperto del piano (t, y) (cioè un sottoinsieme A tale che ogni $(t, y) \in A$ è centro di un cerchietto non banale completamente contenuto in A) e le ipotesi del teorema valgono *localmente* (cioè la funzione è continua e ogni punto ha un intorno rettangolare in cui vale la condizione di Lipschitz), allora il problema di Cauchy ammette soluzione unica *qualunque sia il dato iniziale in A* .

Questo ha conseguenze molto importanti: per prima cosa, ogni soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

con $(t_0, y_0) \in A$ è prolungabile in modo unico ad una *soluzione massimale*, ossia ad una soluzione definita su un intervallo il più ampio possibile. Inoltre, due soluzioni massimali distinte non possono mai "toccarsi": i loro grafici rimangono sempre disgiunti (se non lo fossero, avremmo due distinte soluzioni

massimali dello stesso problema di Cauchy). Infine, si può far vedere che una soluzione massimale deve tendere al bordo dell'insieme A quando t tende agli estremi dell'intervallo su cui è definita.

Per mostrare la potenza del teorema di esistenza e unicità locale, abbiamo fatto qualche cenno sullo studio qualitativo delle soluzioni di un'equazione differenziale del primo ordine $y'(t) = f(t, y(t))$.

Innanzitutto, abbiamo osservato che il secondo membro dell'equazione $f(t, y)$ prescrive la derivata di una soluzione $y(t)$ che passa per il punto (t, y) : possiamo dunque pensare al secondo membro dell'equazione come ad un "campo di direzioni" cui ogni soluzione deve essere tangente. Ad esempio, in tutti i punti (t, y) in cui $f(t, y) = 1$, la soluzione deve avere "pendenza 1"...

Grazie a questa semplice osservazione, spesso si riescono a dire molte cose sulle soluzioni anche senza risolvere esplicitamente l'equazione differenziale!

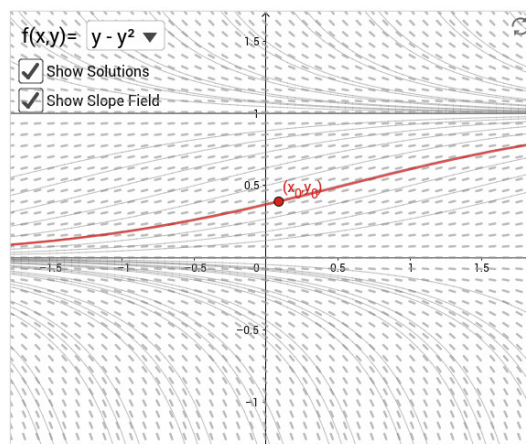
ESEMPIO: Consideriamo l'equazione $y'(t) = y(t) - (y(t))^2$ (equazione logistica): si tratta di un'equazione autonoma il cui secondo membro si annulla per $y = 0$ e per $y = 1$ (soluzioni costanti)²¹. Per il teorema di esistenza e unicità locale, tutte le altre soluzioni *non possono intersecare* queste due soluzioni costanti.

Siccome l'equazione è autonoma, se $y(t)$ è una soluzione lo è anche $y(t-t_0)$ per ogni $t_0 \in \mathbf{R}$: è sufficiente studiare la soluzione del problema di Cauchy $y(0) = y_0$ al variare di $y_0 \in \mathbf{R}$.

Grazie a quanto osservato sopra, ogni soluzione con $0 < y_0 < 1$ rimarrà sempre nella striscia $0 < y < 1$ e sarà strettamente crescente (perché nella striscia il secondo membro dell'equazione è positivo). Dunque, in questo caso la soluzione esisterà per ogni $t \in \mathbf{R}$. Abbiamo anche visto che si deve avere necessariamente $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$: una funzione crescente ammette infatti limiti all'infinito, e questi limiti dovranno essere compresi tra 0 e 1. D'altra parte, il limite a $+\infty$ *non può* essere strettamente minore di 1: supponiamo per assurdo che sia $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(x) = \bar{y} < 1$. Ma allora per $t \rightarrow +\infty$ avremo $y'(t) \rightarrow \bar{y} - \bar{y}^2 > 0$ (grazie all'equazione differenziale), il che è assurdo perché se una funzione tende ad un limite finito, allora la sua derivata tende a 0 (almeno su una successione di punti che vanno a $+\infty$...): si tratta di una conseguenza immediata del teorema di Lagrange. In maniera del tutto analoga si dimostra che $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$.

In figura vediamo alcune soluzioni dell'equazione logistica, il campo di direzioni associato a $f(t, y)$ e la soluzione di un problema di Cauchy:

²¹In classe abbiamo esaminato brevementemente una versione un po' più generale di questa equazione, vale a dire $y' = \alpha y - \beta y^2$.



Cliccando sulla figura si apre un foglio GeoGebra interattivo che permette di selezionare anche alcune altre equazioni differenziali.

Se consideriamo la stessa equazione con condizione iniziale $y_0 > 1$, la soluzione sarà invece *decescente* e con lo stesso ragionamento di prima vediamo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$. Se seguiamo la soluzione nel passato, è facile vedere che esiste $\bar{t} < 0$ tale che $\lim_{t \rightarrow \bar{t}^+} y(t) = +\infty$.

Dividiamo infatti ambo i membri dell'equazione per $y(t) - y^2(t)$ e integriamo tra 0 e t (grazie al cambio di variabili $y = y(t)$): otteniamo infatti

$$(*) \quad t = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{y - y^2}.$$

Ne segue che la soluzione tende a $+\infty$ quando il tempo t tende a

$$\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{y - y^2},$$

e l'ultimo integrale improprio è *convergente*.

Un ragionamento simile può essere fatto quando $y_0 < 0$: in questo caso abbiamo una soluzione decrescente $y(t)$ tale che $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$ e tale che esiste $\bar{t} > 0$ tale che $\lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} y(t) = -\infty$.

Volendo, si può anche studiare la derivata seconda delle soluzioni: $y''(t) = (y(t) - y^2(t))' = y'(t)(1 - 2y(t)) = (y(t) - y^2(t))(1 - 2y(t))$, da cui si ricava che le soluzioni hanno un flesso nei punti t in cui $y(t) = 1/2$.

Si noti che, in realtà, l'equazione può essere risolta esplicitamente (basta calcolare l'integrale in $(*)$ e esplicitare $y(t)$ in funzione di t . Si trova $y(t) = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-t}}$.

24 Lezione del 18/12/2023 (3 ore)

Abbiamo studiato la convergenza di un po' di serie, scelte tra le seguenti che vi lascio per ulteriori esercizi (con qualche integrale improprio che non vi farà mai male...):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx; \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}; \\
 & \int_0^3 (x+1) \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx; \quad \int_0^4 \frac{x}{x^2-2x-3} dx; \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx; \\
 & \int_0^1 \sin(1/x) dx; \quad \int_0^{+\infty} x^3 e^{-2x^2} dx \quad \int_{-1}^3 \frac{x e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx; \\
 & \int_0^1 \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+1}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x}; \\
 & \int_1^{+\infty} x^3 e^{-x} dx; \quad \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} dx; \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n\sqrt{n}+n+5} \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/\sqrt{n}} - 1) \sin(2/n) \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{\log n} \quad (*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{\sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^x (\log n)^2 \\
 & (*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} (\cos x)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{n(x+1)} x^4 n^5 \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n^x\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-5)^n}{n3^n} \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + \sin n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n - \sqrt{n}}{n+1}\right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right] \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{2+n^2}{1+n^2}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(1/3^n) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n!}
 \end{aligned}$$

Oltre alle equazioni lineari, un'altra ampia classe di equazioni differenziali del primo ordine si può risolvere grazie al trucchetto che abbiamo usato prima per i primi due-tre esempi: si tratta delle così dette *equazioni autonome*, cioè equazioni della forma

$$x'(t) = h(x(t)),$$

con h una data funzione continua definita su un intervallo aperto non banale J .

Se la funzione h si annulla in qualche punto dell'intervallo J , abbiamo delle soluzioni costanti dette *equilibri*: se $x_0 \in J$ e $h(x_0) = 0$, allora $x(t) = x_0$ è una soluzione (di equilibrio) dell'equazione differenziale, definita per ogni t reale.

Un'altra simpatica caratteristica delle equazioni autonome è che se $x(t)$ è una soluzione (definita su un qualche intervallo I), allora anche le traslate $x(t - t_0)$ sono soluzioni (definite sugli intervalli traslati) per ogni t_0 reale.

Sia ora $x_0 \in J$ un valore *non di equilibrio*: $h(x_0) \neq 0$. Anzi, per fissare le idee supponiamo $h(x_0) > 0$.

Tentiamo di risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = h(x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Se $x(t)$ è una soluzione, per continuità avremo $h(x(t)) \neq 0$ in un intorno di t_0 , quindi l'equazione può essere riscritta $\frac{x'(t)}{h(x(t))} = 1$, da cui integrando tra t_0 e t :

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(t)}{h(x(t))} dt = t - t_0.$$

Sia $G(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{h(x)}$: si tratta di una funzione definita in un intorno di x_0 (precisamente, il più grande intervallo contenente x_0 in cui $h(x) > 0$) e *strettamente crescente* in tale intorno: è quindi invertibile tra il nostro intorno di x_0 e un intorno di 0. Sia G^{-1} l'inversa. Grazie all'equazione integrale scritta sopra abbiamo $G(x(t)) = t - t_0$, da cui $x(t)$ è soluzione se e soltanto se soddisfa $x(t) = G^{-1}(t - t_0)$. Abbiamo quindi trovato la soluzione, e che c'è solo questa fintanto che $h(x(t)) > 0$.

D'altra parte, a destra o a sinistra di t_0 la soluzione potrebbe arrivare ad un equilibrio (e potenzialmente distruggere l'unicità come nell'esempio del baffo di Peano): questo però *non* può succedere se h è derivabile negli equilibri.

Infatti, se succedesse dovrebbero esserci $t_1 > t_0$, $x_1 > x_0$ tali che $h(x_1) = 0$ (quindi x_1 è un equilibrio), $h(x(t)) > 0$ per $t \in (t_0, t_1)$ e $x(t_1) = x_1$. Avremmo allora

$$(*) \quad \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{h(x)} = t_1 - t_0,$$

cioè l'integrale improprio a sinistra dovrebbe essere *convergente*.

Ma questo *non può succedere* se la funzione $h(x)$ è *derivabile* nel punto di equilibrio x_1 : infatti abbiamo $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{h(x)}{x-x_1} = h'(x_1)$ da cui, per x sufficientemente vicino a x_1 ,

$$\left| \frac{h(x)}{x-x_1} \right| \leq 1 + |h'(x_1)|,$$

ossia $\frac{1}{h(x)} \geq \frac{C}{|x-x_1|}$ per un'opportuna costante positiva C . Ne segue che l'integrale improprio in (*) diverge (per confronto con un integrale improprio divergente): la soluzione non può arrivare all'equilibrio x_1 e rimarrà unica! In maniera analoga, nell'ipotesi in cui h è derivabile in tutti gli equilibri, si dimostra che la soluzione non può arrivare ad un equilibrio $x_2 < x_0$ ad un tempo finito $t < t_0$.

Riassumendo, abbiamo dimostrato il seguente

TEOREMA: Sia $h(x)$ una funzione continua su un intervallo aperto J , derivabile in tutti i punti di equilibrio $\bar{x} \in J$ con $h(\bar{x}) = 0$. Se $x_0 \in J$ è tale che $h(x_0) \neq 0$, allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = h(x(t)), \\ x'(t_0) = x_0, \end{cases}$$

ha una soluzione $x(t)$ definita su un intervallo contenente t_0 . Tale soluzione è unica, nel senso che se $x_1 : I_1 \rightarrow \mathbf{R}$, $x_2 : I_2 \rightarrow \mathbf{R}$ sono soluzioni definite su due intervalli contenenti t_0 , esse coincidono su $I_1 \cap I_2$.

In realtà, tutto il ragionamento fatto si generalizza ad una classe ancora più ampia di equazioni, le *equazioni a variabili separabili*:

TEOREMA: Sia h una funzione continua su un intervallo aperto J , derivabile in tutti i punti di equilibrio $\bar{x} \in J$ con $h(\bar{x}) = 0$. Sia α una funzione continua in un intervallo aperto non banale I . Se $t_0 \in I$ e $x_0 \in J$ è tale che $h(x_0) \neq 0$, allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(t) h(x(t)), \\ x'(t_0) = x_0, \end{cases}$$

ha una soluzione $x(t)$ definita su un intervallo contenente t_0 . Tale soluzione è unica, nel senso che se $x_1 : I_1 \rightarrow \mathbf{R}$, $x_2 : I_2 \rightarrow \mathbf{R}$ sono soluzioni definite su due intervalli contenenti t_0 , esse coincidono su $I_1 \cap I_2$.

Per dimostrare il teorema si procede esattamente come prima: se $x(t)$ è una soluzione, in un intorno di t_0 avremo

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = \alpha(t).$$

Integriamo ambo i membri tra t_0 e t e, come prima, sfruttiamo l'invertibilità della funzione $G(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{h(x)}$.

ESEMPIO: Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \cos t x(t) \log(x(t)), \\ x(0) = e. \end{cases}$$

L'unico valore di equilibrio è $x = 1$, che non coincide con la condizione iniziale. Separando le variabili otteniamo

$$\frac{x'(t)}{x(t) \log x(t)} = \cos t,$$

da cui integrando ambo i membri tra 0 e t e sfruttando la condizione iniziale $\log \log x(t) = \sin t$, ossia $x(t) = e^{e^{\sin t}}$.

Abbiamo concluso la lezione svolgendo alcuni esercizi sulle serie, la maggioranza dei quali erano presi dalla lista della lezione precedente.

Come promesso, dimostriamo la parte "unicità" del teorema di esistenza e unicità locale. Ci serve il seguente

LEMMA: Sia $y(t) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Supponiamo che $y(a) = 0$ (oppure che $y(t_0) = 0$ per almeno un $t_0 \in [a, b]$), e che esista una costante $L > 0$ tale che

$$|y'(t)| \leq L|y(t)|$$

per ogni $t \in [a, b]$. Allora $y(t) = 0$ per ogni $t \in [a, b]$.

DIM.: Sia $\delta > 0$, e denotiamo con M il massimo della funzione $|y(t)|$ sull'intervallo $[a, a + \delta]$. Se $t \in [a, a + \delta]$, grazie al teorema di Lagrange otteniamo

$$|y(t)| = |y(t) - y(a)| = |y'(c)| |t - a| \leq L|y(c)|\delta \leq LM\delta,$$

dove c è un punto opportuno tra a e t . Prendendo il massimo del membro di sinistra della nostra disuguaglianza otteniamo $M(1 - L\delta) \leq 0$: se scegliamo $\delta < 1/L$, quest'ultima stima implica che $M = 0$, cioè $y(t)$ si annulla identicamente tra a e $a + \delta$. Ripetendo questo stesso ragionamento, troveremo che $y(t)$ si annulla anche tra $a + \delta$ e $a + 2\delta$... e in un numero finito di passi otterremo la tesi. Con minime modifiche, la stessa dimostrazione vale anche se l'ipotesi $y(a) = 0$ è sostituita da $y(t_0) = 0$, per qualche $t_0 \in [a, b]$. Q.E.D.

DIMOSTRAZIONE DELL'UNICITÀ: Siano $y_1(t), y_2(t) : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbf{R}$ due soluzioni del problema di Cauchy, e poniamo $z(t) = y_1(t) - y_2(t)$. Evidentemente, $z(t_0) = 0$. Inoltre:

$$|z'(t)| = |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \leq L|y_1(t) - y_2(t)| = L|z(t)|.$$

Applicando il Lemma, otteniamo che $z(t)$ si annulla identicamente nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, e il teorema è dimostrato. Q.E.D.

25 Lezione del 7/1/2025 (3 ore)

Passiamo ora a considerare brevemente che aspetto assume il problema di Cauchy per un *sistema di equazioni ordinarie del primo ordine*: per un sistema di n equazioni in n incognite $y_1(t), \dots, y_n(t)$ si avrà una scrittura del tipo

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ y_1(t_0) = y_1^0 \\ \vdots \\ y_n(t_0) = y_n^0 \end{cases}$$

dove f_1, \dots, f_n sono n funzioni note di $n+1$ variabili, definite in un opportuno intorno rettangolare Q del dato iniziale $(t_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$.

Come spesso avviene in matematica, quando si studiano i sistemi di equazioni differenziali l'uso di una buona notazione produce dei benefici quasi miracolosi: l'idea è di considerare le nostre n funzioni incognite come *un'unica funzione incognita a valori vettoriali*...

Riscriviamo le n incognite del nostro sistema di equazioni differenziali come un'unica funzione incognita vettoriale

$$y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$$

(dunque, $y : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, dove I è un intorno di t_0).

Analogamente, possiamo raggruppare le n funzioni f_1, \dots, f_n in un'unica funzione vettoriale $f = (f_1, \dots, f_n) : Q \rightarrow \mathbf{R}^n$, e altrettanto possiamo fare con i dati iniziali definendo $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$. Utilizzando questa notazione stenografica, il problema di Cauchy diventa

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y^0 \end{cases}$$

ossia formalmente identico a quello per un'unica equazione: l'unica differenza è che ora le quantità coinvolte vanno interpretate come vettori!

Questa fortissima somiglianza suggerisce che il Teorema di esistenza e unicità locale valga anche per i sistemi. Ecco infatti l'enunciato:

Se la funzione vettoriale f è continua in tutti i punti $(t, y) \in Q \subset \mathbf{R}^n$ e lipschitziana nella variabile $y \in \mathbf{R}^n$ (con costante indipendente da t), allora esiste un'unica soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy per il sistema, definita in un intorno di t_0 .

Ovviamente, dobbiamo precisare cosa s'intende per continuità e lipschitzianità di funzioni vettoriali. Per la continuità non c'è problema: una funzione vettoriale è continua se sono continue le sue componenti. Per quanto riguarda la lipschitzianità, chiediamo che valga una disuguaglianza del tipo

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|,$$

formalmente identica a quella che avevamo nel caso scalare: l'unica differenza è che i moduli vanno interpretati come moduli di un vettore. Ricordiamo che se $y = (y_1, \dots, y_n)$, allora $|y| = (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$.

OSSERVAZIONE: Naturalmente non dimostreremo il teorema di esistenza locale per i sistemi, come non abbiamo dimostrato quello per le equazioni. I più volenterosi possono invece adattare la dimostrazione del teorema di unicità al caso dei sistemi: essa funziona in maniera quasi del tutto identica.

C'è un'unica ma importante differenza nella dimostrazione del Lemma: il teorema di Lagrange è infatti *falso* per le funzioni vettoriali. È vera però una sua versione un po' più debole, che è esattamente quel che ci serve nella dimostrazione del lemma (per il resto identica a quella che abbiamo visto nella scorsa lezione):

Sia $y(t) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ una funzione vettoriale derivabile sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora

$$|y(b) - y(a)| \leq L \cdot (b - a),$$

dove L è il massimo di $|y'(t)|$ sull'intervallo $[a, b]$.²²

La necessità di estendere il teorema di esistenza e unicità locale al caso dei sistemi non sorge da un peregrino desiderio di generalità, ma da un'effettiva necessità applicativa.

²²Dimostrazione:

$$|y(b) - y(a)| = \left| \int_a^b y'(t) dt \right| \leq \int_a^b |y'(t)| dt \leq L(b - a).$$

Prima di tutto, molti dei problemi della fisica sono intrinsecamente vettoriali: per determinare la traiettoria di un punto materiale, devo trovare le 3 componenti del vettore posizione in funzione del tempo.

Inoltre, le equazioni di ordine superiore al primo si possono scrivere in maniera equivalente come sistemi di equazioni del primo ordine: si capisce subito l'importanza di questo se si pensa che, in fisica, le equazioni che provengono da problemi di dinamica sono del secondo ordine!

Consideriamo infatti il problema di Cauchy per una generica equazione del secondo ordine:

$$(P) \begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Introducendo l'incognita ausiliaria $v(t)$, il problema si può tradurre nel seguente (per un sistema di 2 equazioni del primo ordine):

$$(P') \begin{cases} y'(t) = v(t) \\ v'(t) = f(t, y(t), v(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

I due problemi di Cauchy sono del tutto equivalenti: saper risolvere il secondo equivale a saper risolvere il primo, e viceversa.

D'altra parte, il teorema di esistenza e unicità locale per i sistemi del primo ordine ci dice che se f è continua, ed è anche lipschitziana nelle ultime due variabili, allora il problema (P) ammette una soluzione definita in un intorno di t_0 , e che tale soluzione è unica.

Siamo ora in grado di cominciare lo studio di una classe importante di equazioni differenziali del II ordine: le equazioni lineari.

La generica equazione differenziale lineare del II ordine ha la seguente forma:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t),$$

dove a, b, f sono funzioni continue note, definite su un intervallo I .

Evidentemente, a questo tipo di equazione si può applicare il discorso fatto sopra, e si scopre che per il problema di Cauchy associato vale il teorema di esistenza e unicità locale. Anzi, è possibile dimostrare che per le equazioni lineari si ha *esistenza globale*: se fissiamo le condizioni iniziali $y(t_0), y'(t_0)$, esiste un'unica soluzione dell'equazione, ed essa è definita su *tutto* l'intervallo I .

Un'equazione lineare si dice poi *omogenea* se $f(t) = 0$. Le soluzioni di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine hanno una struttura particolarmente semplice:

TEOREMA: Siano $a, b : I \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni continue. Allora l'insieme \mathcal{V} delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$(L) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

formano uno spazio vettoriale su \mathbf{R} di dimensione 2. In altre parole:

- (i) Se $y_1(t), y_2(t) : I \rightarrow \mathbf{R}$ sono due soluzioni e $c \in \mathbf{R}$, allora anche $y_1(t) + y_2(t)$ e $cy_1(t)$ sono soluzioni (questo è il "principio di sovrapposizione" dei fisici).
- (ii) Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono due soluzioni che non siano multiple l'una dell'altra, esse formano una base di \mathcal{V} . In particolare, ogni altra soluzione dell'equazione sarà della forma

$$y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t),$$

con C_1 e C_2 costanti reali.

DIM.: Il punto (i) si verifica immediatamente sostituendo nell'equazione: è vero perché l'equazione (L) è lineare, e la derivata pure (la derivata della somma è la somma delle derivate...).

La dimostrazione del punto (ii) è conseguenza del teorema di esistenza e unicità. Sia infatti $t_0 \in I$ e si considerino i seguenti problemi di Cauchy:

$$(P_1) \quad \begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = 1 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases} \quad (P_2) \quad \begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 1 \end{cases}$$

Denotiamo $\tilde{y}_1(t)$ l'unica soluzione di (P_1) , $\tilde{y}_2(t)$ l'unica soluzione di (P_2) . Evidentemente, \tilde{y}_1 e \tilde{y}_2 non possono essere multiple l'una dell'altra, perché le condizioni iniziali non lo sono: quindi lo spazio delle soluzioni \mathcal{V} ha almeno dimensione 2.

D'altra parte, affermo che \tilde{y}_1 e \tilde{y}_2 formano una base di \mathcal{V} . Sia infatti $y(t)$ una qualunque altra soluzione di (L), e definiamo $C_1 = y(t_0)$, $C_2 = y'(t_0)$. Evidentemente, $y(t)$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = C_1 \\ y'(t_0) = C_2 \end{cases}$$

D'altra parte, per come sono state definite \tilde{y}_1 e \tilde{y}_2 , si verifica subito che *anche la funzione $C_1\tilde{y}_1(t) + C_2\tilde{y}_2(t)$ è una soluzione dello stesso problema di Cauchy.* Per il teorema di unicità si deve dunque avere

$$y(t) = C_1\tilde{y}_1(t) + C_2\tilde{y}_2(t) \quad \forall t \in I,$$

e siamo riusciti a scrivere $y(t)$ come combinazione lineare degli elementi della base. Q.E.D.

Tra non molto, vedremo che anche l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare non omogenea ha una struttura piuttosto semplice.

Dal punto di vista pratico, il teorema ci dice che per risolvere l'equazione (L) basta saper trovare *due* soluzioni indipendenti della stessa.

Non sempre la ricerca di due soluzioni indipendenti è fattibile: è invece molto semplice quando l'equazione è a *coefficienti costanti*, cioè quando a, b sono numeri reali (indipendenti da t). Consideriamo cioè un'equazione del tipo

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0,$$

con $a, b \in \mathbf{R}$.

Se proviamo a risolvere un'equazione lineare ed omogenea *del primo ordine* a coefficienti costanti, vediamo che le soluzioni sono multiple di un esponenziale del tipo $y(t) = e^{kt}$. Questo suggerisce di cercare una soluzione dello stesso tipo anche per l'equazione del secondo ordine

$$(A) \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0.$$

Sostituendo si trova che *l'esponenziale $y(t) = e^{kt}$ è soluzione dell'equazione se e solo se k soddisfa l'equazione di secondo grado*

$$(B) \quad k^2 + ak + b = 0,$$

detta equazione caratteristica.

Se l'equazione caratteristica ha due radici reali e distinte k_1, k_2 , allora tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono della forma $y(t) = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}$ per $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

Negli altri casi, è un po' più complicato ma sempre fattibile!

Riassumendo, si possono presentare 3 casi:

1. *L'equazione caratteristica (B) ha due radici reali e distinte k_1 e k_2 .* In queste condizioni, abbiamo appena visto che e^{k_1t} e e^{k_2t} sono due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale (A), per cui il teorema ci assicura che *tutte* le soluzioni possono essere scritte come

$$y(t) = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

2. L'equazione caratteristica (B) ha due radici reali e coincidenti \bar{k} . In tali condizioni, $y_1(t) = e^{\bar{k}t}$ è una soluzione, ma ce ne serve un'altra! Si osservi che il fatto che \bar{k} sia una radice doppia implica che $a = -2\bar{k}$ e $b = \bar{k}^2$, per cui l'equazione (B) si scrive $y'' - 2\bar{k}y' + \bar{k}^2y = 0$. Con una sostituzione diretta, si verifica che $y_2(t) = te^{\bar{k}t}$ è un'altra soluzione (indipendente dalla prima), per cui la soluzione generale dell'equazione differenziale data sarà

$$y(t) = C_1 e^{\bar{k}t} + C_2 t e^{\bar{k}t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

3. L'equazione caratteristica ha due radici complesse e coniugate $\alpha \pm i\beta$. In questo caso, abbiamo due soluzioni formali $\tilde{y}_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$ e $\tilde{y}_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}$, e non sappiamo bene cosa farcene...

Per fortuna, è possibile dare un senso agli esponenziali complessi, e trasformare queste "inutili" soluzioni formali nella soluzione generale reale dell'equazione: scopriremo che tutte le soluzioni dell'equazione data sono del tipo

$$(*) y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Definiamo l'esponenziale complesso: se $z \in \mathbf{C}$, poniamo

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Con ragionamenti non difficili che siamo costretti ad omettere per motivi di tempo, non è difficile verificare che la serie esponenziale converge per ogni $z \in \mathbf{C}$ (Come è ragionevole, diremo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + iy_n) = \bar{x} + i\bar{y}$ se $x_n \rightarrow \bar{x}$ e $y_n \rightarrow \bar{y}$ come successioni reali. A questo punto, diremo che una serie a valori complessi converge se esiste il limite delle sue somme parziali...). Si può anche far vedere che $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, per cui il nome "esponenziale complesso" è legittimo.

Cosa succede se calcoliamo l'esponenziale complesso di un numero immaginario puro? Usando la definizione e ricordando le serie di Taylor di seno e coseno, non è affatto difficile verificare che vale la *formula di Eulero*

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta.$$

In conclusione, avremo dunque

$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta).$$

[In alternativa, si potrebbe prendere questa formula come definizione, per la verità un po' misteriosa, di esponenziale complesso. Si verifichi per esercizio che vale la proprietà dell'esponenziale richiamata sopra, cioè che si ha

$$e^{(\alpha_1+i\beta_1)+(\alpha_2+i\beta_2)t} = e^{\alpha_1+i\beta_1 t} \cdot e^{\alpha_2+i\beta_2 t}.]$$

Se prendiamo la funzione $e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i \sin(\beta t)$ e la deriviamo (considerando formalmente i come una costante), troviamo

$$(e^{i\beta t})' = i\beta e^{i\beta t},$$

cioè la regola di derivazione per l'esponenziale immaginario coincide formalmente con quella per l'esponenziale reale. Più in generale (derivata del prodotto...), $(e^{(\alpha+i\beta)t})' = (\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t}$. Ne segue subito che se $\alpha \pm i\beta$ sono radici complesse coniugate dell'equazione caratteristica, allora $e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t \pm i \sin \beta t)$ sono soluzioni a valori complessi dell'equazione differenziale.

Dunque, abbiamo due soluzioni a valori complessi

$$\tilde{y}_{1,2}(t) = e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t \pm i \sin \beta t)$$

e una loro qualunque combinazione lineare (a coefficienti complessi) è ancora una soluzione.

Siccome vogliamo soluzioni *reali*, ci conviene però prendere

$$y_1(t) = \frac{\tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t)}{2} = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad y_2(t) = \frac{\tilde{y}_1(t) - \tilde{y}_2(t)}{2i} = e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

La soluzione generale dell'equazione nel caso delle radici complesse coniugate sarà dunque

$$y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)).$$

26 Lezione del 8/1/2025 (3 ore)

Passiamo infine a considerare un'equazione lineare *completa*

$$(B) \quad y'' + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t),$$

dove $a(t)$, $b(t)$ e $f(t)$ sono funzioni continue definite su un certo intervallo I . Come è fatto l'insieme delle soluzioni?

Grazie alla linearità dell'equazione, è immediato verificare che la *differenza di due soluzioni* è una soluzione dell'equazione omogenea associata (ottenuta prendendo $f(t) = 0$ nell'equazione (B)).

In altre parole, se siamo capaci di trovare una soluzione $y_0(t)$ dell'equazione completa (B), tutte le altre si ottengono sommando a $y_0(t)$ le soluzioni dell'equazione omogenea... La professoressa di Algebra Lineare con Elementi di Geometria concluderebbe che l'insieme delle soluzioni dell'equazione (B) forma uno spazio affine su \mathbf{R} di dimensione 2.

Visto che le soluzioni dell'equazione omogenea siamo capaci di trovarle, almeno nel caso delle equazioni a coefficienti costanti, si capisce come sia importante trovare un metodo generale per trovare una *soluzione particolare* di un'equazione lineare non omogenea... Nel seguito vedremo alcuni metodi per farlo!

Un metodo che *funziona sempre*, anche se spesso conduce a calcoli piuttosto complicati e antipatici, è il seguente:

TEOREMA (Metodo della variazione delle costanti): Data l'equazione (B), supponiamo di conoscere la soluzione generale $y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$ dell'equazione OMOGENEA associata. Allora si possono trovare due funzioni derivabili $A(t)$, $B(t)$ soluzioni del sistema

$$(C) \begin{cases} A'(t)y_1(t) + B'(t)y_2(t) = 0, \\ A'(t)y_1'(t) + B'(t)y_2'(t) = f(t). \end{cases}$$

Inoltre, le funzioni $A(t)$, $B(t)$ così trovate hanno la proprietà che

$$(D) y_0(t) = A(t)y_1(t) + B(t)y_2(t)$$

è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (B).

DIM.: Si arriva facilmente al sistema (C) cercando una soluzione dell'equazione completa del tipo (D): $y_0(t) = A(t)y_1(t) + B(t)y_2(t)$. Sostituiamo quest'espressione nell'equazione, imponendo arbitrariamente la condizione aggiuntiva $A'(t)y_1(t) + B'(t)y_2(t) = 0$ (che è la prima equazione del sistema (C)). Si trova che l'equazione è soddisfatta se e solo se si ha $A'(t)y_1'(t) + B'(t)y_2'(t) = f(t)$, che è poi la seconda equazione del sistema.

Dunque, se riusciamo a trovare due funzioni continue $A'(t)$ e $B'(t)$ che soddisfano il nostro sistema, possiamo poi sceglierne due primitive $A(t)$ e $B(t)$ (la loro esistenza è assicurata dal teorema fondamentale del calcolo integrale), ed abbiamo la soluzione desiderata.

Ci rimane da mostrare che il sistema (C) ammette *sempre* una ed una sola coppia $A'(t)$, $B'(t)$ di funzioni soluzione, e che queste sono continue

sull'intervallo I dove sono definite le funzioni $a(t)$, $b(t)$ e $f(t)$ che compaiono nell'equazione differenziale.

Dal corso di geometria sappiamo che il sistema (C) ammette una ed una sola soluzione se sappiamo che la matrice

$$W(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$$

(nota come *matrice wronskiana*) è invertibile per ogni valore del parametro t (cioè se ha sempre determinante non nullo): infatti, il sistema (C) si scrive

$$W(t) \begin{pmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, una matrice 2×2 è invertibile se e soltanto se le sue colonne *non* sono multiple l'una dell'altra.

Se per assurdo esistessero t_0 e $c \in \mathbf{R}$ tali che $y_1(t_0) = cy_2(t_0)$ e $y_1'(t_0) = cy_2'(t_0)$, il teorema di unicità per il problema di Cauchy ci permetterebbe di concludere che $y_1(t) = cy_2(t)$ per ogni $t \in I$.

Infatti, sia $y_1(t)$ che $cy_2(t)$ sarebbero soluzione di uno stesso problema di Cauchy, vale a dire

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = y_1(t_0) \\ y'(t_0) = y_1'(t_0) \end{cases}$$

e quindi dovrebbero coincidere. Questo è assurdo perchè per ipotesi y_1 e y_2 generano lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea, e devono quindi essere indipendenti.

Rimane da verificare che $A'(t)$ e $B'(t)$ sono continue in I . Abbiamo evidentemente

$$\begin{pmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix} = W^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

e l'inversa della matrice wronskiana si scrive esplicitamente come segue:

$$W^{-1}(t) = \frac{1}{\det W(t)} \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix}.$$

Gli elementi della matrice $W^{-1}(t)$ sono evidentemente funzioni continue, in quanto $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono funzioni derivabili due volte, e abbiamo verificato sopra che il determinante di $W(t)$ è una funzione (evidentemente continua) che non si annulla mai (perché la matrice ha sempre rango due). Q.E.D

Come esempio di applicazione del metodo della variazione delle costanti arbitrarie, abbiamo considerato l'equazione

$$y'' - y = \frac{1}{1 + e^{2t}},$$

e abbiamo scoperto che una soluzione particolare è data da

$$y_0(t) = -\frac{1}{2} + \frac{e^t}{2} \arctan e^{-t} - \frac{e^{-t}}{2} \arctan e^t,$$

per cui la soluzione generale sarà

$$y(t) = Ae^t + Be^{-t} - \frac{1}{2} + \frac{e^t}{2} \arctan e^{-t} - \frac{e^{-t}}{2} \arctan e^t.$$

Abbiamo poi risolto, ancora con il metodo della variazione delle costanti l'equazione lineare del secondo ordine $y''(x) + y(x) = \tan x$. La soluzione è

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} \cos x \log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right|.$$

Fortunatamente per noi, in alcuni casi si può trovare una soluzione particolare di un'equazione lineare a coefficienti costanti *senza bisogno di usare il metodo della variazione delle costanti*: questo succede quando il termine noto $f(t)$ è il prodotto di un polinomio per un esponenziale (eventualmente complesso).

Vogliamo cioè trovare una soluzione particolare di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti con termine noto del tipo

$$f(t) = e^{\alpha t} P(t) \quad \text{con } P(t) \text{ polinomio di grado } n,$$

(oppure

$$f(t) = e^{\alpha t} (a \cos \beta t + b \sin \beta t) P(t) \quad \text{con } P(t) \text{ come sopra.})$$

In questi casi *sappiamo a priori che esiste una soluzione particolare di forma "simile" a $f(t)$* , e precisamente:

1. Se α ($\alpha + i\beta$ nel secondo caso) non è una soluzione dell'equazione caratteristica, allora si cerca una soluzione del tipo $Q(t)e^{\alpha t}$ (nel secondo caso, $Q(t)e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$, dove Q è un polinomio di grado n).
2. Se α (oppure $\alpha + i\beta$) è una radice dell'equazione caratteristica, le "candidate soluzioni" scritte sopra vanno moltiplicate per t o per t^2 , a seconda che si tratti di una radice semplice o di una radice doppia.

Questo procedimento è noto come metodo di somiglianza o degli annihilatori: abbiamo concluso con qualche esempio nei casi in cui α è reale. Riprenderemo la prossima volta con il caso complesso.

ESEMPI:

- Risolviamo l'equazione $y''(t) - y(t) = t^2 e^{3t}$. Le radici dell'equazione caratteristica sono ± 1 , per cui la soluzione generale dell'omogenea è $y(t) = Ae^{-t} + Be^t$. Siccome 3 non è radice dell'equazione caratteristica, c'è una soluzione particolare dell'equazione completa del tipo $\bar{y}(t) = (at^2 + bt + c)e^{3t}$. Sostituendo nell'equazione troviamo i coefficienti a, b, c e la soluzione particolare $\bar{y}(t) = (\frac{1}{8}t^2 - \frac{3}{16}t + \frac{7}{64})e^{3t}$.

La soluzione generale sarà allora

$$y(t) = Ae^{-t} + Be^t + (\frac{1}{8}t^2 - \frac{3}{16}t + \frac{7}{64})e^{3t}.$$

- Risolviamo l'equazione $y''(t) - y(t) = te^t$. L'omogenea è la stessa dell'esempio precedente. In questo caso 1 è una radice dell'equazione caratteristica, per cui cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(t) = t(at + b)e^t$. Sostituendo nell'equazione troviamo $a = -b = \frac{1}{4}$ e la soluzione particolare $\bar{y}(t) = \frac{1}{4}(t^2 - t)e^t$. Ne ricaviamo la soluzione generale

$$y(t) = Ae^{-t} + Be^t + \frac{1}{4}(t^2 - t)e^t.$$

- Risolviamo infine $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t$. L'equazione caratteristica ha la radice doppia 1, per cui le soluzioni dell'omogenea sono $y(t) = Ae^t + Bte^t$. In questo caso, essendo 1 radice doppia avremo una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(t) = t^2 ae^t$. Sostituendo nell'equazione si trova $a = 1/2$ e la soluzione particolare cercata è $\bar{y}(t) = \frac{1}{2}t^2 e^t$, mentre la soluzione generale è

$$y(t) = Ae^t + Bte^t + \frac{1}{2}t^2 e^t.$$

27 Lezione del 14/1/2025 (3 ore)

Abbiamo continuato a svolgere esercizi sul metodo degli annihilatori, in particolare nei casi in cui il termine noto contenga un polinomio per un esponenziale complesso.

ESEMPIO: Consideriamo l'equazione dell'*oscillatore armonico forzato*

$$y'' + \omega_0^2 y = C \sin \omega t,$$

con $\omega, \omega_0 > 0$.

Troviamo che la soluzione generale dell'omogenea è $y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ (che corrisponde alle radici $\pm i\omega_0$ del polinomio caratteristico).

Per trovare una soluzione particolare, osserviamo che il secondo membro dell'equazione è la parte immaginaria di $Ce^{i\omega t}$: ci basta dunque trovare una soluzione particolare dell'equazione a valori complessi $y'' + \omega_0^2 y = Ce^{i\omega t}$ e prenderne la parte immaginaria. Distinguiamo due casi:

- Se $\omega \neq \omega_0$, il numero complesso $i\omega$ non è radice dell'equazione caratteristica: c'è dunque una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(t) = ae^{i\omega t}$. Con facili conti troviamo $a = \frac{C}{\omega_0^2 - \omega^2}$ da cui, prendendo la parte immaginaria, troviamo che una soluzione particolare dell'equazione originale è $\bar{y}(t) = \frac{C}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t$. La soluzione generale sarà dunque

$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{C}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

- Se $\omega = \omega_0$ (sistema in *risonanza*), la ricetta ci dice che c'è una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(t) = a t e^{i\omega_0 t}$. Si trova $a = -\frac{Ci}{2\omega_0}$ da cui (prendendo la parte immaginaria) troviamo la soluzione particolare $\bar{y}(t) = -\frac{C}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t$ e la soluzione generale

$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t - \frac{C}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t.$$

In questo caso alla nostra molla succede qualcosa di simile a quanto avvenne al Tacoma Narrows Bridge il 7 novembre 1940... (se non lo sapete, fate una ricerca su YouTube!).

Abbiamo proseguito la lezione con altri esercizi esercizi sul metodo di somiglianza.

Per esempio abbiamo risolto l'equazione

$$y'' - 4y' + 5y = e^{3x} \cos x.$$

L'omogenea associata ha soluzione $y(x) = e^{2x}(A \cos x + B \sin x)$. Per trovare una soluzione particolare dell'equazione completa, osserviamo che il termine noto è la parte reale di $e^{(3+i)x}$: scegliendo quest'ultima funzione come termine

noto, sappiamo che esiste una soluzione della forma $\bar{y}(x) = ae^{(3+i)x}$. Sostituendo nell'equazione troviamo che deve essere $a = \frac{1-2i}{5}$ e prendendo la parte reale della soluzione complessa ne troviamo una dell'equazione originale, vale a dire $\bar{y}(x) = \frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x$. La soluzione generale sarà

$$y(x) = e^{2x}(A \cos x + B \sin x) + \frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x.$$

Per l'analoga equazione

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x,$$

l'equazione omogenea associata è la stessa. Ma siccome $(2 \pm i)$ sono soluzioni dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con termine noto $e^{(2+i)x}$ avrà la forma $\bar{y}(x) = a x e^{(2+i)x}$: troviamo $a = -\frac{1}{2}i$ e, prendendo questa volta la parte immaginaria della soluzione complessa, la soluzione dell'equazione originale $\bar{y}(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} \cos x$. La soluzione generale si ottiene al solito sommando le soluzioni dell'omogenea a quest'ultima soluzione particolare.

Abbiamo risolto anche

$$y'' + y = \sin x + 2 \cos x,$$

la cui soluzione generale è

$$y(x) = A \cos x + B \sin x - \frac{x}{2} \cos x + x \sin x$$

(in questo caso abbiamo risolto l'equazione con termine noto e^{ix} e poi preso la parte immaginaria più due volte la parte reale della soluzione complessa...).

Abbiamo poi risolto l'equazione differenziale $y'' + y' = f(t)$ con le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, ove

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{se } t < 0, \\ t & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea è $y(t) = C_1 + C_2 e^{-t}$. Per trovare una soluzione particolare usiamo il metodo degli annihilatori: per $t < 0$ ce n'è una della forma $y(t) = a \sin t + b \cos t$, per $t > 0$ del tipo $y(t) = at + bt^2$. Con semplici conti troviamo che le soluzioni dell'equazione data sono tutte del tipo

$$y(t) = \begin{cases} A + Be^{-t} - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t & t < 0, \\ C + De^{-t} - t + \frac{1}{2}t^2 & t \geq 0, \end{cases}$$

ove le costanti A, B, C, D devono essere scelte in modo che la funzione $y(t)$ sia continua e derivabile in 0. Imponendo le condizioni iniziali troviamo facilmente la soluzione del nostro problema di Cauchy:

$$y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t & t < 0, \\ 1 - e^{-t} - t + \frac{1}{2}t^2 & t \geq 0, \end{cases}$$

Abbiamo concluso la lezione con alcuni quiz tratti dagli esami degli anni precedenti: li potete trovare in versione interattiva su Moodle.

28 Lezione del 15/1/2025 (2 ore)

Abbiamo visto anche come risolvere alcune equazioni lineari a coefficienti variabili. Ad esempio, consideriamo

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Si tratta di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine. Poiché non è a coefficienti costanti, occorre inventare qualcosa per trovarne due soluzioni indipendenti.

Proviamo a cercare soluzioni del tipo $y(x) = x^k$: sostituendo nell'equazione troviamo che deve essere $k = 1$, per cui c'è la soluzione $y_1(x) = x$.

Una seconda soluzione può essere trovata con il metodo di riduzione dell'ordine (d'Alembert): poniamo $y(x) = y_1(x)z(x)$, ove $z(x)$ è un'incognita ausiliaria. Nel nostro caso abbiamo $y(x) = xz(x)$, da cui sostituendo nell'equazione si trova $\frac{z''}{z'} = -\frac{1}{x}$ e quindi $z'(x) = \frac{1}{x}$ e $z(x) = \log x$. Abbiamo trovato quindi una seconda soluzione, linearmente indipendente dalla prima: $y_2(x) = x \log x$. La soluzione generale è quindi $y(x) = C_1x + C_2x \log x$.

Abbiamo poi accennato alle soluzioni di equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine n , anche allo scopo di giustificare il metodo dei coefficienti indeterminati. Gli appunti che seguono sono *molto* più dettagliati del breve discorsetto che abbiamo fatto in aula!

Per prima cosa, definiamo un *operatore differenziale lineare di ordine n* : si tratta di un'applicazione lineare $L : \mathcal{C}^n([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}^0([a, b])$ ²³ del tipo

$$Lx(t) = D^n x(t) + a_{n-1}(t)D^{n-1}x(t) + a_{n-2}D^{n-2}x(t) + \dots + a_1Dx(t) + a_0x(t),$$

²³ $\mathcal{C}^0([a, b])$ denota l'insieme delle funzioni continue su $[a, b]$, mentre $\mathcal{C}^n([a, b])$ è l'insieme delle funzioni derivabili n volte con derivate fino all' n -esima continua.

ove $D^k x(t)$ indica la derivata k -esima della funzione $x(t)$, mentre $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{C}^0([a, b])$ sono fissate funzioni continue.

Un'equazione differenziale lineare di ordine n associata a questo operatore è del tipo $Lx(t) = f(t)$, con $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. Il *problema di Cauchy* relativo consiste nel trovare la soluzione dell'equazione che soddisfa un' n -upla di condizioni iniziali del tipo $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$, con $t_0 \in [a, b]$ e x_0, x_1, \dots, x_{n-1} fissati numeri reali.

Osserviamo per prima cosa che questo problema di Cauchy ha *un'unica soluzione globale definita sull'intero intervallo* $[a, b]$: a questo scopo, basta osservare che tale problema di Cauchy, indichiamolo con (P), è equivalente al seguente, che coinvolge un *sistema di n equazioni del primo ordine*:

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} x'_{n-1}(t) = -a_{n-1}(t)x_{n-1}(t) - a_{n-2}x_{n-2}(t) + \dots - a_1x_1(t) - a_0x_0(t) + f(t) \\ x'_{n-2}(t) = x_{n-1}(t) \\ x'_{n-3}(t) = x_{n-2}(t) \\ \dots \\ x'_0(t) = x_1(t) \\ x_{n-1}(t_0) = x_{n-1} \\ x_{n-2}(t_0) = x_{n-2} \\ \dots \\ x_1(t_0) = x_1 \\ x_0(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

Infatti, la funzione $x_0(t)$ data dal problema (P') è evidentemente una soluzione di (P) . Viceversa, una soluzione $x(t)$ del problema (P) assieme alle sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima forma l' n -upla soluzione del sistema (P') .

Evidentemente, al sistema (P') è applicabile il teorema di esistenza e unicità globale: per ogni n -upla di dati iniziali esiste una ed una sola soluzione definita sull'intero intervallo $[a, b]$. Lo stesso vale dunque per il problema di Cauchy originale (P) per l'equazione di ordine n ²⁴.

Stabilito che vale il risultato di esistenza e unicità, passiamo a studiare la *struttura dell'insieme delle soluzioni* dell'equazione lineare $Lx(t) = f(t)$. Per farlo, partiamo dal caso dell'equazione *omogenea* $Lx(t) = 0$: vale un risultato del tutto analogo a quello visto per le equazioni di ordine due.

TEOREMA (*Spazio delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea di ordine n*): *Dato l'operatore lineare L di cui sopra, l'insieme delle soluzioni*

²⁴Un analogo risultato di esistenza e unicità locale vale anche per il problema di Cauchy relativo ad un'equazione *non lineare* di ordine n : anche questa è equivalente ad un sistema di n equazioni del primo ordine, ottenuto con il trucco sopra.

dell'equazione omogenea $Lx(t) = 0$

$$\mathcal{V} = \{x(t) : Lx(t) = 0\}$$

è uno spazio vettoriale reale di dimensione n . In particolare, n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea generano l'intero insieme \mathcal{V} .

DIM. (Non vista in classe): È immediato verificare che una combinazione lineare di soluzioni dell'equazione omogenea è ancora una soluzione (è una conseguenza della linearità della derivata): l'insieme \mathcal{V} delle soluzioni è dunque uno spazio vettoriale reale.

Fissiamo allora $t_0 \in [a, b]$ e consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{V} &\rightarrow \mathbf{R}^n \\ x(t) &\mapsto (x(t_0), x'(t_0), x''(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) \end{aligned}$$

che ad una soluzione $x(t)$ associa il vettore dei suoi *dati iniziali di Cauchy*.

L'applicazione Ψ è evidentemente lineare: dico che si tratta di un isomorfismo di spazi vettoriali.

La suriettività di Ψ viene dal teorema di esistenza globale: qualunque dato di Cauchy si scelga, esiste una soluzione.

L'iniettività è invece conseguenza dell'unicità: $x(t) \in \ker \Psi$ se e soltanto se il vettore dei dati iniziali è nullo. Ora, la funzione identicamente nulla è chiaramente una soluzione del problema di Cauchy per l'equazione omogenea con dati nulli: grazie al risultato di unicità non ve ne sono altre. In altre parole, $\ker \Psi = \{0\}$ e Ψ è un isomorfismo. Q.E.D.

Il teorema appena visto ci dice che per risolvere un'equazione lineare omogenea di ordine n è sufficiente trovarne n soluzioni *linearmente indipendenti*.

Un criterio per stabilire se n soluzioni sono, appunto, linearmente indipendenti, coinvolge il *determinante wronskiano*:

PROPOSIZIONE (Wronskiano): Siano $x_1(t), \dots, x_n(t)$ soluzioni dell'equazione lineare omogenea di ordine n $Lx(t) = 0$. Queste soluzioni sono linearmente indipendenti se e soltanto se il loro determinante wronskiano

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) & \dots & x_n''(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

non si annulla mai nell'intervallo $[a, b]$.

DIM.: Per ogni fissato $t_0 \in [a, b]$, $W(t_0)$ è il determinante di una matrice che ha come colonne i vettori dei dati iniziali dei problemi di Cauchy di cui sono soluzioni $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Ricordando l'isomorfismo lineare $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}^n$ definito nella dimostrazione del teorema si ha facilmente la tesi: $x_1(t), \dots, x_n(t)$ formano una base di \mathcal{V} se e solo se le loro immagini secondo Ψ (che sono le colonne della matrice) formano una base di \mathbf{R}^n , cioè se e solo se la matrice wronskiana è non singolare. Q.E.D.

In compenso, se siamo in grado di risolvere l'equazione omogenea, c'è anche un metodo per trovare una soluzione particolare di un'equazione completa $Lx(t) = f(t)$:

TEOREMA (Metodo della variazione delle costanti): Data l'equazione lineare di ordine n $Lx(t) = f(t)$, siano $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata. Allora esistono n funzioni di classe $C^1([a, b])$, $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ che soddisfano il sistema

$$(*) \begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + C_2'(t)x_2(t) + \dots + C_n'(t)x_n(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t) + \dots + C_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1''(t) + C_2'(t)x_2''(t) + \dots + C_n'(t)x_n''(t) = 0 \\ \dots \\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + C_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \dots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}$$

Si ha allora che la funzione $x_p(t) := C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + \dots + C_n(t)x_n(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa.

Omettiamo la dimostrazione, che è una generalizzazione di quella vista per le equazioni del secondo ordine.

Vedremo ora come fare a trovare n soluzioni linearmente indipendenti di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti.

Come in precedenza, ci tornerà utile cercare soluzioni a valori complessi della nostra equazione differenziale del tipo $e^{\lambda t}$.

Sia dato quindi l'operatore

$$Lx(t) := D^n x(t) + a_{n-1}D^{n-1}x(t) + a_{n-2}D^{n-2}x(t) + \dots + a_1Dx(t) + a_0x(t),$$

con a_0, a_1, \dots, a_{n-1} costanti reali fissate.

L'equazione caratteristica associata all'operatore L è, per definizione, l'equazione polinomiale nell'incognita $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra, tale equazione possiede n radici complesse $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (non necessariamente tutte distinte). È immediato

verificare che le radici caratteristiche permettono di fattorizzare l'operatore L nel prodotto di n operatori lineari a coefficienti costanti del primo ordine:

$$Lx(t) = \left(\prod_{i=1}^n (D - \lambda_i I) \right) x(t),$$

dove I è l'identità. In particolare, si noti che gli operatori del primo ordine che compaiono in questa fattorizzazione *commutano tra loro*.

Usando questa fattorizzazione dell'operatore si vede subito che

PROPOSIZIONE (Soluzioni esponenziali di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti): Una funzione del tipo $e^{\lambda t}$ è soluzione (a valori complessi) dell'equazione omogenea a coefficienti costanti $Lx(t) = 0$ se e solo se λ è una delle radici caratteristiche dell'operatore L . Inoltre, se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sono radici caratteristiche distinte, allora le soluzioni $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_k t}$ sono linearmente indipendenti.

DIM.: Sia λ_i una delle radici dell'equazione caratteristica. Allora $(D - \lambda_i I)e^{\lambda t} = (\lambda - \lambda_i)e^{\lambda t}$: il risultato è nullo se e solo se $\lambda = \lambda_i$. Usando la fattorizzazione dell'operatore deduciamo allora che

$$Le^{\lambda t} = e^{\lambda t} \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) :$$

$e^{\lambda t}$ è soluzione dell'equazione omogenea se e soltanto se λ è una delle radici dell'equazione caratteristica.

Mostriamo che k soluzioni di questo tipo $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tutti distinti, sono linearmente indipendenti. Supponiamo infatti che valga l'identità

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_k e^{\lambda_k t} = 0.$$

Moltiplicando per $e^{-\lambda_k t}$ e derivando si ottiene

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_k)e^{(\lambda_1 - \lambda_k)t} + C_2(\lambda_2 - \lambda_k)e^{(\lambda_2 - \lambda_k)t} + \dots + C_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e^{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)t} = 0.$$

Moltiplichiamo poi per $e^{-(\lambda_{k-1} - \lambda_k)t}$ e deriviamo nuovamente:

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_k)(\lambda_1 - \lambda_{k-1})e^{(\lambda_1 - \lambda_{k-1})t} + \dots + C_{k-2}(\lambda_{k-2} - \lambda_k)(\lambda_{k-2} - \lambda_{k-1})e^{(\lambda_{k-2} - \lambda_{k-1})t} = 0.$$

Ripetendo il giochetto per k volte arriviamo all'espressione

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_k)(\lambda_1 - \lambda_{k-1})(\lambda_1 - \lambda_{k-2}) \dots (\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = 0$$

da cui $C_1 = 0$. In maniera del tutto analoga (basta permutare gli indici...) si dimostra che $C_2 = C_3 = \dots = C_k = 0$: le soluzioni sono indipendenti. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Che fare se ci sono radici complesse coniugate dell'equazione caratteristica.

Grazie alla proposizione appena dimostrata, siamo in grado di trovare n soluzioni indipendenti (a valori complessi) di un'equazione lineare omogenea di ordine n la cui equazione caratteristica abbia radici distinte. Queste si trasformano poi facilmente in n soluzioni reali linearmente indipendenti, che come sappiamo generano l'intero spazio delle soluzioni.

Se infatti l'equazione caratteristica ha una radice complessa $\lambda = \alpha + i\beta$, vi è anche la coniugata $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ (perché l'equazione caratteristica ha coefficienti reali). Ma allora

$$\begin{aligned}\frac{e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda}t}}{2} &= e^{\alpha t} \cos \beta t \\ \frac{e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda}t}}{2i} &= e^{\alpha t} \sin \beta t\end{aligned}$$

sono due soluzioni reali che generano lo stesso sottospazio...

Vediamo come comportarci nel caso che il polinomio caratteristico abbia radici multiple, cioè sia del tipo

$$(\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} (\lambda - \lambda_1)^{\mu_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{\mu_r},$$

ove evidentemente si avrà $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = n$. La fattorizzazione dell'operatore ha ora dei fattori ripetuti:

$$Lx(t) = \left(\prod_{i=1}^r (D - \lambda_i I)^{\mu_i} \right) x(t).$$

Mostriamo che sotto queste condizioni le funzioni $t^k e^{\lambda_i t}$ sono soluzioni dell'equazione per ogni $i = 1, \dots, r$ e per ogni $k = 0, 1, \dots, \mu_i - 1$: si ha infatti $(D - \lambda_i I)(t^k e^{\lambda_i t}) = k t^{k-1} e^{\lambda_i t}$ da cui iterando $(D - \lambda_i I)^k (t^k e^{\lambda_i t}) = k! e^{\lambda_i t}$ e $(D - \lambda_i I)^{k+1} (t^k e^{\lambda_i t}) = 0$.

In questo modo, ci siamo fabbricati esattamente n soluzioni dell'equazione omogenea: se dimostriamo che sono linearmente indipendenti, abbiamo finito!

Una relazione di dipendenza lineare tra di esse ha la forma $P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + P_r(t)e^{\lambda_r t} = 0$, dove P_1, P_2, \dots, P_r sono polinomi a coefficienti complessi e il grado di P_i è strettamente minore di μ_i . Supponiamo per assurdo che, per esempio, P_1 non sia identicamente nullo. Allora moltiplichiamo per $e^{-\lambda_r t}$ e deriviamo μ_r volte: troviamo un'identità del tipo

$$Q_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_r)t} + Q_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_r)t} + \dots + Q_{r-1}(t)e^{(\lambda_{r-1} - \lambda_r)t} = 0,$$

ove i Q_i sono ancora polinomi di grado minore di μ_i , ed il grado di Q_1 è esattamente uguale a quello di P_1 . Ripetendo il trucco, arriviamo all'espressione assurda $R_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = 0$, ove R_1 ha lo stesso grado di P_1 . Le soluzioni trovate sono dunque indipendenti!

Finiamo con un esempio di equazione lineare omogenea a coefficienti costanti di ordine "alto".

ESEMPIO: Si consideri l'equazione omogenea $y^{(11)} + 2y^{(7)} + y''' = 0$. L'equazione caratteristica è $\lambda^{11} + 2\lambda^7 + \lambda^3 = \lambda^3(\lambda^4 + 1)^2 = 0$, che ha come radici $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$, ciascuna con molteplicità 2, e poi 0 con molteplicità 3. La soluzione generale è quindi

$$y(t) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_2 t \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_4 t \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \left(C_5 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_6 t \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_7 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t + C_8 t \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) + C_9 + C_{10}t + C_{11}t^2.$$

OSSERVAZIONE: Giustificazione del metodo dei coefficienti indeterminati (o di somiglianza o degli annihilatori) per l'equazione completa del secondo ordine con $f(t) = P(t)e^{\lambda t}$, P polinomio di grado qualunque. $\lambda \in \mathbf{C}$.

Come abbiamo visto, *metodo degli annihilatori o di somiglianza o dei coefficienti indeterminati* predice che, a parte alcuni casi "degeneri" che vedremo tra un attimo, esiste una soluzione particolare *dello stesso tipo* del secondo membro, ossia del tipo $x_P(t) = Q(t)e^{\lambda t}$, ove Q è un polinomio dello stesso grado di Q . Per trovare la soluzione particolare è allora sufficiente sostituire nell'equazione per determinare i coefficienti del polinomio $Q(t)$.

I soli casi in cui non esiste una soluzione di questo tipo sono quelli in cui $e^{\lambda t}$ è una *soluzione dell'equazione omogenea*, cioè se λ è radice dell'equazione caratteristica.

L'osservazione fondamentale è che il secondo membro $f(t)$ è soluzione di un'opportuna equazione lineare omogenea $Mx(t) = 0$: basta prendere un qualunque operatore lineare a coefficienti costanti M di cui λ sia una *radice caratteristica di molteplicità maggiore del grado del polinomio $P(t)$* . Per esempio, detto k il grado di $P(t)$ possiamo prendere $M = (D - \lambda I)^{k+1}$.

Da questo si ricava che una qualunque soluzione particolare dell'equazione $Lx(t) = f(t)$ è anche soluzione dell'equazione omogenea a coefficienti costanti $L(Mx(t)) = 0$. Le radici caratteristiche dell'operatore LM sono semplicemente l'unione di quelle di L e di quelle di M (e la molteplicità di ciascuna di esse è la somma delle molteplicità con cui compare in L ed in M).

Ne ricaviamo la seguente semplice ricetta:

Si voglia trovare una soluzione particolare dell'equazione lineare a coefficienti costanti $Lx(t) = P(t)e^{\lambda t}$, con $\lambda \in \mathbf{C}$ e $P(t)$ polinomio di grado n . Allora

- *Se λ non è una radice caratteristica di L , cerchiamo una soluzione del tipo*

$$x_P(t) = Q(t)e^{\lambda t},$$

con Q polinomio di grado n .

- *Se λ è una radice caratteristica di L di molteplicità μ , cerchiamo una soluzione del tipo*

$$x_P(t) = t^\mu Q(t)e^{\lambda t},$$

con Q polinomio di grado n .

Abbiamo proseguito la lezione con un bel po' di esercizi sulle equazioni differenziali lineari (e anche un integrale improprio ed una serie tratti da un esame del 2023).