Prof. Lidia Angeleri Hügel Milano, febbraio 2007

Introduzione alla teoria delle rappresentazioni di algebre

Bibliografia sulla Teoria dei Moduli:

F. W. Anderson, K. R. Fuller, Rings and categories of modules, second ed., Springer, New York, 1992.

F. Kasch, Moduln und Ringe. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1977.

T. Y. Lam, A first course in noncommutative rings. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 131. Springer-Verlag, New York, 2001. ISBN: 0-387-95183-0

T. Y. Lam, Lectures on modules and rings. Graduate Texts in Mathematics, 189. Springer-Verlag, New York, 1999. ISBN: 0-387-98428-3

sull' Algebra Omologica:

Joseph J. Rotman, An introduction to homological algebra. Pure and Applied Mathematics, 85. Academic Press, Inc. ISBN: 0-12-599250-5

Charles A. Weibel, An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. ISBN: 0-521-43500-5; 0-521-55987-1

sulla Teoria delle Rappresentazioni di Algebre:

I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, Elements of the representation theory of associative algebras, London Mathematical Society **65**, Cambridge University Press (2006).

M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, Representation theory of artin algebras, Cambridge University Press (1994).

C. M. Ringel,Tame algebras and integral quadratic forms. Springer Lect. Notes Math. 1099 (1984).

materiale sul corso:

http://web.crii.uninsubria.it/~langeleri/lehre.html

Prof. Lidia Angeleri Hügel Milano, febbraio 2007

Introduzione alla teoria delle rappresentazioni di algebre. Programma .

I. Teoria dei moduli

§1. Moduli

1.1 Definizione di algebra

1.2 Definizione di modulo e omomorfismo. La categoria ΛMod.

1.3 Esempi

§2. Omomorfismi

2.1 Sottomoduli

2.2 Monomorfismi, epimorfismi ecc.

2.3 Moduli quoziente

2.4 Il teorema dell'omomorfismo

2.5 Moduli generati da un insieme

2.6 La categoria Λmod.

§3. Somme dirette

3.1 Definizione di somma diretta

3.2 Addendi diretti, moduli indecomponibili

3.3 Prodotto e coprodotto

3.4 Osservazioni

§4. Algebre semisemplici

4.1 Definizioni

4.2 Caratterizzazioni

4.3 Teorema di Wedderburn-Artin

4.4 Esempi

§5. Condizioni catenarie

5.1 Moduli noetheriani, artiniani

5.2 Proprietà

5.3 Teorema: Λ è un anello artinano

5.4 Il radicale di un modulo

5.5 Teorema: Il radicale di Jacobson J di Λ è nilpotente e Λ/J è semisemplice.

5.6 Serie di composizione

5.7 Teorema di Jordan-Hölder

5.8 La lunghezza di un modulo

5.9 Teorema: I moduli di Λmod hanno lunghezza finita.

Prof. Lidia Angeleri Hügel Milano, febbraio 2007

Introduzione alla teoria delle rappresentazioni di algebre
Esercizi

1. Sia Λ un'algebra di dimensione finita, e sia $J = \text{Rad}\Lambda$ il radicale di Jacobson di Λ. Siano inoltre $M \in \Lambda\text{Mod}$ e U un sottomodulo di M. Si dimostri:

   (a) U è un sottomodulo masismale di M se e solo se M/U è semplice.

   (b) Sia M finitamente generato. Se $U \neq M$, allora U è contenuto in un sottomodulo massimale di M.

   (c) U è detto sottomodulo *superfluo* di M, se per qualsiasi sottomodulo V di M si ha: Se $U + V = M$, allora $V = M$. Si dimostri che $\text{Rad}M$ coincide con la somma dei sottomoduli superflui di M. (Si usi il Lemma di Zorn!)

   (d) Sia M finitamente generato. Allora esiste un sottomodulo A di M tale che $U + A = M$ e $U \cap A$ è un sottomodulo superfluo di M. (Si scelga A minimale rispetto a $U + A = M$!)

2. Siano Λ e J come sopra, e sia $M \in \Lambda\text{Mod}$. Si dimostri:

   (a) $J = \{r \in \Lambda \mid 1 - sr$ possiede un inverso sinistro per ogni $s \in \Lambda\} =$
   $= \{r \in \Lambda \mid rM = 0$ per ogni modulo semplice $M\}$.

   (b) $JM \subseteq \text{Rad}M$.

   (c) Se M è finitamente generato, allora $\text{Rad}M$ è un sottomodulo superfluo di M.

   (d) Si ha $\text{Rad}M = 0$ se e solo se M è semisemplice. (Si usi l'esercizio 1!)

3. Siano Λ e J come sopra. Sia inoltre A un ideale (bilatero) di Λ. Si dimostri:

   (a) *Lemma di Nakayama*: Si ha $A \subseteq J$ se e solo se per ogni modulo finitamente generato M il sottomodulo AM è superfluo in M. (Si usi l'esercizio 2!)

   (b) J è nilpotente e Λ/J è semisemplice.

   (c) Sia $M \in \Lambda\text{Mod}$. Se A è nilpotente, allora AM è un sottomodulo superfluo di M.

   (d) Se A è nilpotente e Λ/A é semisemplice, allora $A = J$.

Prof. Lidia Angeleri Hügel Milano, febbraio 2007

Introduzione alla teoria delle rappresentazioni di algebre

Esercizi

4. Sia Λ un'algebra di dimensione finita, e sia $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ una scomposizione in moduli indecomponibili. Sia inoltre
$$1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$$
dove $e_i \in P_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Si dimostri:
   (a) $e_1, \ldots, e_n$ sono idempotenti ortogonali.
   (b) $P_i = \Lambda e_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

5. Sia $0 \to A \to B \to C \to 0$ una sequenza esatta breve in ΛMod. Si dimostri:
   (a) Se $0 \to A \to B \to C \to 0$ spezza, allora $B \cong A \oplus C$.
   (b) Per ogni $M \in \Lambda$Mod la sequenza
$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, C)$$
è esatta.

6. Siano $P, M \in \Lambda$Mod. Si dimostri:
   (a) Se P è proiettivo e $g : M \to P$ è un epimorfismo, allora $M \cong \mathrm{Ker} g \oplus P$.
   (b) P è proiettivo se e solo se è un addendo diretto di un modulo libero.

7. Per ciascuno dei quiver seguenti si determinino una base dell'algebra dei cammini KQ e i KQ-moduli proiettivi indecomponibili e iniettivi indecomponibili (fornendo i loro vettori delle dimensioni e le loro serie di composizione)
   (a) per il quiver $\overset{1}{\bullet} \to \overset{2}{\bullet} \to \overset{3}{\bullet}$
   (b) per il quiver $\overset{1}{\bullet} \to \overset{2}{\bullet} \leftarrow \overset{3}{\bullet}$