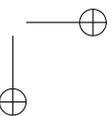
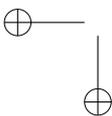
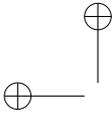


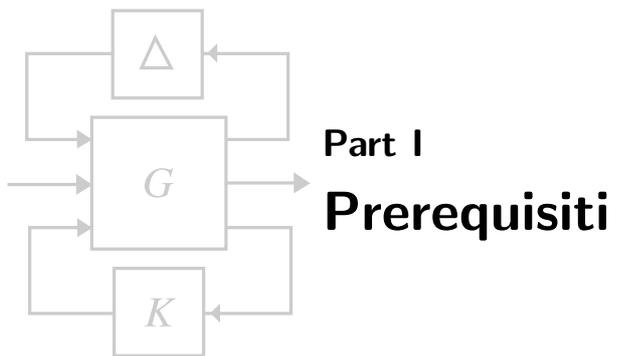
Contents

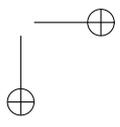
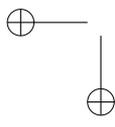
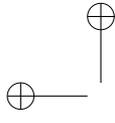
I	Prerequisiti	1
II	Analisi nel tempo	3
III	Analisi in frequenza	5
1	Diagrammi di Bode	7
1.1	Introduzione	7
1.2	Regole per il tracciamento dei diagrammi di Bode	11
1.3	Margini di stabilità	22
1.4	Criterio di Bode	26
1.5	Parametri dinamici sul diagramma di Bode	27
1.6	I diagrammi di Bode per sistemi a tempo discreto	27
	Exercises	27
2	Diagramma di Nyquist	29
2.1	Introduzione	29
2.1.1	Alcune definizioni	30
2.2	Regole per il tracciamento	33
2.2.1	Comportamento per $\omega \rightarrow 0^+$	34
2.2.2	Comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$	36
2.2.3	Intersezioni con l'asse reale	36
2.2.4	Intersezioni con l'asse immaginario	37
2.2.5	Numero di rotazioni attorno l'origine	38
2.3	Margini di Stabilità sul Diagramma di Nyquist	39
2.4	Criterio di Nyquist	39
	Exercises	54
IV	Sintesi in frequenza	55
3	Requisiti e Specifiche	57
4	La retroazione	59

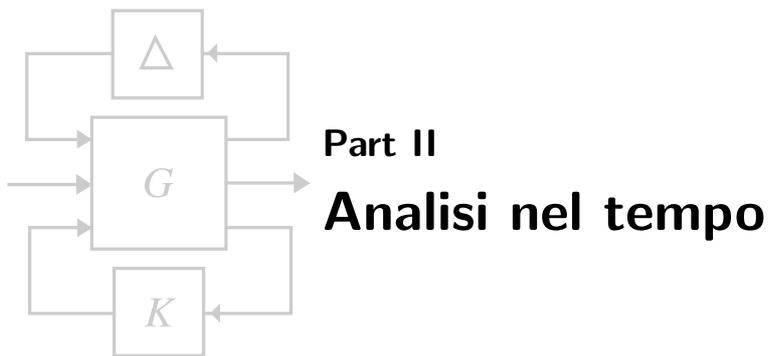
5	Luogo delle radici	61
5.1	Introduzione	61
5.2	Regole per il tracciamento del luogo	63
5.3	Utilizzo del luogo delle radici per la sintesi del controllore	70
5.3.1	Progetto del controllore per un motore DC	70
5.3.2	Poli dominanti	72
5.3.3	Nested Control Loop	76
5.3.4	Progettazione di un controllore per sistemi collocati e non collocati	76
5.3.5	Contorno delle radici	76
5.3.6	Reti anticipatrici e ritardatrici	76
5.4	Il luogo delle radici per sistemi a tempo discreto	76
	Exercises	76
6	Regolatori PID	77
6.1	Introduzione	77
6.2	PID	77
6.3	PID e specifiche	86
6.3.1	Indici Stocastici	87
6.4	Taratura automatica dei controllori PID alla Ziegler-Nichols	87
6.4.1	Ziegler-Nichols in anello chiuso	88
6.4.2	Ziegler-Nichols in anello aperto	89
6.5	Iterative Feedback Tuning	89
6.6	Schema anti wind-up	90
6.7	Filtro Notch	90
6.8	Predittore di Smith	90
6.9	Principio del Modello Interno	90
6.10	Controllo Feedforward	90
6.11	Controllori PID a tempo discreto	90
	Exercises	90
V	Rappresentazione di Stato	91
7	Modelli di Stato	95
7.1	Introduzione	95
7.2	Cenni di teoria della realizzazione	97
7.2.1	Forma canonica di controllo	97
7.2.2	Forma canonica di osservazione	100
7.2.3	Forma canonica di Markov	103
7.3	Rappresentazione ingresso-stato-uscita	103
7.4	Modelli di stato di sistemi LTI	106
7.4.1	Evoluzione libera e forzata dello stato	107
7.4.2	Evoluzione libera e forzata dell'uscita	112
7.5	Matrice di transizione dello stato	112
7.6	Forma canonica di Jordan	114

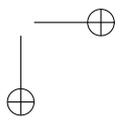
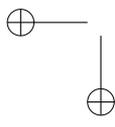
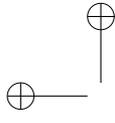
Contents	iii
<hr/>	
7.7	Rappresentazione ingresso-stato-uscita in s e z 125
7.7.1	Forma di Souriau 128
7.8	Stabilità interna ed esterna 129
7.8.1	Risposta in frequenza 131
VI	Lyapunov 133
VII	Proprietà strutturali dei modelli di stato 135
8	Raggiungibilità e Retroazione dallo stato 139
8.1	Introduzione 139
8.2	Raggiungibilità dei sistemi lineari e discreti 139
8.3	Controllabilità dei sistemi lineari e discreti 141
8.4	Controllo dei sistemi discreti 143
8.5	Raggiungibilità dei sistemi lineari e continui 144
8.6	Controllo dei sistemi continui 148
8.7	Forma standard di raggiungibilità 148
8.8	Retroazione dallo stato 150
8.9	Forma canonica di controllo per sistemi SI 150
8.10	Lemma di Heymann 153
8.11	Teorema di Rosenbrock e Invarianti di controllo 153
8.12	Forma canonica di controllo per sistemi MI 154
8.13	Stabilizzabilità 154
8.14	Approccio geometrico 154
8.14.1	Sistemi lineari continui 154
8.14.2	Sistemi lineari discreti 156
8.15	Raggiungibilità degli aggregati 158
9	Osservabilità e Stima dello stato 159
VIII	Sintesi nel tempo 161
IX	Sample-data Systems 163
X	Complementi 165
	Bibliography 167
	Index 168

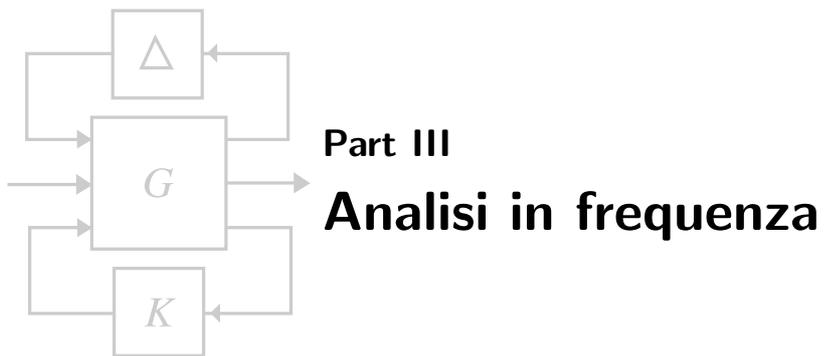






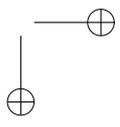
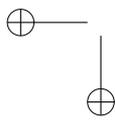
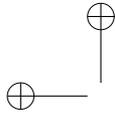


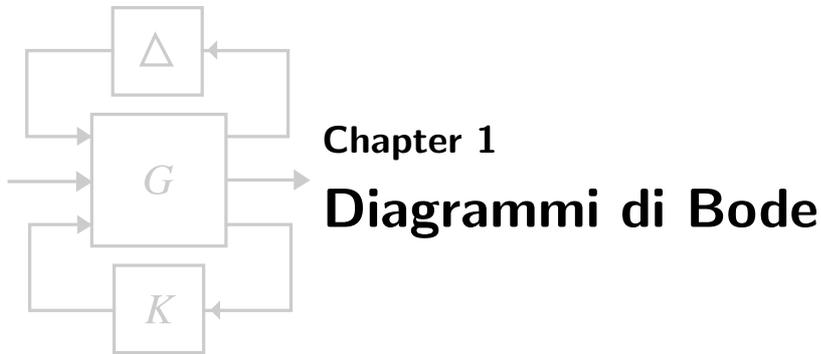




Part III

Analisi in frequenza





Chapter 1

Diagrammi di Bode

Furious activity is no substitute for understanding.
—H.H. Williams

In questo capitolo e nel capitolo successivo verranno presentati due strumenti per l'analisi dei sistemi LTI nel dominio della frequenza: il diagramma di Bode e i diagrammi di Nyquist. Questi diagrammi partono dalla funzione di trasferimento di un sistema per dedurre informazioni che sono in un certo senso duali rispetto a quelle che si possono ottenere dall'analisi nel tempo, cioè dalla risoluzione esplicita dell'equazione differenziale che descrive il sistema. Nel seguito vedremo come questi diagrammi possono essere usati non solo nell'analisi dei sistemi (capire come il sistema si comporta) ma anche come strumenti per la progettazione di controllori che “forzano” il sistema ad avere il comportamento desiderato.

1.1 Introduzione

I diagrammi di Bode sono degli strumenti grafici che permettono di studiare il comportamento in frequenza di un sistema quando in ingresso si hanno dei segnali di cui si conosce la composizione in frequenza, i.e. il loro spettro.

Sia dato il sistema LTI proprio Σ descritto dalla ODE

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k}$$

con risposta impulsiva $w(t)$ e corrispondente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}$$

Vogliamo studiare il suo comportamento quando in ingresso c'è un segnale sinusoidale. Prima però proviamo il seguente teorema di carattere più generale.

Autofunzioni **Theorem 1.1.** *I segnali fasoriali $u(t) = Ue^{j(\omega_0 t + \phi)}$, $t \in \mathbb{R}$ sono autofunzioni dei sistemi LTI e asintoticamente stabili.*

Proof. Vogliamo provare che il sistema Σ risponde alla sollecitazione $u(t)$ con un segnale $y(t)$ proporzionale al segnale fasoriale. La costante di proporzionalità sarà in generale un numero complesso.

Siccome $u(t)$ è limitato e il sistema è asintoticamente stabile, anche l'uscita $y(t)$ sarà limitata. L'espressione analitica di $y(t)$ si ottiene attraverso i seguenti passaggi

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau)Ue^{j(\omega_0(t-\tau)+\phi)}d\tau \\ &= Ue^{j(\omega_0 t + \phi)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau)e^{-j\omega_0 \tau}d\tau}_{\triangleq W(j\omega_0)} \\ &= W(j\omega_0)Ue^{j(\omega_0 t + \phi)} \\ &= W(j\omega_0)u(t). \end{aligned}$$

Risulta quindi che la costante cercata è data dal numero complesso $W(j\omega_0)$, cioè dal valore che assume la funzione di trasferimento per $s = j\omega_0$ dove ω_0 è esattamente la pulsazione del fasore. \square

L'equazione $y(t) = W(j\omega_0)u(t)$ si può dettagliare meglio considerando il numero complesso $W(j\omega_0)$ nel suo modulo e fase

$$W(j\omega_0) = |W(j\omega_0)|e^{j\angle W(j\omega_0)}.$$

Per le proprietà dei numeri complessi si può scrivere

$$u(t) = Ue^{j(\omega_0 t + \phi)} \xrightarrow{\Sigma} y(t) = |W(j\omega_0)|Ue^{j(\omega_0 t + \phi + \angle W(j\omega_0))}$$

da cui si vede chiaramente che sia il modulo che la fase del fasore di partenza sono stati modificati.

Un segnale sinusoidale $u(t) = A \sin \omega_0 t$ può essere ottenuto come combinazione lineare di due segnali fasoriali (equazione di Eulero). Il risultato del teorema precedente dovrà essere quindi particolareggiato al caso sinusoidale tenendo anche in considerazione le condizioni iniziali del sistema (non considerate nel caso precedente essendo $t \in \mathbb{R}$) perché adesso l'ingresso vale $u(t) = A \sin(\omega_0 t)\delta_{-1}(t)$.

Theorem 1.2 (Regime sinusoidale). *Dato un sistema continuo LTI e asintoticamente stabile Σ a riposo con funzione di trasferimento $W(s)$. La risposta a regime ad un ingresso sinusoidale di frequenza ω_0 , $u(t) = A \sin \omega_0 t$, è ancora un segnale sinusoidale con la stessa frequenza. La risposta in frequenza vale*

$$W(j\omega_0) \triangleq W(s)|_{s=j\omega_0} \tag{1.1}$$

per $0 \leq \omega_0 < \infty$.

Proof. Il calcolo di $y(t)$ verrà fatto utilizzando il metodo della trasformata inversa di Laplace anche se si potrebbe seguire lo stesso procedimento sviluppato nella dimostrazione del teorema precedente. Si vuole determinare

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} Y(s)$$

con $Y(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s)$. La $Y_\ell(s)$ è del tipo

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-1-i} \left. \frac{d^i y(t)}{dt^i} \right|_{t=0^-}}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}$$

ed essendo i poli asintoticamente stabili, l'evoluzione libera corrispondente $y_\ell(t)$

$$y_\ell(t) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=0}^{r_i-1} c_{ij} \frac{t^j}{j!} e^{p_i t} \delta_{-1}(t)$$

converge a zero per $t \rightarrow \infty$. La risposta forzata si scrive come $Y_f(s) = W(s)U(s)$ in cui $U(s)$ vale

$$u(t) = A \sin(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

I poli di $Y_f(s) = W(s) \frac{U\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$ sono i poli di $W(s)$ (asintoticamente stabili, $p_i \in RHP$) più quelli complessi coniugati $\{\pm j\omega_0\}$ dovuti al segnale in ingresso. Quindi $Y_f(s)$ assume la forma

$$Y_f(s) = d_0 + \sum_{i=1}^h \sum_{j=0}^{r_i-1} \frac{d_{ij}}{(s - p_i)^{j+1}} + \frac{c_1}{s - j\omega_0} + \frac{c_2}{s + j\omega_0}$$

e l'antitrasformata $y(t)$ sarà del tipo

$$Y_f(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y_f(t) = d_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^h \sum_{j=0}^{r_i-1} d_{ij} \frac{t^j}{j!} e^{p_i t} \delta_{-1}(t) + c_1 e^{j\omega_0 t} + c_2 e^{-j\omega_0 t}.$$

I coefficienti c_1 e c_2 si calcolano al solito con il teorema dei residui

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} Y_f(s) \frac{1}{s - j\omega_0} = W(s) \frac{A\omega_0}{s + j\omega_0} \Big|_{s=j\omega_0} = W(j\omega_0) \frac{A}{2j}$$

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow -j\omega_0} Y_f(s) \frac{1}{s + j\omega_0} = W(s) \frac{A\omega_0}{s - j\omega_0} \Big|_{s=-j\omega_0} = -W(-j\omega_0) \frac{A}{2j}$$

e per le osservazioni fatte nel capitolo precedente sono complessi coniugati: $c_1 = (c_2)^*$. Infine si ha

$$\begin{aligned} c_1 e^{j\omega_0 t} + c_2 e^{-j\omega_0 t} &= W(j\omega_0) \frac{A}{2j} e^{j\omega_0 t} - W(-j\omega_0) \frac{A}{2j} e^{-j\omega_0 t} \\ &= |W(j\omega_0)| \left[e^{j\angle W(j\omega_0)} \frac{A}{2j} e^{j\omega_0 t} - e^{j\angle W(-j\omega_0)} \frac{A}{2j} e^{-j\omega_0 t} \right] \\ &= |W(j\omega_0)| \left[e^{j\angle W(j\omega_0)} \frac{A}{2j} e^{j\omega_0 t} - e^{-j\angle W(j\omega_0)} \frac{A}{2j} e^{-j\omega_0 t} \right] \\ &= |W(j\omega_0)| \left[\frac{A}{2j} e^{j(\omega_0 t + \angle W(j\omega_0))} - \frac{A}{2j} e^{-j(\omega_0 t + \angle W(j\omega_0))} \right] \\ &= |W(j\omega_0)| A \sin(\omega_0 t + \angle W(j\omega_0)) \end{aligned}$$

Dai conti fatti l'uscita $y(t)$ si può decomporre oltre che in risposta libera e forzata anche in risposta in regime permanente e in risposta in transitorio:

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{\sum_{i=1}^h \sum_{j=0}^{r_i-1} c_{ij} \frac{t^j}{j!} e^{p_i t} \delta_{-1}(t) + d_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^h \sum_{j=0}^{r_i-1} d_{ij} \frac{t^j}{j!} e^{p_i t} \delta_{-1}(t) + \dots}_{y_{tr}(t)} \\ &\quad + \underbrace{|W(j\omega_0)| A \sin(\omega_0 t + \angle W(j\omega_0))}_{y_{rp}(t)} \\ &= y_{tr}(t) + y_{rp}(t) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} y_{tr}(t) &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty \\ y_{rp}(t) &= |W(j\omega_0)| A \sin(\omega_0 t + \angle W(j\omega_0)) \end{aligned}$$

Si conclude quindi che il comportamento a regime dipende solo da $W(j\omega_0)$. Al variare della pulsazione ω , $W(j\omega)$ prende il nome di risposta in frequenza del sistema. \square

Finora abbiamo analizzato il comportamento del sistema in risposta ad un ingresso sinusoidale con frequenza assegnata. Per ogni frequenza abbiamo trovato due numeri, $|W(j\omega)|$ e $\angle W(j\omega)$, che ci permettono di prevedere il comportamento a regime del sistema. Cosa succede se si mettono tutti questi valori in due grafici (uno per il modulo e uno per la fase) con in ascissa la pulsazione ω ? Si sono costruiti i diagrammi di Bode! Questi caratterizzano completamente in frequenza i sistemi LTI. È fondamentale sottolineare che questo è corretto perché si è assunto il sistema lineare: solo in questo caso vale la sovrapposizione degli effetti. In generale infatti la risposta ad un segnale sinusoidale di un sistema non lineare sarà un segnale che non è caratterizzabile con una sola frequenza.

Example 1.3 Sia \blacksquare

Osservazione. I diagrammi di Bode si possono disegnare anche per sistemi instabili. Nelle dimostrazioni precedenti basta trascurare la parte transitoria $t_{tr}(t)$ che è quella che tende all'infinito. Le considerazioni sulla risposta ad una sinusoide in regime permanente rimangono invariate.

Example 1.4 Sia ■

1.2 Regole per il tracciamento dei diagrammi di Bode

Nel capitolo precedente abbiamo visto come la funzione di trasferimento di un sistema LTI proprio si può scrivere rapporto tra due polinomi a coefficienti reali

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_0}$$

dove $n \geq m$, $a_n \neq 0$, o equivalentemente nella sua forma fattorizzata

$$G(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

dove $z_i, p_i \in \mathbb{C}$. Separando le radici reali da quelle complesse coniugate, la funzione di trasferimento si può riscrivere come

$$G(s) = \frac{b_m \prod_{i=1} \left(s + \frac{1}{\tau_i}\right)^{\bar{\mu}_i} \prod_{i=1} (s^2 + 2\bar{\xi}_i \bar{\omega}_i s + \bar{\omega}_i^2)^{\bar{\nu}_i}}{a_n s^k \prod_{i=1} \left(s + \frac{1}{\tau_i}\right)^{\mu_i} \prod_{i=1} (s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2)^{\nu_i}}$$

Per il tracciamento dei diagrammi di Bode è più conveniente utilizzare la seguente espressione

$$G(s) = K_B \frac{\prod_{i=1} (1 + s\bar{\tau}_i)^{\bar{\mu}_i} \prod_{i=1} \left(1 + 2\frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\omega}_i} s + \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} s^2\right)^{\bar{\nu}_i}}{s^k \prod_{i=1} (1 + s\tau_i)^{\mu_i} \prod_{i=1} \left(1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_i} s + \frac{1}{\omega_i^2} s^2\right)^{\nu_i}} \quad (1.2)$$

con $k \in \mathbb{Z}$, $|\xi_i| < 1$, $|\bar{\xi}_i| < 1$ e $\lim_{s \rightarrow 0} s^k G(s) = K_B$. L'espressione (1.2) viene detta **Forma di Bode** nella forma con costanti di tempo o nella forma di Bode. Infatti l'unità di misura di $\tau_i = -\frac{1}{p_i}$, $p_i \in \mathbb{R}$ e $\hat{\tau}_i = -\frac{1}{z_i}$, $z_i \in \mathbb{R}$ è il secondo. La costante K_B è chiamata **costante di Bode** e vale

$$K_B = \frac{b_m \prod_{i=1} (\bar{\tau}_i)^{\bar{\mu}_i} \prod_{i=1} \left(\frac{1}{\bar{\omega}_i^2}\right)^{\bar{\nu}_i}}{a_n \prod_{i=1} (\tau_i)^{\mu_i} \prod_{i=1} \left(\frac{1}{\omega_i^2}\right)^{\nu_i}} \quad (1.3) \quad \text{Costante di Bode}$$

Sostituendo s con $j\omega$ si ottiene la funzione di risposta armonica che nella sezione precedente abbiamo visto essere fondamentale per capire il comportamento a regime del sistema

$$G(j\omega) = K_B \frac{\prod_{i=1} (1 + j\omega\bar{\tau}_i)^{\bar{\mu}_i} \prod_{i=1} \left(1 + 2\frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\omega}_i} j\omega - \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} \omega^2\right)^{\bar{\nu}_i}}{(j\omega)^k \prod_{i=1} (1 + j\omega\tau_i)^{\mu_i} \prod_{i=1} \left(1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_i} j\omega - \frac{1}{\omega_i^2} \omega^2\right)^{\nu_i}} \quad (1.4) \quad \text{Funzione di risposta armonica}$$

Siccome $G(j\omega)$ è una funzione a valori complessi abbiamo bisogno di due diagrammi: il diagramma del modulo per $|G(j\omega)|$ e quello della fase per $\angle G(j\omega)$. Per rendere più agevole il disegno e la comprensione dei diagrammi di Bode, si utilizza la scala logaritmica per le ascisse; cioè si riportano modulo e fase in funzione di $\log_{10} \omega$. Inoltre, il modulo viene spesso espresso in *decibel* [dB], ovvero $20 \log_{10} |G(j\omega)|$. Per il diagramma del modulo avremo perciò una rappresentazione in doppia scala logaritmica.

Prima di iniziare a tracciare i diagrammi di Bode di (1.2) è bene sottolineare perché si è utilizzata la scala logaritmica. Le ragioni sono essenzialmente due:

1. la scala logaritmica permette di rappresentare su un unico diagramma i valori della funzione di risposta armonica che varia su campi molto diversi (in linea di principio da 0 a ∞);
2. il logaritmo ha le seguenti importanti proprietà

$$\log_{10}(AB) = \log_{10}(A) + \log_{10}(B) \tag{1.5}$$

$$\log_{10}\left(\frac{A}{B}\right) = \log_{10}(A) - \log_{10}(B) \tag{1.6}$$

$$\log_{10}(A^C) = C \log_{10}(A) \tag{1.7}$$

con $A, B \in \mathbb{R}^+$, $C \in \mathbb{Z}$, che si possono sfruttare per disegnare in maniera agevole il modulo di (1.2). Interessante notare che le stesse proprietà del logaritmo si hanno anche per la funzione argomento applicata ad un numero complesso

$$\arg(AB) = \arg(A) + \arg(B) \tag{1.8}$$

$$\arg\left(\frac{A}{B}\right) = \arg(A) - \arg(B) \tag{1.9}$$

$$\arg(A^C) = C \arg(A) \tag{1.10}$$

con $A, B \in \mathbb{C}$, $C \in \mathbb{Z}$.

Utilizziamo ora le relazioni (1.5)-(1.7) per riscrivere $|G(j\omega)|_{dB}$ in una forma più facile da analizzare e, analogamente, le (1.8)-(1.10) per $\angle G(j\omega)$. Vale infatti

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left\{ |K_B| \frac{\prod_{i=1}^m |(1 + j\omega\bar{\tau}_i)^{\bar{\mu}_i}| \prod_{i=1}^n \left| \left(1 + 2\frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\omega}_i} j\omega - \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} \omega^2 \right)^{\bar{\nu}_i} \right|}{|(j\omega)^k| \prod_{i=1}^m |(1 + j\omega\tau_i)^{\mu_i}| \prod_{i=1}^n \left| \left(1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_i} j\omega - \frac{1}{\omega_i^2} \omega^2 \right)^{\nu_i} \right|} \right\}$$

termine costante

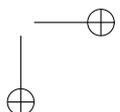
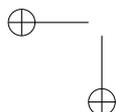
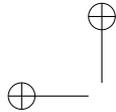
$$= 20 \log_{10} |K_B| + \dots$$

zeri reali

$$+ \sum_{i=1}^m 20\bar{\mu}_i \log_{10} |1 + j\omega\bar{\tau}_i| + \dots$$

zeri complessi
coniugati

$$+ \sum_{i=1}^n 20\bar{\nu}_i \log_{10} \left| \left(1 + 2\frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\omega}_i} j\omega - \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} \omega^2 \right) \right| + \dots$$



$$\begin{aligned}
 & -20k \log_{10} |j\omega| - \dots && \text{radici nell'origine} \\
 & - \sum_{i=1} 20\mu_i \log_{10} |1 + j\omega\tau_i| - \dots && \text{poli reali} \\
 & - \sum_{i=1} 20\nu_i \log_{10} \left| 1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_i} j\omega - \frac{1}{\omega_i^2} \omega^2 \right|. && \text{poli complessi coniugati}
 \end{aligned}$$

Analogamente per la fase vale la decomposizione (il simbolo \angle ha lo stesso significato di $\arg(\cdot)$)

$$\begin{aligned}
 \angle G(j\omega) &= \arg \left\{ K_B \frac{\prod_{i=1} (1 + j\omega\bar{\tau}_i)^{\bar{\mu}_i} \prod_{i=1} \left(1 + 2\frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\omega}_i} j\omega - \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} \omega^2 \right)^{\bar{\nu}_i}}{(j\omega)^k \prod_{i=1} (1 + j\omega\tau_i)^{\mu_i} \prod_{i=1} \left(1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_i} j\omega - \frac{1}{\omega_i^2} \omega^2 \right)^{\nu_i}} \right\} \\
 &= \arg(K_B) + \dots && \text{termine costante} \\
 &+ \sum_{i=1} \bar{\mu}_i \arg(1 + j\omega\bar{\tau}_i) + \dots && \text{zeri reali} \\
 &+ \sum_{i=1} \bar{\nu}_i \arg \left(1 + 2\frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\omega}_i} j\omega - \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} \omega^2 \right) + \dots && \text{zeri complessi coniugati} \\
 &- k \arg(j\omega) - \dots && \text{radici nell'origine} \\
 &- \sum_{i=1} \mu_i \arg(1 + j\omega\tau_i) - \dots && \text{poli reali} \\
 &- \sum_{i=1} \nu_i \arg \left(1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_i} j\omega - \frac{1}{\omega_i^2} \omega^2 \right). && \text{poli complessi coniugati}
 \end{aligned}$$

Restano quindi da determinare i diagrammi di Bode dei termini elementari nella funzione di trasferimento, i.e. K_B , $(j\omega)^{\pm 1}$, $(1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$, $\left(1 + 2\frac{\xi}{\omega_n} j\omega - \frac{1}{\omega_n^2} \omega^2 \right)^{\pm 1}$, per poi procedere alla loro somma in modo da ottenere i grafici voluti.

Costante

I diagrammi di Bode di $G(j\omega) = K_B$ sono riportati in Figura 1.1(a) e Figura 1.1(b) per $K_B = 1$ e $K_B = -1$, rispettivamente. Risulta quindi che il modulo è uguale a 0 dB in entrambi i casi. Per $|K_B| > 1$ avremo invece una linea sopra i zero dB, mentre per $|K_B| < 1$ una linea sotto i 0 dB. Per quanto riguarda la fase, questa sarà uguale a zero per costanti positive e uguale a -180° (i.e. $-\pi$) per costanti negative.

Radici nell'origine

Quando $G(j\omega) = (j\omega)^{\pm 1}$, il modulo risulta uguale a:

$$|G(j\omega)|_{dB} = \pm 20 \log_{10} |j\omega| = \pm 20 \log_{10} |\omega|$$

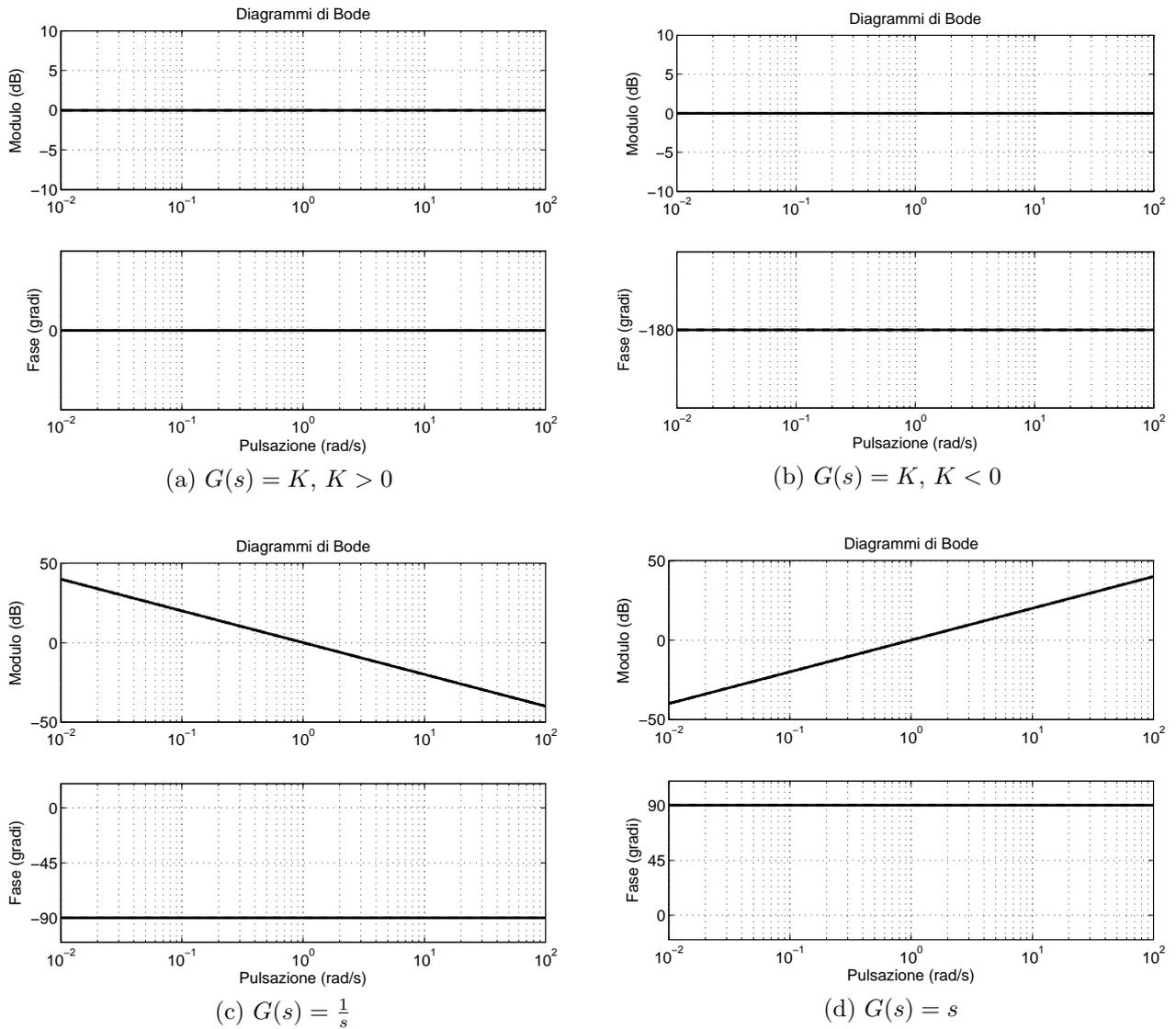


Figure 1.1. Costanti e poli e zeri nell'origine: (a) costante positiva; (b) costante negativa; (c) polo nell'origine (integrale); (d) zero nell'origine (derivata)

e quindi nel diagramma di Bode del modulo non è altro che una retta passante per l'origine con pendenza ± 20 per decade. La fase risulta

$$\angle G(j\omega) = \pm \arg(j\omega) = \pm \frac{\pi}{2}$$

cioè $+90^\circ$ nel caso di uno zero semplice e -90° nel caso di un polo semplice. Le figure 1.1(c) e 1.1(d) riportano i corrispondenti diagrammi di Bode.

Polo semplice

Modulo e fase di $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$ sono uguali a:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \right) = -20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \quad (1.11)$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctan(\omega\tau). \quad (1.12)$$

La Figura 1.2(a) riporta il diagramma di Bode di $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ cioè quando $\tau = 1$, ovvero nel caso di un polo asintoticamente stabile situato in $p = -\frac{1}{\tau} = -1$. Si possono interpretare i grafici anche come il diagramma di Bode di $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$ con in ascissa la pulsazione normalizzata da $\frac{1}{\tau}$, i.e. $\log_{10}\omega\tau$ invece di $\log_{10}\omega$. Il diagramma riporta anche delle spezzate (linee tratteggiate) che rappresentano le approssimazioni del diagramma per $\omega \rightarrow 0$ (da intendersi come $\omega \ll 1/\tau$) e per $\omega \rightarrow \infty$ (da intendersi come $\omega \gg 1/\tau$). Inoltre essendo il logaritmo una funzione monotona crescente, per la (1.11) valgono le seguenti approssimazioni:

$$|G(j\omega)|_{dB} \simeq \begin{cases} 0, & \text{per } \omega \ll 1/\tau \\ -20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \left| \frac{1}{\tau} \right|, & \text{per } \omega \gg 1/\tau \end{cases}$$

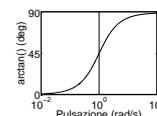
Infatti $\lim_{\omega \ll 1/\tau} |G(j\omega)|_{dB} \simeq -10 \log_{10} 1 = 0$, mentre

$$\lim_{\omega \gg 1/\tau} |G(j\omega)|_{dB} \simeq -20 \log_{10} \sqrt{(\omega\tau)^2} = -20 \log_{10} |\omega\tau|$$

Segue quindi che per ω piccoli la spezzata è una linea orizzontale pasante per l'origine, mentre per ω grande, la spezzata è una linea con pendenza -20dB/decade che interseca l'asse delle ascisse in $\left| \frac{1}{\tau} \right|$.

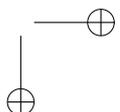
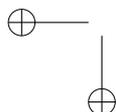
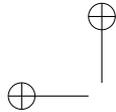
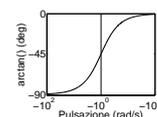
Da quanto detto finora, risulta che il diagramma del modulo ha lo stesso andamento sia per poli stabili ($\tau > 0$) che per poli instabili ($\tau < 0$), cfr 1.2(b). Lo stesso non si può dire per la fase. Come nel caso del modulo esistono delle approssimazioni del diagramma della fase per ω grande e piccolo; dalla (1.12) si ha, per $\tau > 0$,

$$\angle G(j\omega) \simeq \begin{cases} 0^\circ, & \text{per } \omega \ll 1/|\tau| \\ -90^\circ, & \text{per } \omega \gg 1/|\tau| \end{cases}$$



Nel caso di polo instabile ($\tau < 0$) si ha

$$\angle G(j\omega) \simeq \begin{cases} 0^\circ, & \text{per } \omega \ll 1/|\tau| \\ +90^\circ, & \text{per } \omega \gg 1/|\tau| \end{cases}$$



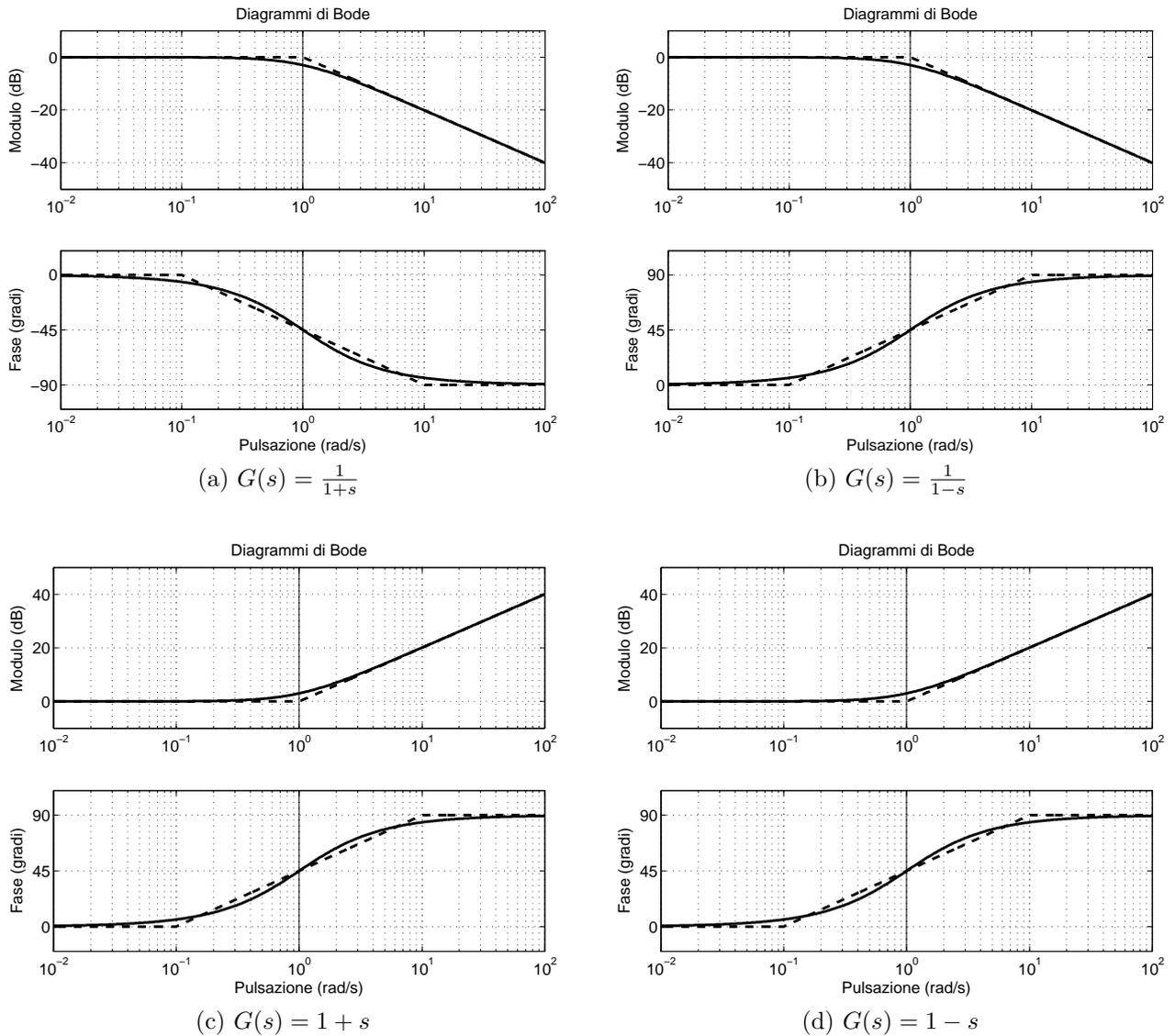


Figure 1.2. Polo e zeri semplici: (a) polo stabile; (b) polo instabile; (c) zero stabile; (d) zero instabile

Il raccordo tra queste due sole spazzate sarebbe una linea verticale che istantaneamente passa da 0° a -90° nell'intorno di $|\frac{1}{\tau}|$. Per migliorare l'approssimazione attorno a $|\frac{1}{\tau}|$, detto punto di rottura, si raccordano le due spezzate orizzontali con una linea diagonale con pendenza $\pm 90^\circ/\text{decade}$ che parte da 0° una decade prima del punto di rottura e arriva a $\mp 90^\circ$ una decade dopo il punto di rottura. I grafici delle fasi in Figura 1.2(a) e Figura 1.2(b) mostrano l'approssimazione appena definita. Nel punto di rottura sia il diagramma asintotico che quello reale assumono il valore $\mp 45^\circ$, con il segno negativo per $\tau > 0$ e con il segno positivo per $\tau < 0$.

Da notare che una approssimazione migliore nell'intorno del punto di rottura si può calcolare determinando la pendenza della retta dalla derivata prima dell'argomento. In questo caso però si avrebbe una approssimazione peggiore nei raccordi con le altre spezzate e il disegno senza calcolatore sarebbe problematico.

Zero semplice

I diagrammi di Bode per uno zero semplice si ottengono semplicemente disegnando i diagrammi speculari rispetto all'asse delle ascisse. Infatti se il modulo diminuisce all'aumentare di ω per un polo semplice, in maniera speculare il modulo aumenta all'aumentare di ω per uno zero. Lo stesso vale per la fase: se per un polo la fase aumenta/diminuisce, per uno zero succede esattamente il contrario. Per rendersi conto del diverso comportamento basta confrontare i diagrammi di Bode in Figura 1.2 per poli e zeri in RHP o LHP.

Poli complessi coniugati

Più complessa risulta l'analisi dei diagrammi di Bode per radici complesse coniugate. Si analizzerà in questa sezione il caso dei poli complessi coniugati mentre i corrispondenti diagrammi per zeri complessi coniugati verranno dedotti in maniera speculare.

Sia

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}j\omega - \frac{1}{\omega_n^2}\omega^2} \tag{1.13}$$

la funzione armonica corrispondente alla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

con poli complessi coniugati, cioè con smorzamento $|\xi| < 1$ e pulsazione naturale ω_n . Per poli asintoticamente stabili si ha $0 < \xi < 1$, mentre per poli instabili $-1 < \xi < 0$. Il caso $\xi = 0$ corrisponde a poli complessi coniugati sull'asse immaginario. Modulo e fase di (1.13) valgono

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \right) \\ &= -20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctan \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right). \tag{1.15}$$

Come per il caso dei poli semplici cerchiamo gli asintoti per $\omega \rightarrow 0$ (sempre da intendersi come $\omega \ll 1/\omega_n$) e per $\omega \rightarrow \infty$ (da intendersi come $\omega \gg 1/\omega_n$). Con ragionamenti analoghi otteniamo per il modulo i due asintoti

$$|G(j\omega)|_{dB} \simeq \begin{cases} 0, & \text{per } \omega \ll \omega_n \\ -40 \log_{10} \omega + 40 \log_{10} \omega_n, & \text{per } \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

La Figura 1.7(a) riporta il diagramma del modulo di $G(s) = \frac{1}{1+2\cdot 0.2s+s^2}$ avente pulsazione naturale unitaria¹, $\omega_n = 1$ e smorzamento $\xi = 0.2$. L'asintoto orizzontale è lo stesso nel caso del polo semplice, mentre l'asintoto obliquo per valori grandi di ω ha una pendenza di $-40\text{dB}/\text{decade}$ (ci sono due poli adesso!) e incontra l'asse delle ascisse in ω_n e l'asse delle ordinate in $40 \log_{10} \omega_n$. Si osserva come nelle espressioni dei due asintoti non entri in alcuna maniera lo smorzamento. Questo implica che al diminuire di ξ nell'intorno del punto di rottura, l'approssimazione sarà via via peggiore.

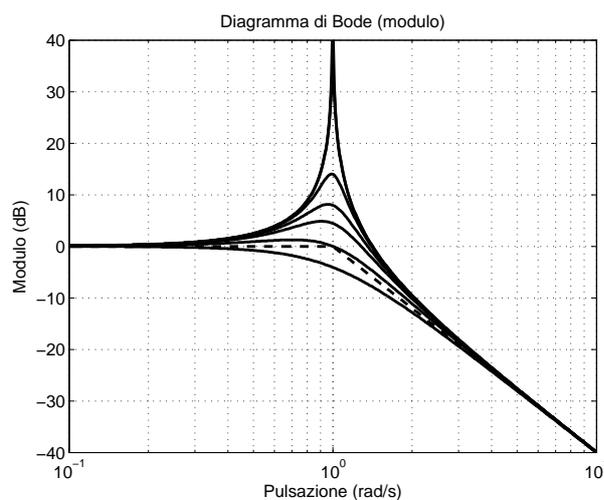


Figure 1.3. *Diagramma del modulo per poli complessi coniugati al variare dello smorzamento*

La figura 1.3 mostra questo comportamento. Per valori di ξ vicini all'unità, il diagramma è aderente al diagramma asintotico e non presenta un picco. Al diminuire dello smorzamento il picco è sempre più accentuato fino ad arrivare al valore teorico infinito per $\xi = 0$. Risulta quindi che dal valore dello smorzamento dipende come il sistema risponde ad un segnale sinusoidale nell'intorno della pulsazione naturale. Per determinare i valori caratteristici al variare di ξ si deve procedere con uno studio di funzione del modulo. In questo modo si può determinare analiticamente l'ampiezza del massimo (se esiste) e il valore della pulsazione per la quale si raggiunge, e il valore della pulsazione per cui il diagramma interseca (o meno) l'asse delle ordinate. Riscriviamo l'argomento del logaritmo in (1.14) con il cambio di variabile $x = \frac{\omega}{\omega_n}$, si ha

$$f(x) = -10 \log_{10} \{ (1 - x^2)^2 + 4\xi^2 x^2 \} = -10 \log_{10} g(x) \quad (1.16)$$

¹Come nel caso precedente si può vedere questo diagramma come quello di $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\cdot 0.2\omega_n s + \omega_n^2}$ in cui l'asse delle ascisse riporta $\log \frac{\omega}{\omega_n}$, cioè è normalizzato rispetto alla pulsazione naturale.

Essendo il logaritmo una funzione monotona crescente, il massimo di $f(x)$ si ottiene quando il suo argomento è minimo. Il minimo di $g(x) = (1 - x^2)^2 + 4\xi^2 x^2$ si ottiene uguagliando a zero la sua derivata prima

$$\frac{dg(x)}{dx} = -4(1 - x^2)x + 8\xi^2 x. \tag{1.17}$$

La soluzione che ci interessa è quella non nulla che vale $x^* = \sqrt{1 - 2\xi^2}$, a cui corrisponde la pulsazione

$$\omega^* = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}. \tag{1.18}$$

Il valore di ω^* è detto pulsazione di risonanza e corrisponde al picco nel diagramma del modulo. Importante notare che solo i valore di ξ per cui ω^* è un valore reale sono da condiderarsi. Si ha quindi che solo per $0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ il diagramma avrà un massimo. Nell'intervallo $\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1$ il massimo si ottiene per $\omega = 0$ che corrisponde alla soluzione nulla di (1.17). L'ampiezza del modulo in ω^* si chiama picco di risonanza e vale

$$\begin{aligned} M_{dB}^* &:= |G(j\omega^*)|_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{(\omega^*)^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{(\omega^*)^2}{\omega_n^2}} \\ &= -20 \log_{10} \left(2\xi \sqrt{1 - \xi^2}\right). \end{aligned} \tag{1.19}$$

M_{dB}^* è un valore positivo nel range di ξ che interessa e non dipende dalla pulsazione naturale. La Figura 1.4 riporta il valore di ω^*/ω_n e di M_{dB}^* in funzione dello smorzamento. Resta infine da determinare il valore dell'intersezione del diagramma

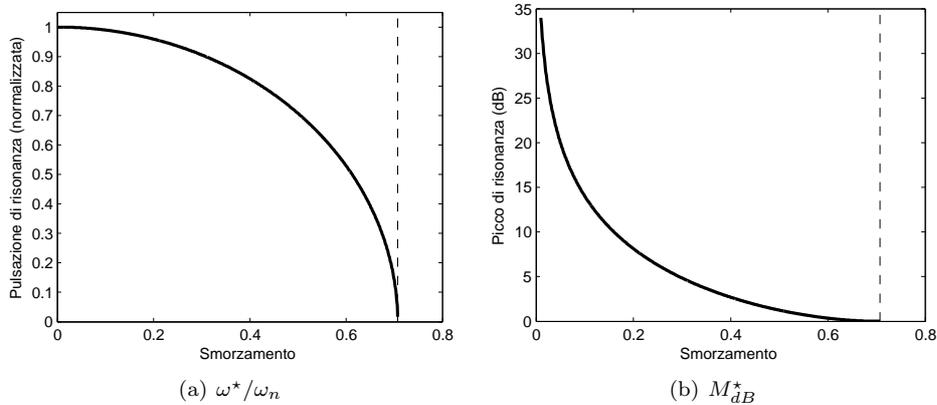


Figure 1.4. Pulsazione di risonanza e picco di risonanza.

del modulo con l'asse a 0dB. Questo si presenza quando si ha un massimo, cioè solo per pulsazioni nell'intervallo $0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Il modulo $f(x)$ (in dB) vale 0 quando l'argomento $g(x)$ è pari a 1, cioè per

$$(1 - x^2)^2 + 4\xi^2 x^2 = 1. \tag{1.20}$$

Si ricava quindi:

$$x^2 [(4\xi^2 + 1)x^2 - 2] = 0, \tag{1.21}$$

che fornisce, oltre alla soluzione nulla

$$\omega_{0dB} = \omega_n \sqrt{\frac{2}{4\xi^2 + 1}} \tag{1.22}$$

da cui risulta che per $0 \leq \xi < \frac{1}{2}$ la pulsazione di attraversamento è più piccola della pulsazione naturale, $\omega_{0dB} < \omega_n$, mentre per $\frac{1}{2} < \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ vale $\omega_{0dB} > \omega_n$. si ha uguaglianza per $\xi = \frac{1}{2}$. L'andamento di ω_{0dB} in funzione di ξ è riportato in Figura 1.5

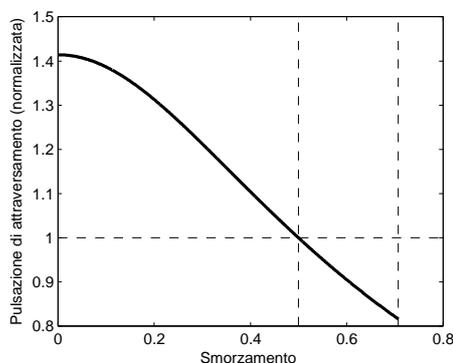


Figure 1.5. *Intersezione del diagramma del modulo con l'asse delle ascisse per poli complessi coniugati al variare dello smorzamento*

Per quanto riguarda il caso dei poli complessi coniugati nel semipiano destro, tutte le osservazioni fatte rimangono con l'unica eccezione di considerare gli intervalli speculari per lo smorzamento (e.g. $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \xi \leq 0$). Si può infatti vedere facilmente come nelle espressioni chiave appaia sempre il quadrato dello smorzamento e mai lo smorzamento da solo.

Passiamo ora ad analizzare la fase in (1.15). Per quanto riguarda gli asintoti abbiamo

$$\angle G(j\omega) \simeq \begin{cases} 0^\circ, & \text{per } \omega \ll \omega_n \\ -180^\circ, & \text{per } \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

per poli stabili (i.e. $0 < \xi < 1$) e

$$\angle G(j\omega) \simeq \begin{cases} 0^\circ, & \text{per } \omega \ll \omega_n \\ +180^\circ, & \text{per } \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

per poli instabili (i.e. $-1 < \xi < 0$). Come nel caso dei poli semplici, la differenza tra radici nel semipiano destro e sinistro si trova nel diagramma di Bode della fase mentre quello del modulo è identico.

Abbiamo visto in precedenza come il valore dello smorzamento influenza il comportamento del modulo nell'intorno del punto di rottura. Lo stesso vale per la fase come si evince dai diagrammi in Figura 1.6. Per ξ che si avvicina a zero,

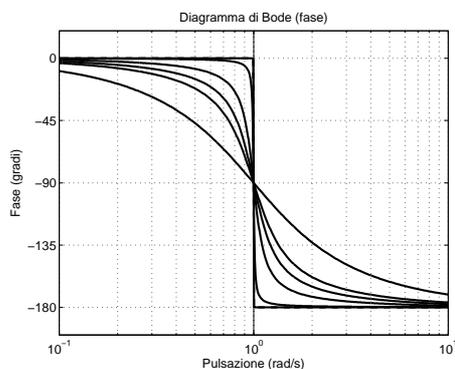


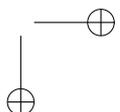
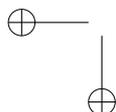
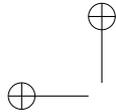
Figure 1.6. *Diagramma della fase per poli complessi coniugati al variare dello smorzamento ($\xi > 0$).*

aumenta l'inclinazione del diagramma del modulo nell'intorno della pulsazione naturale. Per $\xi = 0$ la linea è esattamente verticale in quanto si ha una discontinuità. In questo caso si può pensare a quale sia l'approssimazione lineare migliore del diagramma delle fasi in funzione dello smorzamento. Una soluzione potrebbe essere quella di approssimare il raccordo tra gli asintoti orizzontali con una linea tangente la fase nel punto di spezzamento, cioè in ω_n . Questa approssimazione è sufficientemente accurata per valori dello smorzamento piccoli. Una soluzione "mediamente buona" è quella di raccordare gli asintoti con una spezzata nell'intervallo $[\omega_n 10^{-|\xi|}, \omega_n 10^{|\xi|}]$. Segue quindi che più piccolo è lo smorzamento (in modulo) minore è l'ampiezza dell'intervallo, e quindi maggiore (in modulo) la pendenza della retta.

Zeri complessi coniugati

Come per il caso delle radici semplici, anche per gli zeri complessi coniugati (in RHP o LHP) si ha che i diagrammi di Bode si ottengono dai diagrammi dei corrispondenti poli complessi coniugati (in RHP o LHP) ribaltati rispetto l'asse delle ascisse. I diagrammi in Figura 1.7 illustrano queste relazioni per $G(s) = (1 \pm 2 \cdot 0.2s + s^2)^{\pm 1}$.

Example 1.5 Tracciare ■



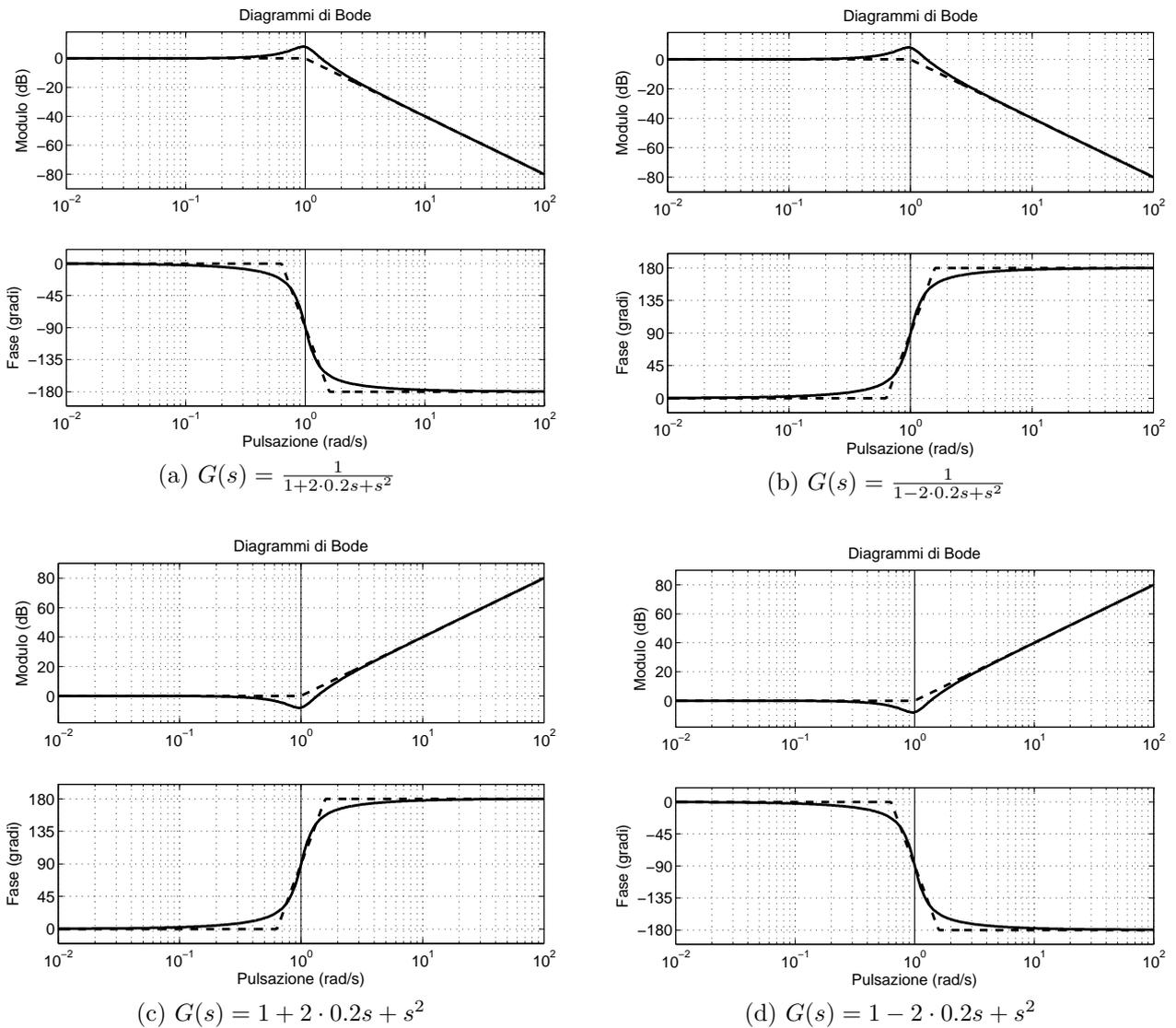


Figure 1.7. Polo e zeri doppi complessi coniugati: (a) poli stabili; (b) poli instabili; (c) zeri stabili; (d) zeri instabili

1.3 Margini di stabilità

Nel capitolo precedente abbiamo definito la nozioni di stabilità di un sistema e abbiamo visto come questa si collega naturalmente alla posizione dei suoi poli nel piano complesso. Nelle sezioni precedenti abbiamo anche visto come i diagrammi di Bode si possono costruire a partire dalla forma di Bode conoscendo la posizione dei poli e degli zeri della funzione di trasferimento. Si può quindi cercare un legame tra il diagramma di Bode di una funzione in catena aperta $G(s)$ e la stabilità del corrispondente sistema in catena chiusa. In particolare cercheremo questo legame quando il sistema $G(s)$ è in cascata ad una costante K come in Figura 1.8(a) o riceve il valore in ingresso con un ritardo τ come in Figura 1.8(b).

USARE $L(s)$ INVECE DI $G(s)$

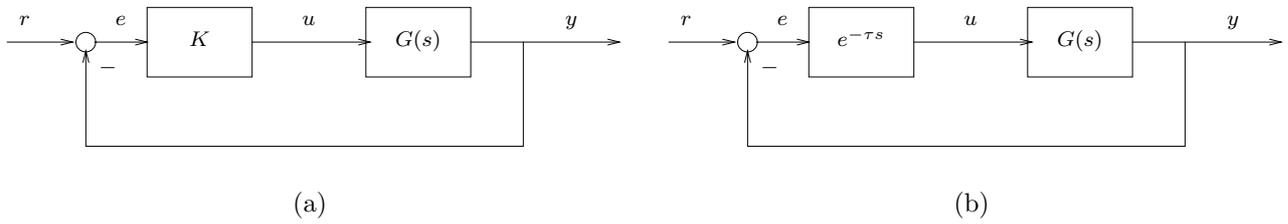


Figure 1.8. Diagrammi a blocchi con costante moltiplicativa (a), e ritardo fisso (a)

È importante sottolineare che la funzione $G(s)$ può essere anche interpretata come il prodotto della funzione di trasferimento del controllore e di quella dell'impianto. Si vuole quindi capire dai diagrammi di Bode di $G(s)$ se il sistema in anello chiuso è stabile o no, ed eventualmente avere una misura di quanto vicino è all'instabilità.

Prima di dare le definizioni formali dei margini di stabilità, procediamo nell'analizzare un semplice esempio. Sia la funzione in anello aperto data da un sistema del secondo ordine con un polo nell'origine e un polo reale doppio stabile:

$$G(s) = \frac{100}{s(s + 10)^2}. \tag{1.23}$$

La funzione in anello chiuso con retroazione unitaria vale

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{100}{s^3 + 20s + 100s + 100}$$

e la sua tabella di Routh

3	1	100
2	20	100
1	95	0
0	100	0

ci dice che è asintoticamente stabile. È vero anche se al posto di $G(s)$ abbiamo $KG(s)$? Per rispondere a questa domanda calcoliamo esplicitamente la nuova funzione di trasferimento in anello chiuso che diventa

$$T_K(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{100}{s^3 + 20s + 100s + 100K}$$

e la corrispondente tabella di Routh

3	1	100
2	20	100K
1	100-5K	0
0	100K	0

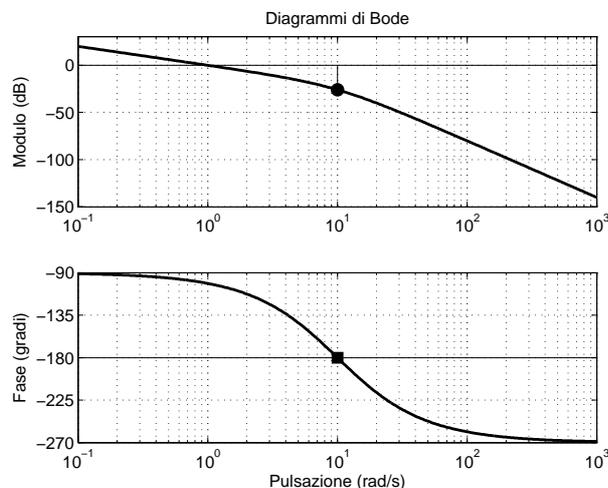


Figure 1.9. Margine di ampiezza

Si vede quindi che per $K > \bar{K} := \frac{100}{5}$ il sistema diventa instabile. Si può leggere questo valore direttamente sul diagramma di Bode di $G(s)$? La risposta è affermativa: basta leggere il valore (cerchio nero in Figura 1.9) nel diagramma del modulo in corrispondenza alla pulsazione ω_π il cui la fase vale -180° (quadrato nero in Figura 1.9). In quel punto la risposta armonica di $G(s)$ è un numero reale negativo

$$G(j\omega_\pi) = -|G(j\omega_\pi)|$$

il cui modulo è esattamente uguale al valore letto nel diagramma del modulo (in dB). L'esempio precedente fornisce il valore $|G(j\omega_\pi)|_{dB} \simeq -26dB$ ovvero $|G(j\omega_\pi)| = \frac{1}{20}$. Il valore di \bar{K} limite trovato studiando la tabella di Routh è esattamente uguale all'inverso del modulo (non in dB) di $G(j\omega)$ valutato in ω_π . A quella pulsazione con $K = \bar{K}$ si vede che la funzione armonica ha il denominatore nullo

$$T_{\bar{K}}(j\omega_\pi) = \frac{\bar{K}G(j\omega_\pi)}{1 + \bar{K}G(j\omega_\pi)} = \frac{-\bar{K}|G(j\omega_\pi)|}{1 - \bar{K}|G(j\omega_\pi)|} = \frac{-1}{1 - 1}$$

Ricapitoliamo quanto detto finora nella seguente definizione:

Margine di ampiezza **Definition 1.6.** Il margine di ampiezza m_g è definito come l'inverso del modulo della funzione di trasferimento in anello aperto valutato alla pulsazione ω_π a cui corrisponde una fase di -180°

$$m_g \triangleq \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|} \tag{1.24}$$

o

$$m_g^{dB} \triangleq -20 \log_{10} |G(j\omega_\pi)|, \tag{1.25}$$

se espresso in decibel.

In altre parole m_g si può intendere come il fattore moltiplicativo che porta il sistema in catena chiusa all'intabilità. Per $K < m_g$ il sistema resta stabile, per $K = m_g$ presenta una coppia di poli complessi coniugati sull'asse immaginario, mentre per $K > m_g$ il sistema diventa instabile.

Purtroppo però la conclusione "si ha stabilità se e solo se $m_g^{dB} > 0$ " è verificata solo per i sistemi in cui il modulo ha un andamento regolare, cioè quelli per cui $|G(j\omega)|$ è una funzione monotona decrescente.

Example 1.7 poli in RHP ■

Example 1.8 zeri in RHP ■

Example 1.9 attraversamenti multipli ■

Analizziamo ora il caso in Figura 1.8 per la funzione di trasferimento (1.23). Un ritardo nella catena diretta implica che l'ingresso di comando del sistema $u(t)$ è legato al segnale di errore da:

$$u(t) = e(t - \tau).$$

In questa condizioni non si può più calcolare in forma chiusa la funzione di trasferimento del sistema in retroazione. Fortunatamente possiamo lo stesso dire qualcosa perché la trasformata di Laplace del ritardo vale $e^{-\tau s}$ e quindi la funzione armonica vale $e^{-j\omega\tau}$. Il modulo e la fase della risposta armonica del ritardo $D(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$ sono

$$|D(j\omega)| = 1, \quad \angle D(j\omega) = -\omega\tau.$$

Consideriamo ancora il diagramma di Bode di (1.23) ed evidenziamo il punto in cui il modulo è unitario. La pulsazione ω_c in cui $|G(j\omega)| = 1$ è detta pulsazione di attraversamento (*crossover frequency*). In corrispondenza di ω_c leggiamo il valore della fase, $\angle G(j\omega_c)$ come illustrato in Figura 1.10.

pulsazione di attraversamento

Risulta quindi che

$$G(j\omega_c) = 1e^{j\angle G(j\omega_c)}$$

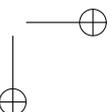
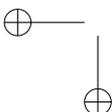
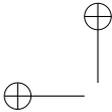
che in presenza del ritardo diventa alla stessa pulsazione ω_c

$$D(j\omega_c)G(j\omega_c) = 1e^{j[\angle G(j\omega_c) - \omega_c\tau]}$$

Se τ è tale da portare $\angle G(j\omega_c) - \omega_c\tau = 180^\circ$, si ha il denominatore nullo per la funzione (non razionale adesso!)

$$T_\tau(j\omega_c) = \frac{e^{-j\omega_c\tau}G(j\omega_c)}{1 + e^{-j\omega_c\tau}G(j\omega_c)} = \frac{-1}{1 - 1}$$

Si formalizza quanto detto nella seguente definizione



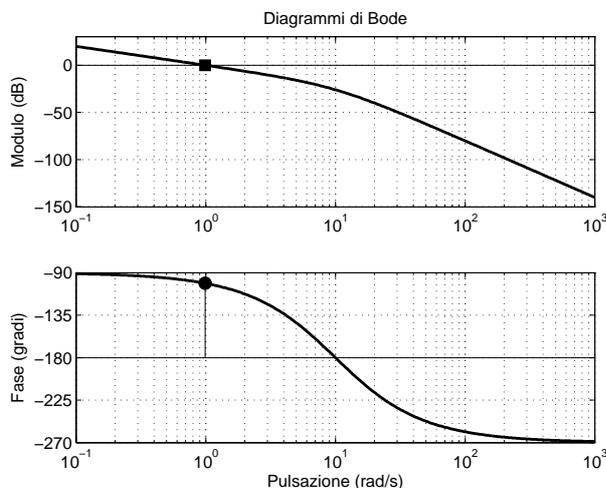


Figure 1.10. Margine di fase

margin **Definition 1.10.** Il margine di fase m_φ è dato dall'angolo che bisogna sottrarre alla fase calcolata nella pulsazione di attraversamento ω_c per ottenere -180° ; in formule

$$m_\varphi \triangleq 180^\circ + \angle(G(j\omega_c)). \quad (1.26)$$

Senza riferirsi al ritardo, si può dire in generale che il margine di fase ci dice qual'è l'angolo massimo che possiamo sottrarre per portare il sistema in retroazione all'instabilità. Anche in questo caso la frase "Si ha stabilità se e solo se $m_\varphi > 0$ " vale solo per i sistemi regolari.

Example 1.11 poli/zeri in RHP ■

Example 1.12 esempio con ritardo ■

1.4 Criterio di Bode

Theorem 1.13 (Criterio di Bode). Si consideri il sistema retroazionato in cui

- (i) $L(s)$ non abbia poli con parte reale maggiore di zero ($P = 0$),
- (ii) il diagramma di Bode del modulo di $L(j\omega)$ attraversi una sola volta l'asse a $0dB$.

Allora, indicando con K_B il guadagno di $L(s)$ e con φ_m il margine di fase, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema sia asintoticamente stabile è che risulti $K_B > 0$ e $\varphi_m > 0$.

1.5 Parametri dinamici sul diagramma di Bode

Definition 1.14 (pulsazione di risonanza). *La pulsazione di risonanza è la pulsazione dove il modulo della funzione di trasferimento assume il valore massimo.*

Definition 1.15 (picco di risonanza). *Il picco di risonanza è il rapporto tra il massimo modulo della funzione di trasferimento e il valore statico (i.e. valore per $\omega = 0$).*

Definition 1.16 (banda passante). *La banda passante è la pulsazione alla quale il modulo della funzione della risposta armonica è inferiore di 3dB al valore statico (il rapporto vale $1/\sqrt{2}$).*

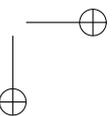
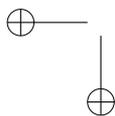
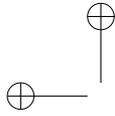
$$|W(j2\pi B)| = \frac{|W(0)|}{\sqrt{2}} \quad (1.27)$$

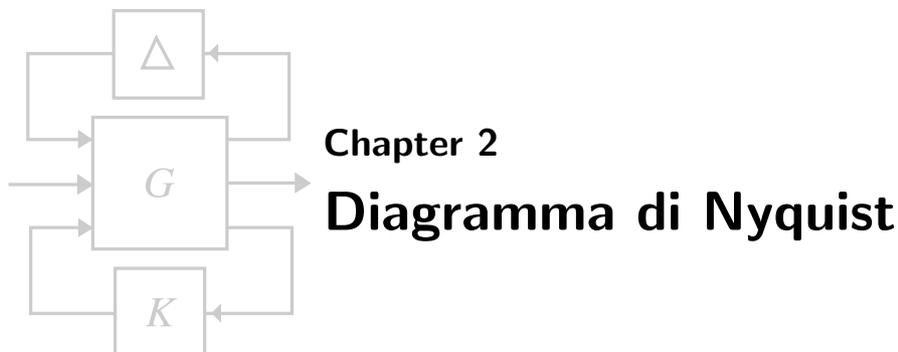
1.6 I diagrammi di Bode per sistemi a tempo discreto

DA INSERIRE? mah

Exercises

- 1.1. Disegnare i diagrammi di Bode di BLA BLA
- 1.2.





Chapter 2 Diagramma di Nyquist

If a cluttered desk is the sign of a cluttered mind, what is the significance of a clean desk?

—Laurence J. Peter

In questo capitolo introdurremo i diagrammi di Nyquist come un secondo strumento per rappresentare la risposta in frequenza associata ad una funzione di trasferimento. Questi diagrammi sono estremamente utili perché permettono di prevedere il comportamento del sistema in anello chiuso.

2.1 Introduzione

Nel capitolo precedente abbiamo visto come la funzione di risposta armonica (o, più brevemente, risposta in frequenza) di una generica funzione di trasferimento

$$G(s) = K_B \frac{\prod_{i=1}^m (1 + s\bar{\tau}_i)^{\bar{\mu}_i} \prod_{i=1}^n \left(1 + 2\frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\omega}_i} s + \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} s^2\right)^{\bar{\nu}_i}}{s^k \prod_{i=1}^m (1 + s\tau_i)^{\mu_i} \prod_{i=1}^n \left(1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_i} s + \frac{1}{\omega_i^2} s^2\right)^{\nu_i}} \quad (2.1)$$

si ottiene sostituendo a s la variabile complessa $j\omega$. Al variare della pulsazione $\omega \in \mathbb{R}$, la funzione complessa $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = K_B \frac{\prod_{i=1}^m (1 + j\omega\bar{\tau}_i)^{\bar{\mu}_i} \prod_{i=1}^n \left(1 + 2\frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\omega}_i} j\omega - \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} \omega^2\right)^{\bar{\nu}_i}}{(j\omega)^k \prod_{i=1}^m (1 + j\omega\tau_i)^{\mu_i} \prod_{i=1}^n \left(1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_i} j\omega - \frac{1}{\omega_i^2} \omega^2\right)^{\nu_i}} \quad (2.2)$$

descrive nel piano complesso (piano di Gauss) una curva. Fissato $\bar{\omega}$, il modulo e la fase del numero complesso $G(j\bar{\omega}) = \text{Re } G(j\bar{\omega}) + j\text{Im } G(j\bar{\omega})$ rappresentano le quantità che si possono leggere sui diagrammi di Bode del modulo e della fase in corrispondenza dell'ascissa $\bar{\omega}$.

In questo capitolo vogliamo studiare il significato del diagramma ottenuto da

$$\omega \in [-\infty, +\infty] \mapsto G(j\omega) \in \mathbb{C} \quad (2.3)$$

sul piano complesso. Abbiamo già visto nel capitolo sul diagramma di Bode l'importanza del valore di $G(j\omega)$, si vuole ora dedurre dal diagramma di $G(j\omega)$ al variare di ω altre informazioni importanti per il controllo dei sistemi. Per arrivare a questi risultati abbiamo bisogno di introdurre alcuni concetti di analisi complessa.

2.1.1 Alcune definizioni

Definition 2.1. Dato l'intervallo $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e due funzioni reali di variabile reale $x(t), y(t)$, $t \in [a, b]$ derivabili. La funzione γ definita come

$$\gamma = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b]$$

si chiama curva regolare in \mathbb{R}^2 . Il suo orientamento è definito dall'ordinamento dei punti dell'immagine indotto dall'ordinamento dei punti in $[a, b]$. (i.e. il verso positivo di percorrenza della curva è quello che inizia in $(x(a), y(a))$ e finisce in $(x(b), y(b))$.)

Una curva γ si dice generalmente regolare, se è regolare salvo in un numero finito di punti.

Una curva γ si dice chiusa se vale $x(a) = x(b)$ e $y(a) = y(b)$.

Una curva γ si dice semplice se $\forall t_1 \neq t_2$ si ha $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$.

Un contorno è una curva generalmente regolare, chiusa e semplice.

Sfruttando l'isomorfismo tra \mathbb{R}^2 e il piano complesso \mathbb{C} , le definizioni precedenti valgono anche sul piano di Gauss considerando x e y come la parte reale e immaginaria del numero complesso $z(t) = x(t) + jy(t)$.

Definition 2.2. Si chiama funzione complessa di variabile complessa, la funzione che fa corrispondere alla variabile complessa $s \in \mathbb{C}$, uno o più valori $w = f(s)$ in \mathbb{C} . (Se il valore è unico la funzione si dice monodroma, altrimenti polidroma.)

Risulta quindi che una funzione di trasferimento $G(s)$ nella variabile (complessa) di Laplace s è una funzione complessa di variabile complessa.

Per la generica funzione $w = f(s)$ con $s = x + jy$, si può scrivere la decomposizione

$$w = u(x, y) + jv(x, y)$$

dove $u(x, y)$ è la parte reale e $v(x, y)$ è la parte immaginaria.

Vale la pena introdurre anche la definizione di limite infinito per una funzione complessa di variabile complessa.

Definition 2.3. La funzione complessa di variabile complessa f definita su $\Sigma \subseteq \mathbb{C}$ ha limite infinito per $s \rightarrow s_0$ se, fissato $M > 0$, esiste $\delta > 0$ tale per ogni $s \in \Sigma$ tale che $0 < |s - s_0| < \delta$ si abbia $|f(s)| > M$.

Questa definizione si applica quando vi vuole studiare il comportamento di una funzione di trasferimento nei suoi poli. Da notare che il limite è infinito senza segno. Il punto all'infinito (o punto improprio) non appartiene a \mathbb{C} ; indicheremo con \mathbb{C}^* il completamento del piano complesso con il punto all'infinito: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e diremo che tutte le successioni con elementi complessi con limite infinito hanno come limite l'elemento $\{\infty\}$.

Definition 2.4. Sia Ω una regione sul piano complesso \mathbb{C} (piano di Gauss). Una funzione complessa $f(s)$ definita su Ω si dice *olomorfa*² se è derivabile in ogni punto $s_0 \in \Omega$, cioè se esiste la sua derivata

$$f'(s) := \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}, \quad \forall s_0 \in \Omega.$$

La classe delle funzioni olomorfe su Ω è uno spazio vettoriale³ su \mathbb{C} che viene indicato con $H(\Omega)$.

Definition 2.5. Data una funzione $f \in \Omega$, un punto $p \in \Omega$ si dice *punto singolare isolato* per $f(s)$ se esiste un intorno I di p tale che $f(s)$ è olomorfa in $I \setminus \{p\}$ e non sia olomorfa in tutto I .

Risulta quindi che una funzione di trasferimento descritta come rapporto di polinomi irriducibili $G(s) = K \frac{n(s)}{d(s)}$ è una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ dove p_1, \dots, p_n sono le radici del polinomio a denominatore $d(s)$, cioè i suoi poli.

Definition 2.6. Una trasformazione $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ (o $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$) che trasforma due curve regolari che si intersecano in s_0 con angolo α in due curve regolari che si intersecano in $w_0 = f(s_0)$ con lo stesso angolo e verso, si chiama *conforme*.

Theorem 2.7. Una funzione olomorfa f induce una trasformazione conforme nell'intorno di ogni punto in cui $f'(s) \neq 0$.

Example 2.8 Data la funzione di trasferimento $F(s) = \frac{s+5}{s^2+5s+10}$, vogliamo applicare la trasformazione conforme indotta dalla $F(s)$ ad alcune curve sul piano complesso. Detto $s \in \gamma_i$ il generico elemento nel piano complesso $\text{Re}(s) - \text{Im}(s)$ appartenente alla curva γ_i , il corrispondente punto attraverso $F(s)$ sarà indicato con w sul piano complesso $\text{Re}(w) - \text{Im}(w)$ e apparterrà alla curva Γ_i . Consideriamo i due contorni:

²In alcuni testi queste funzioni vengono anche chiamate *analitiche*, e.g. [?].

³In realtà $H(\Omega)$ è qualcosa di più di uno spazio vettoriale, è infatti un anello: date due funzioni $f, g \in H(\Omega)$, si ha che $f + g \in H(\Omega)$ e $fg \in H(\Omega)$.

s-plane	w-plane
$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = \cos(t) + 1 \\ y(t) = 2 \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$	$\Gamma_1 = \{w = F(s) s = (x, y) \in \gamma_1\}$
$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) \\ y(t) = 2 \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$	$\Gamma_2 = \{w = F(s) s = (x, y) \in \gamma_2\}$

In figura 2.8 sono riportate le coppie (γ_1, Γ_1) e (γ_2, Γ_2) . Curve chiuse nel piano s vengono mappate in curve chiuse nel piano w . È comunque interessante notare cosa succede quando il contorno contiene o meno i poli della funzione $F(s)$ (indicato con delle \times nelle figure 2.8.a e 2.8.c). Quando s parte da un punto qualsiasi di γ_i e vi ritorna, anche il corrispondente punto $w = F(s)$ percorre tutta la curva Γ_i . Facendo questo, la curva Γ_i può girare intorno all'origine oppure no. Il percorso in figura 2.8.b non gira mai intorno l'origine mentre il percorso in figura 2.8.d gira intorno all'origine due volte. Da notare come il numero di poli della funzione di trasferimento $F(s)$ all'interno dei contorni γ_1 e γ_2 siano esattamente 0 e 2. Come vedremo nel seguito questo non è assolutamente un caso ma discende da un risultato di analisi complessa noto come Teorema dell'indicatore logaritmico che verrà enunciato nella sezione 2.4. Questo risultato sarà cruciale per derivare il criterio di Nyquist. ■

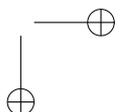
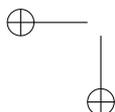
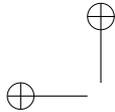
Per quanto detto in precedenza i valori che più ci interessano sul piano complesso sono quelli puramente immaginari, cioè quelli per cui $x = 0$ e $y = \omega$. Nell'esempio seguente considereremo la trasformazione conforme di intervalli finiti sull'asse immaginario.

Example 2.9 Consideriamo ancora la funzione di trasferimento dell'esempio 2.8 e la utilizziamo come trasformazione conforme sui contorni seguenti

s-plane	w-plane
$\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [-1, 1]$	$\Gamma_3 = \{w = F(s) s = (x, y) \in \gamma_3\}$
$\gamma_4 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [-2, 2]$	$\Gamma_4 = \{w = F(s) s = (x, y) \in \gamma_4\}$

Le coppie (γ_3, Γ_3) e (γ_4, Γ_4) sono riportate in figura 2.2. Come è facile immaginare, aumentando l'intervallo sull'asse immaginario, aumenta la curva sul piano complesso di arrivo. Vedremo nella prossima sezione come disegnare il circuito quando ω varia da $-\infty$ a $+\infty$. ■

Osservazione trasformazione di Mobius, teorema di Riemann (p.77)



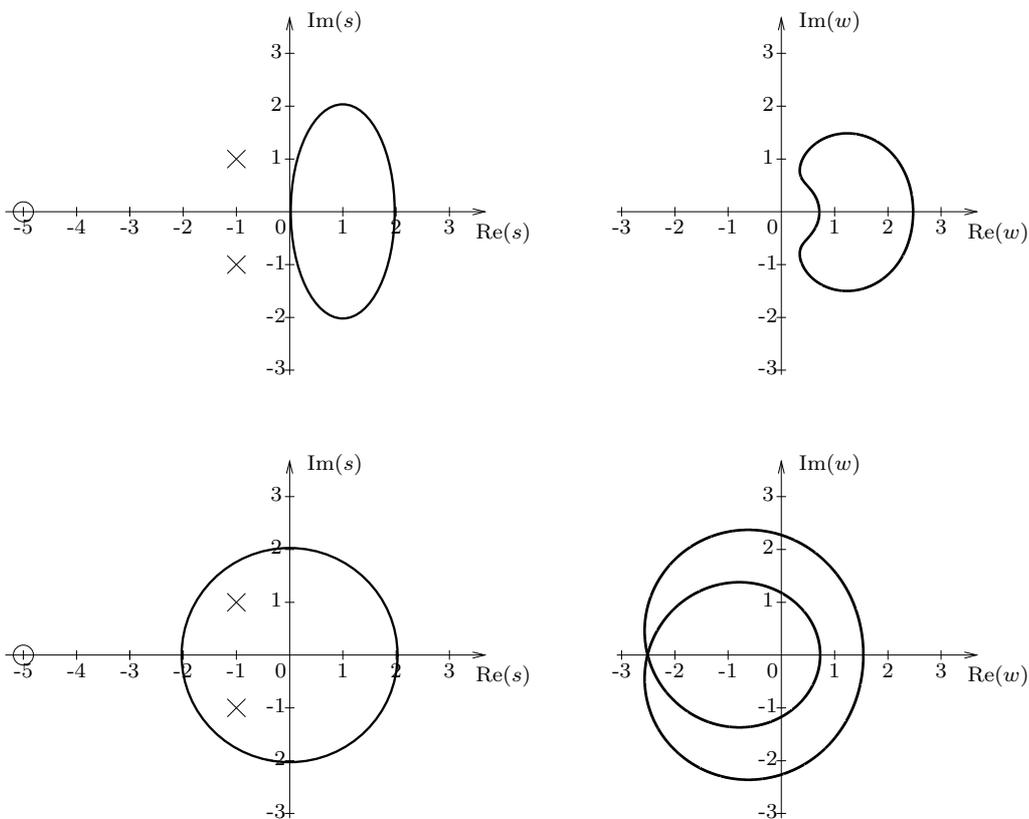
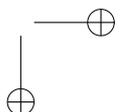
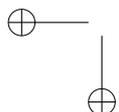


Figure 2.1. Curve nel piano complesso s e w relative all'esempio 2.8.

2.2 Regole per il tracciamento

Le regole per il tracciamento del diagramma di Nyquist permettono solo di avere una idea qualitativa del suo andamento. Nonostante questo anche un diagramma approssimato permette di dedurre la proprietà di stabilità, o meno, del sistema in anello chiuso. Questo verrà spiegato nella sezione 2.4.

Prima di tutto è comunque bene ricordare che è sufficiente disegnare il grafico per le ω positive e sfruttare poi la simmetria Hermitiana per la parte relativa alle ω negative. Le due "metà" del diagramma di Nyquist sono infatti simmetriche rispetto all'asse reale.



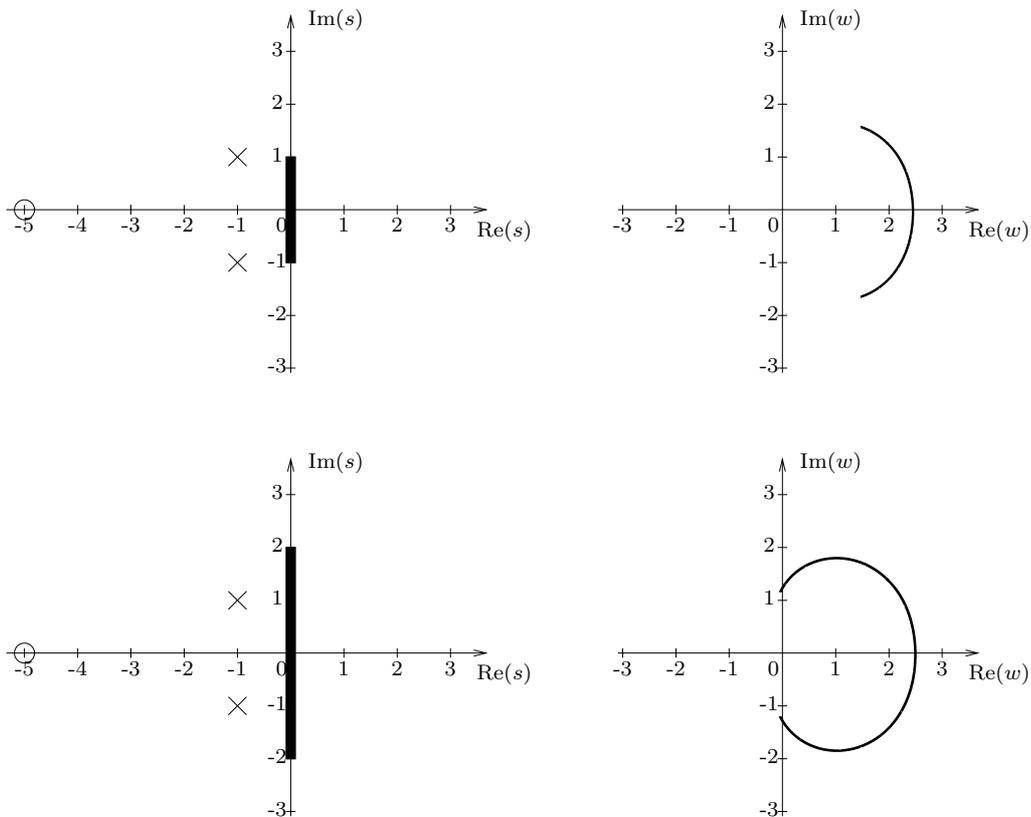


Figure 2.2. Curve nel piano complesso s e w relative all'esempio 2.9.

2.2.1 Comportamento per $\omega \rightarrow 0^+$

Per studiare il comportamento nell'intorno della pulsazione nulla utilizziamo la seguente scrittura per la funzione armonica

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1j\omega + a_0} \quad (2.4)$$

derivata dalla rappresentazione della funzione di trasferimento come rapporto di due polinomi primi.

$$G(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_0}$$

Si assume inoltre che $n \geq m$, $a_n \neq 0$ e $b_n \neq 0$ per garantire la causalità del sistema. Nel caso in cui non si siano radici nulle a numeratore e a denominatore, si ha

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G(j\omega) = \frac{b_0}{a_0}$$

e quindi il diagramma parte dall'asse reale ($b_0, a_0 \in \mathbb{R}$) in corrispondenza del punto $\frac{b_0}{a_0}$. La fase sarà 0 o -180° a seconda del segno del rapporto.

Se il denominatore ha k poli nell'origine, si avrà

k poli
nell'origine

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1j\omega + b_0}{(j\omega)^k (a_n(j\omega)^{n-k} + a_{n-1}(j\omega)^{n-1-k} + \dots + a_k)} \quad (2.5)$$

con $a_k \neq 0$. Il limite per ω che tende a zero diventa

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{b_0}{j^k \omega^k a_k}$$

Separando modulo e fase si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| &= \infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) &= -k \frac{\pi}{2} + \angle \frac{b_0}{a_k} \end{aligned}$$

Per calcolare gli asintoti si parte col determinare la parte reale e la parte immaginaria dell'approssimante

$$G(j\omega) \simeq G_s(j\omega) = \frac{b_0 + jb_1\omega}{j^k \omega^k (a_k + ja_{k+1}\omega)}$$

Sviluppando i conti si arriva a

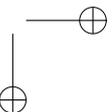
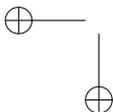
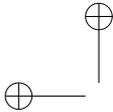
$$G_s(j\omega) = \frac{a_k b_0 + a_{k+1} b_1 \omega^2 + j\omega (a_k b_1 - a_{k+1} b_0)}{j^k \omega^k (a_k^2 + a_{k+1}^2 \omega^2)} = \text{Re } G_s(j\omega) + j \text{Im } G_s(j\omega)$$

con (CONTROLLARE LE POTENZE)

$$\begin{aligned} \text{Re } G_s(j\omega) &= \begin{cases} (-1)^{k/2} \frac{a_k b_0 + a_{k+1} b_1 \omega^2}{\omega^k (a_k^2 + a_{k+1}^2 \omega^2)}, & k \text{ pari} \\ (-1)^{(k+3)/2} \frac{(a_k b_1 - a_{k+1} b_0)}{\omega^{k-1} (a_k^2 + a_{k+1}^2 \omega^2)}, & k \text{ dispari} \end{cases} \\ \text{Im } G_s(j\omega) &= \begin{cases} (-1)^{k/2} \frac{(a_k b_1 - a_{k+1} b_0)}{\omega^{k-1} (a_k^2 + a_{k+1}^2 \omega^2)}, & k \text{ pari} \\ (-1)^{(k+3)/2} \frac{a_k b_0 + a_{k+1} b_1 \omega^2}{\omega^k (a_k^2 + a_{k+1}^2 \omega^2)}, & k \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \text{Re } G_s(j\omega) = \begin{cases} \frac{(a_k b_1 - a_{k+1} b_0)}{a_k^2}, & k = 1 \\ \text{sgn} \infty, & k > 1, k \text{ pari} \\ \infty, & k > 1, k \text{ dispari} \end{cases}$$



e

METTERE A POSTO

Lo stesso tipo di ragionamento si può fare quando c'è una eccedenza di zeri k nell'origine. In questo caso la funzione di risposta armonica diventa nell'origine

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega)^k (b_m(j\omega)^{m-k} + b_{m-1}(j\omega)^{m-1-k} + \dots + b_{k+1}j\omega + b_k)}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} \quad (2.6)$$

con $b_k \neq 0$ e quindi il calcolo della parte reale e immaginaria risulta più semplice; infatti

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{(j\omega)^k b_k}{a_0} = \begin{cases} 0^+, & \text{if sgn}\{k\} \text{ is negative} \\ 0^-, & k > 1, k \text{ dispari} \end{cases}$$

Example 2.10 esempio asintoti ■

2.2.2 Comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$

Il comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$ dipende dal gradi relativo tra numeratore e denominatore in 2.4. Se $n = m$ si ha che il limite è un valore reale pari a:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(j\omega) = \frac{b_n}{a_n}$$

mentre se $n > m$ il valore di $G(j\omega)$ sarà in generale un numero complesso in cui

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = 0$$

e

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G(j\omega) = \angle \left(\frac{1}{j^{n-m} \omega^{n-m}} \frac{b_m}{a_n} \right) = (m-n) \frac{\pi}{2} + \angle \frac{b_m}{a_n}.$$

Il termine $\frac{b_m}{a_n}$ assume il valore 0 se i segni di b_m e a_n sono concordi, altrimenti $-\pi$.

2.2.3 Intersezioni con l'asse reale

Sia

$$G(j\omega) = G^{\text{Re}}(\omega) + jG^{\text{Im}}(\omega)$$

la decomposizione in parte reale e parte immaginaria della funzione armonica $G(j\omega)$, con $G^{\text{Re}}(\omega)$ e $G^{\text{Im}}(\omega)$ funzioni reali di variabile reale. I valori della pulsazione ω per cui il diagramma di Nyquist interseca l'asse delle ascisse sono quelli, se esistono, che annullano la parte immaginaria

$$G^{\text{Im}}(\omega_i) = 0.$$

In corrispondenza di questi valori, il diagramma interseca l'asse reale nei punti di ascissa

$$\sigma_i = G^{\text{Re}}(\omega_i).$$

2.2.4 Intersezioni con l'asse immaginario

A differenza del caso precedente, le eventuali intersezioni con l'asse immaginario si trovano in corrispondenza delle pulsazioni che annullano la parte reale, i.e. $G^{\text{Re}}(\omega_i) = 0$. Il diagramma assume in quei punti il valore complesso $jG^{\text{Im}}(\omega_i)$.

Example 2.11 Si vogliono determinare le intersezioni con gli assi cartesiani della funzione di risposta armonica corrispondente alla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{k10s(1 - 10s)}{(1 + 5s)(1 + 2s)}.$$

con $K \in \mathbb{R}^+$. Sostituendo $s = j\omega$ si ottiene

$$G(j\omega) = \frac{k10j\omega(1 - 10j\omega)}{(1 + 5j\omega)(1 + 2j\omega)}.$$

la cui scrittura in parte reale e immaginaria è

$$G(j\omega) = \underbrace{\frac{k10\omega^2(17 - 100\omega^2)}{(1 + 25\omega^2)(1 + 4\omega^2)}}_{G^{\text{Re}}} + j \underbrace{\frac{k10\omega(1 - 80\omega^2)}{(1 + 25\omega^2)(1 + 4\omega^2)}}_{G^{\text{Im}}}.$$

Per trovare le intersezioni con l'asse delle ordinate troviamo i valori della pulsazione che annullano $G^{\text{Re}}(\omega_i)$, cioè

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{17}{100}}, \quad \omega_3 = -\sqrt{\frac{17}{100}}.$$

Sostituendo questi valori nella parte immaginaria otteniamo

$$G^{\text{Im}}(\omega_1) = 0, \quad G^{\text{Im}}(\omega_2) \simeq -k5.83, \quad G^{\text{Im}}(\omega_3) \simeq k5.83$$

che devono essere simmetrici rispetto l'asse delle ascisse. Ripetendo lo stesso ragionamento per le ascisse, i valori di ω che annullano la parte immaginaria ($G^{\text{Im}}(\bar{\omega}_i) = 0$) sono

$$\bar{\omega}_1 = 0, \quad \bar{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{80}}, \quad \bar{\omega}_3 = -\frac{1}{\sqrt{80}}$$

da cui si hanno

$$G^{\text{Re}}(\bar{\omega}_1) = 0, \quad G^{\text{Re}}(\bar{\omega}_2) \simeq k1.42, \quad G^{\text{Re}}(\bar{\omega}_3) \simeq k1.42.$$

In figura 2.3 sono riportati i diagrammi di Nyquist per $k = 1$ e $k = 1/10$.

Nessuno dei valori $G^{\text{Re}}(\cdot)$ spiega l'intersezione con l'asse delle ordinate in -10 per $k = 1$ e in -1 per $k = 1/10$. Da dove viene fuori questa intersezione? La parte immaginaria è un infinitesimo per ω che tende all'infinito: risulta quindi che

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} G^{\text{Im}}(\omega) = 0^\mp, \quad \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} G^{\text{Re}}(\omega) = -k10$$

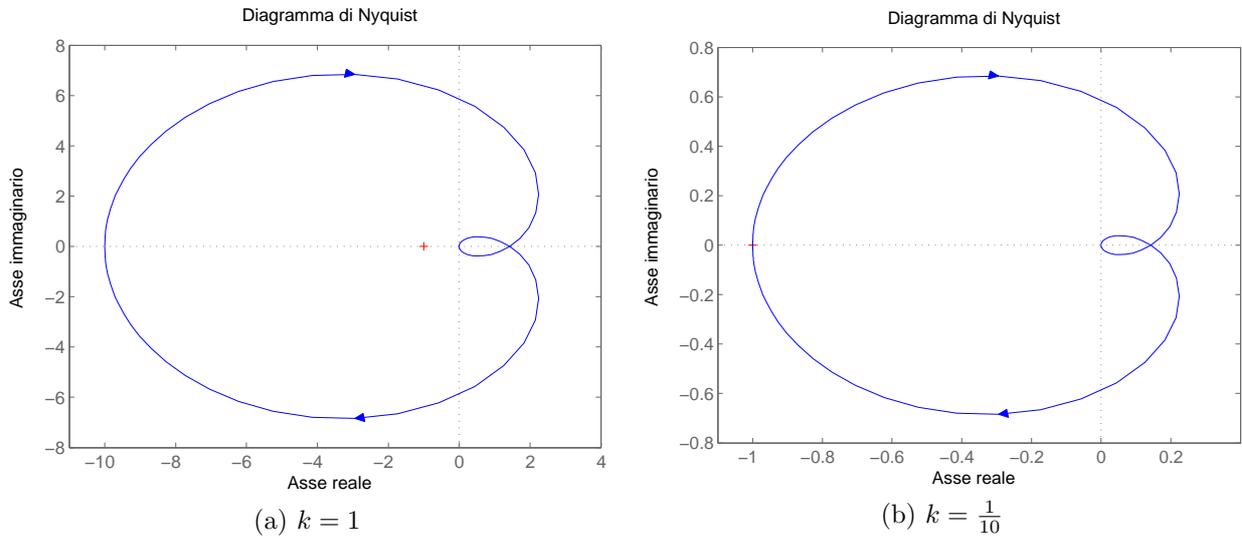


Figure 2.3. *Intersezioni del diagramma di Nyquist con gli assi cartesiani.*

che spiega l'intersezione mancante.

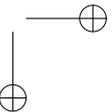
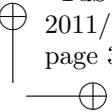
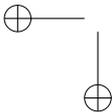
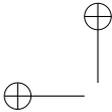
Vale la pena osservare che nel piano complesso è stato messo in evidenza il punto $-1+j0$, detto punto critico. Vedremo nel seguito che il numero di rotazioni del diagramma di Nyquist attorno a questo punto è uno dei parametri che entreranno nel teorema di Nyquist sulla stabilità in anello chiuso del sistema. ■

2.2.5 Numero di rotazioni attorno l'origine

Sfruttando la proprietà di simmetria lungo l'asse reale è facile disegnare la parte del diagramma di Nyquist complementare, quella cioè che mostra come il numero complesso $G(j\omega)$ varia al variare di ω tra 0^- e $-\infty$. Quando però ci sono degli asintoti, cioè il diagramma di Nyquist passa per il punto improprio, non è così diretto sapere come il diagramma si “chiude” all'infinito. Fortunatamente è possibile risolvere questo problema studiando il numero di rotazioni attorno all'origine.

Ricordandoci il contributo di fase di poli e zeri riportato nelle Figure 1.1–1.7 relative ai diagrammi di Bode elementari, si può determinare la variazione di fase per ω tra 0^+ e $+\infty$ (ATTENZIONE A COSA SUCCEDDE NELLO O E ALL'INFINITO). Separando poli e zeri in RHP ($n^{\mathbb{R}^+}$ e $m^{\mathbb{R}^+}$), in LHP ($n^{\mathbb{R}^-}$ e $m^{\mathbb{R}^-}$) e sull'asse immaginario ($n^{j\mathbb{R}}$ e $m^{j\mathbb{R}}$)

$$G(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m^{\mathbb{R}^+}} (s - z_i^{\mathbb{R}^+}) \prod_{i=1}^{m^{j\mathbb{R}}} (s - z_i^{j\mathbb{R}}) \prod_{i=1}^{m^{\mathbb{R}^-}} (s - z_i^{\mathbb{R}^-})}{a_n \prod_{i=1}^{n^{\mathbb{R}^+}} (s - p_i^{\mathbb{R}^+}) \prod_{i=1}^{n^{j\mathbb{R}}} (s - p_i^{j\mathbb{R}}) \prod_{i=1}^{n^{\mathbb{R}^-}} (s - p_i^{\mathbb{R}^-})}$$



con $n = n^{\mathbb{R}^+} + n^{j\mathbb{R}} + n^{\mathbb{R}^-}$ e $m = m^{\mathbb{R}^+} + m^{j\mathbb{R}} + m^{\mathbb{R}^-}$, si arriva a scrivere:

$$\Delta\angle G(j\omega) = (m - n)\frac{\pi}{2} - (m^{j\mathbb{R}} - n^{j\mathbb{R}})\frac{\pi}{2} - (m^{\mathbb{R}^+} - n^{\mathbb{R}^+})\pi. \quad (2.7)$$

Da notare che non si tiene conto del segno della costante $\frac{b_m}{a_n}$ perché si sta studiando la *variazione* di fase e non il suo valore.

Come detto in precedenza il valore in (2.7) si riferisce a metà diagramma di Nyquist, cioè solo alla parte che si delle pulsazioni positive.

LEMMA ARCO DI CERCHIO PICCOLO E GRANDE

Example 2.12 Le figure 2.4 e 2.5 riportano alcuni diagrammi di Nyquist con i relativi variazioni di fase. Non essendoci poli sull'asse immaginario tutti i diagrammi sono al finito (esiste un contorno limitato che li contiene) ed è facile anche derivare il numero di giri del diagramma attorno al punto improprio. Questo intero sarà molto importante nel seguito. ■

Nel capitolo precedente abbiamo visto come curve chiuse vengono trasformate in curve chiuse mentre segmenti sull'asse immaginario erano curve aperte. Domanda: come mai quando si calcola il diagramma di Nyquist per $\omega \in [-\infty, +\infty]$ le curve che abbiamo ottenuto sono chiuse?

2.3 Margini di Stabilità sul Diagramma di Nyquist

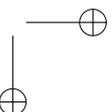
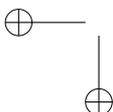
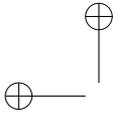
2.4 Criterio di Nyquist

Il criterio di Nyquist è un potente strumento che permette di conoscere il comportamento di un sistema in anello chiuso a partire dal diagramma di Nyquist della sua risposta armonica. Nonostante si basi su uno strumento essenzialmente grafico, permette comunque di fornire oltre ad informazioni qualitative (il sistema in anello chiuso è stabile oppure no) anche alcune informazioni qualitative su quanto è vicino il sistema all'instabilità.

Come detto in precedenza in diagramma di Nyquist costruito per le pulsazioni positive, può essere completato nella sua parte legata alle pulsazioni negative sapendo che vale la simmetria Hermitiana: $G(-j\omega) = G^*(j\omega)$, cioè il diagramma è speculare rispetto all'asse reale. Nel caso di diagrammi che restano al finito, il diagramma è una curva chiusa, mentre per diagrammi in cui il valore di $G(j\omega)$ tende al punto improprio, si può ancora ottenere una curva chiusa assumendo di "completare" i diagrammi con una semicirconferenza o con una o più circonferenza percorse in senso orario. Il numero di rotazioni si può ricavare dalle osservazioni fatte nella sezione 2.2.5.

Per arrivare alla formulazione e dimostrazione del criterio di Nyquist abbiamo bisogno di alcuni risultati di analisi complessa ([?], [?], [?]).

Per le funzioni olomorfe con un numero finito di punti isolati vale il seguente teorema.



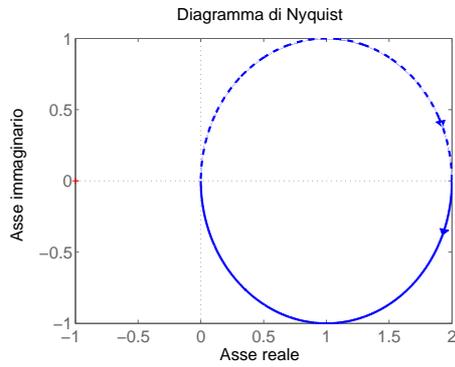
$$F(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$\Delta \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

$$n^{\mathbb{R}^-} = 1 \quad m^{\mathbb{R}^-} = 0$$

$$n^{j\mathbb{R}} = 0 \quad m^{j\mathbb{R}} = 0$$

$$n^{\mathbb{R}^+} = 0 \quad m^{\mathbb{R}^+} = 0$$



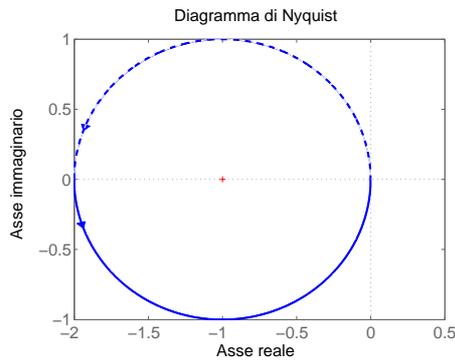
$$F(s) = \frac{2}{s-1}$$

$$\Delta \angle G(j\omega) = \frac{\pi}{2}$$

$$n^{\mathbb{R}^-} = 0 \quad m^{\mathbb{R}^-} = 0$$

$$n^{j\mathbb{R}} = 0 \quad m^{j\mathbb{R}} = 0$$

$$n^{\mathbb{R}^+} = 1 \quad m^{\mathbb{R}^+} = 0$$



$$F(s) = \frac{20}{(s+1)(s+5)}$$

$$\Delta \angle G(j\omega) = \pi$$

$$n^{\mathbb{R}^-} = 2 \quad m^{\mathbb{R}^-} = 0$$

$$n^{j\mathbb{R}} = 0 \quad m^{j\mathbb{R}} = 0$$

$$n^{\mathbb{R}^+} = 0 \quad m^{\mathbb{R}^+} = 0$$

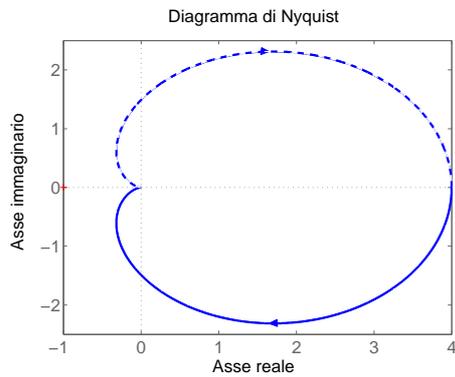


Figure 2.4. Rotazioni attorno l'origine di alcuni diagrammi di Nyquist.

teorema dei residui **Theorem 2.13 (Teorema dei Residui di Cauchy).** Sia f olomorfa in $\Omega \setminus \{s_1, \dots, s_n\}$ con s_i punti singolari isolati e sia γ una curva regolare chiusa e semplice (i.e. un contorno) che li contiene. Vale l'uguaglianza

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} f(s) ds = \sum_{k=1}^n R_k.$$

dove R_i sono i residui di f nei punti s_i .

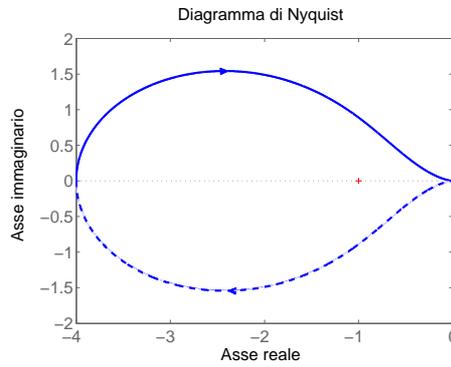
$$F(s) = \frac{20}{(s+1)(s-5)}$$

$$\Delta\angle G(j\omega) = 0$$

$$n^{\mathbb{R}^-} = 1 \quad m^{\mathbb{R}^-} = 0$$

$$n^{j\mathbb{R}} = 0 \quad m^{j\mathbb{R}} = 0$$

$$n^{\mathbb{R}^+} = 1 \quad m^{\mathbb{R}^+} = 0$$



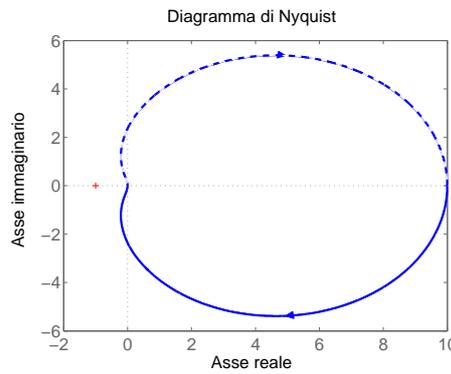
$$F(s) = \frac{5(s+10)}{(s+1)(s+5)}$$

$$\Delta\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

$$n^{\mathbb{R}^-} = 2 \quad m^{\mathbb{R}^-} = 1$$

$$n^{j\mathbb{R}} = 0 \quad m^{j\mathbb{R}} = 0$$

$$n^{\mathbb{R}^+} = 0 \quad m^{\mathbb{R}^+} = 0$$



$$F(s) = \frac{5(s-10)}{(s+1)(s-5)}$$

$$\Delta\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

$$n^{\mathbb{R}^-} = 1 \quad m^{\mathbb{R}^-} = 0$$

$$n^{j\mathbb{R}} = 0 \quad m^{j\mathbb{R}} = 0$$

$$n^{\mathbb{R}^+} = 1 \quad m^{\mathbb{R}^+} = 1$$

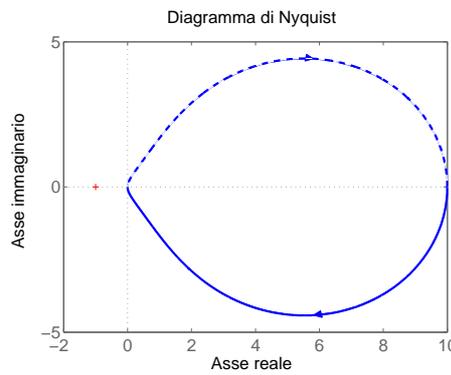


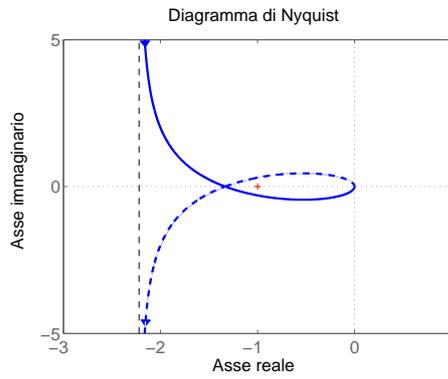
Figure 2.5. Rotazioni attorno l'origine di alcuni diagrammi di Nyquist (segue).

Example 2.14 esempio poli semplici ■

$$F(s) = \frac{20(s+10)}{s(s-15)}$$

$$\Delta\angle G(j\omega) =$$

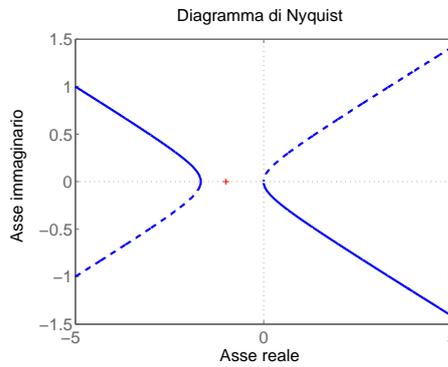
$$\begin{matrix} n^{\mathbb{R}^-} = 0 & m^{\mathbb{R}^-} = 1 \\ n^{j\mathbb{R}} = 1 & m^{j\mathbb{R}} = 0 \\ n^{\mathbb{R}^+} = 1 & m^{\mathbb{R}^+} = 0 \end{matrix}$$



$$F(s) = \frac{s-10}{s^2+6}$$

$$\Delta\angle G(j\omega) =$$

$$\begin{matrix} n^{\mathbb{R}^-} = 0 & m^{\mathbb{R}^-} = 0 \\ n^{j\mathbb{R}} = 2 & m^{j\mathbb{R}} = 0 \\ n^{\mathbb{R}^+} = 0 & m^{\mathbb{R}^+} = 1 \end{matrix}$$



$$F(s) = \frac{10s^2}{(s+20)(s+5)}$$

$$\Delta\angle G(j\omega) =$$

$$\begin{matrix} n^{\mathbb{R}^-} = 2 & m^{\mathbb{R}^-} = 0 \\ n^{j\mathbb{R}} = 0 & m^{j\mathbb{R}} = 2 \\ n^{\mathbb{R}^+} = 0 & m^{\mathbb{R}^+} = 0 \end{matrix}$$

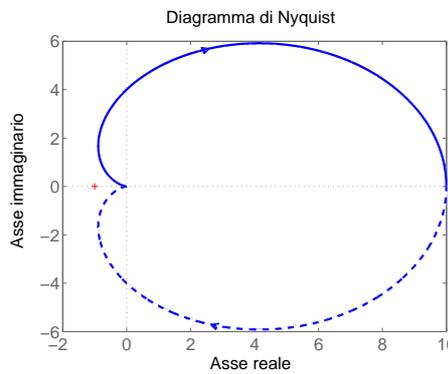
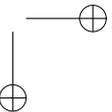
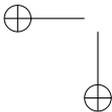


Figure 2.6. Rotazioni attorno l'origine di alcuni diagrammi di Nyquist (segue).

Lemma 2.15 (Lemma dell'arco di cerchio grande). *Data una regione angolare A limitata da due semirette uscenti dall'origine con coefficiente angolare α_1 e α_2 come in figura 2.7.a). Sia $f(s)$ una funzione olomorfa in A eccetto al più in un numero finito di punti singolari isolati tale che per $s \in A$*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) = 0,$$



uniformemente in A . Allora vale

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(s) ds = 0$$

dove C_R è l'arco di circonferenza di raggio R contenuto in A .

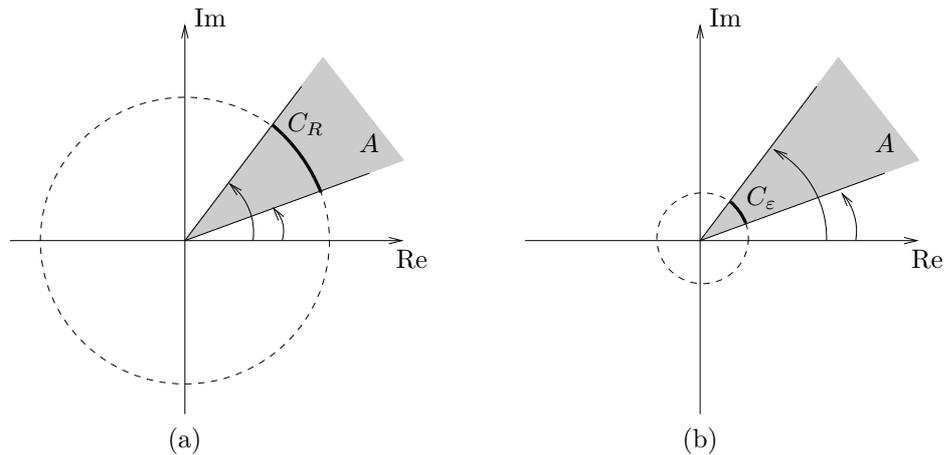


Figure 2.7. Regioni angolari per il lemma dell'arco di cerchio grande (a), e piccolo (b).

Lemma 2.16 (Lemma dell'arco di cerchio piccolo). Data una regione angolare A limitata da due semirette uscenti dall'origine con coefficiente angolare α_1 e α_2 come in figura 2.7.b). Sia $f(s)$ una funzione olomorfa in A eccetto al più un punto singolare isolato nell'origine tale che per $s \in A$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sf(s) = 0,$$

uniformemente per A . Allora vale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} f(s) ds = 0$$

dove C_ϵ è l'arco di circonferenza di raggio ϵ contenuto in A .

Definition 2.17 (Derivata logaritmica). Data una funzione f olomorfa in Σ a meno di un numero finito di punti. La funzione

$$\varphi(s) = \frac{f'(s)}{f(s)}$$

si chiama derivata logaritmica di f . I residui di $\varphi(s)$ nei suoi punti singolari si chiamano residui logaritmici di f .

Il nome di derivata logaritmica deriva dal fatto che si può scrivere

$$\ln f(s) = \frac{f'(s)}{f(s)} = \ln |f(s)| + j\angle f(s)$$

e i suoi punti singolari sono gli zeri e poli di f . (determinazione principale)

Example 2.18 esempio derivata logaritmica ■

Theorem 2.19 (Teorema dell'indicatore logaritmico). *Sia f una funzione olomorfa in Ω a meno di un numero finito di singolarità isolate (poli di f) e sia γ un contorno contenuto in Ω su cui la f non abbia zeri e poli. Siano m e n il numero di zeri e poli di f interni a γ , ognuno, contato con la sua molteplicità. Allora vale la relazione:*

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{f'(s)}{f(s)} ds = m - n.$$

Example 2.20 esempio indicatore logaritmico ■

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per enunciare e dimostrare il teorema di Nyquist che fornisce indicazioni su come si comporterà il sistema in anello chiuso del tipo in figura 2.8 analizzando il diagramma di Nyquist di $L(s)$. In questa sezione faremo useremo la lettera $L(s)$ invece di $G(s)$ per mettere in luce come questo procedimento può essere utilizzato durante la progettazione del controllore $C(s)$ per l'impianto $P(s)$.

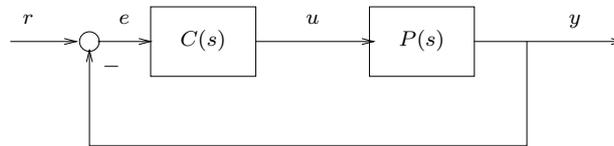


Figure 2.8. Schema a blocchi di un sistema in retroazione.

Criterion of **Theorem 2.21 (Criterio di Nyquist).** *Un sistema in retroazione unitaria con* **Nyquist** *funzione d'anello $L(s)$ è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ con ω da $-\infty$ a $+\infty$, compie attorno al punto critico $-1 + j0$ tanti giri in senso antiorario quanti sono i poli di $L(s)$ nel semipiano destro e tanti mezzi giri in senso antiorario quanti sono i poli di $L(s)$ sull'asse immaginario.*

Ogni giro in meno in senso antiorario o in più in senso orario corrispondono a un polo di $W(s)$ in $\text{Re}\{s\} > 0$. Detti

- P il numero di poli di $L(s)$ in $\text{Re}\{s\} > 0$

- N numero di giri del diagramma di Nyquist di $L(s)$ attorno al punto critico $-1 + j0$ (contati positivamente se in senso orario e negativamente in senso antiorario)

segue che il numero di poli Z di $W(s)$ nel semipiano destro (che coincidono con il numero di zero di $1 + L(s)$ nel semipiano destro) vale

$$Z = N + P. \tag{2.8}$$

Se il diagramma di Nyquist passa esattamente per il punto critico allora la funzione di trasferimento in anello chiuso ha poli sull'asse immaginario.

Proposition 2.22 (Criterio ridotto di Nyquist). *Se $L(s)$ non ha poli in $\text{Re}\{s\} > 0$ allora condizione necessaria e sufficiente per la stabilità in catena chiusa è che il diagramma polare di $L(s)$ giri attorno a $-1 + j0$ un numero nullo di volte.*

Dalla proposizione precedente discendono le seguenti condizioni sufficienti che esplicitano lo stretto legame tra il diagramma di Nyquist e i diagrammi di Bode.

Corollary 2.23 (Condizione sufficiente 1). *Condizione sufficiente perché il sistema retroazionato con funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ asintoticamente stabile, sia asintoticamente stabile è che il modulo di $L(s)$ sia strettamente minore di uno per ogni valore della pulsazione, i.e. $|L(j\omega)| < 1, \forall \omega$.*

Corollary 2.24 (Condizione sufficiente 2). *Condizione sufficiente perché il sistema retroazionato con funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ asintoticamente stabile, sia asintoticamente stabile è che il modulo della fase sia minore di 180° per ogni valore della pulsazione, i.e. $|\arg L(j\omega)| < \pi, \forall \omega$.*

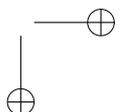
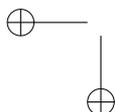
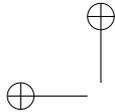
Example 2.25 Cominciamo ad applicare il criterio Nyquist ad alcune funzioni di trasferimento senza poli sull'asse immaginario. In questo caso il contorno di Nyquist è quello riportato in Figura 2.9 che comprende l'asse immaginario e un semicerchio di raggio infinito contenuto nel semipiano destro. In questo modo il contorno contiene tutti e soli gli eventuali poli instabili.

Sia

$$F(s) = \frac{100}{s^3 + 5s^2 - 2s - 24} \left(= \frac{100}{(s + 3)(s + 4)(s - 2)} \right)$$

la funzione di trasferimento in anello aperto di cui vogliamo determinare la stabilità in anello chiuso attraverso il criterio di Nyquist. Prima di disegnare il diagramma di Nyquist cerchiamo di capire se e quanti sono i poli nel semipiano destro. Dalla tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -24 \\ 1 & 14/5 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \end{array}$$



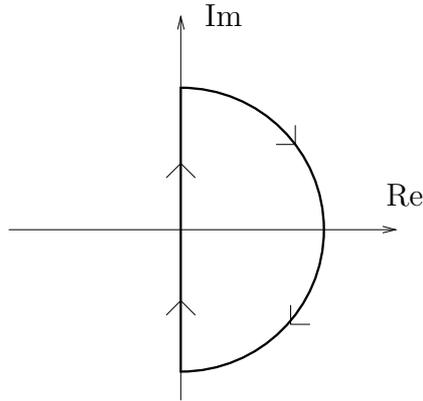


Figure 2.9. Contorno di Nyquist per funzioni di trasferimento senza poli sull'asse immaginario.

abbiamo solo un cambio di segno e quindi il numero di poli instabili è uguale a uno, $P = 1$. Procediamo adesso al tracciamento del diagramma. La funzione di risposta armonica vale

$$\begin{aligned}
 F(j\omega) &= \frac{100}{(j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 - 2(j\omega) - 24} \\
 &= \frac{100}{-j\omega^3 - 5\omega^2 - 2j\omega - 24} \\
 &= \frac{100}{(-5\omega^2 - 24) + j(-\omega^3 - 2\omega)} \\
 &= \frac{100((-5\omega^2 - 24) - j(-\omega^3 - 2\omega))}{(-5\omega^2 - 24)^2 + (-\omega^3 - 2\omega)^2} \\
 &= \frac{100((-5\omega^2 - 24) - j(-\omega^3 - 2\omega))}{\omega^6 + 29\omega^4 + 244\omega^2 + 576} \\
 &= \underbrace{\frac{-500\omega^2 - 2400}{\omega^6 + 29\omega^4 + 244\omega^2 + 576}}_{F^{\text{Re}}(\omega)} + j \underbrace{\frac{100\omega^3 + 200\omega}{\omega^6 + 29\omega^4 + 244\omega^2 + 576}}_{F^{\text{Im}}(\omega)}
 \end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare

- comportamento per $\omega \rightarrow 0$ (non serve scrivere $\omega \rightarrow 0^+$ perché non ci sono infinitesimi)

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(j\omega) = \frac{-2400}{276} \simeq -4.17. \tag{2.9}$$

Per capire la direzione con cui arriva il diagramma nel punto $(-\frac{2400}{276}, 0)$, trascuriamo nella $F(j\omega)$ le potenze di ω superiori a 1: siamo infatti interessati al comportamento nell'intorno dell'origine. Dalla

$$F(j\omega) \simeq \frac{100}{-2j\omega - 24}$$

calcoliamo la variazione attorno al punto considerato

$$\Delta F(j\omega) = F(j\omega) - F(j0) = \frac{2400 \cdot 4\omega^2 + j\omega 276 \cdot 200}{\star}$$

dove \star è un numero positivo. Detto $\alpha + j\beta$ un generico numero complesso, sappiamo che

$$\phi = \angle \alpha + j\beta = \begin{cases} \arctan \frac{\beta}{\alpha}, & \text{se } \alpha > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } \alpha = 0 \text{ e } \beta > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } \alpha = 0 \text{ e } \beta < 0 \\ \arctan \frac{\beta}{\alpha} \pm \pi, & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Possiamo quindi dedurre che per $\omega \rightarrow 0^+$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle \Delta F(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arctan \frac{\omega 276 \cdot 200}{2400 \cdot 4\omega^2} = \frac{\pi}{2}. \quad (2.10)$$

- comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} F(j\omega) = 0^- + j0^+$$

in quanto il denominatore ha grado superiore del numeratore sia di $F^{\text{Re}}(\omega)$ che di $F^{\text{Im}}(\omega)$. Dai segni si capisce che il diagramma tende all'origine dal secondo quadrante. Anche in questo caso per capire l'angolo, dobbiamo determinare la fase di $\Delta F(j\omega)$ quando $\omega \rightarrow +\infty$. Essendo nel nostro caso l'origine il punto limite, abbiamo $\Delta F(j\omega) = F(j\omega)$ da cui segue che

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle \Delta F(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arctan \frac{100\omega^3 + 200\omega}{-500\omega^2 - 2400} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arctan \frac{1}{-5/\omega} = \frac{\pi}{2}.$$

- intersezioni con l'asse reale: per pulsazioni finite, $0 \leq \omega < +\infty$, il numeratore della parte immaginaria $100(\omega^3 + 2\omega)$ si annulla solo per la pulsazione nulla. Ritroviamo quindi l'intersezione con l'asse reale (2.9).
- intersezioni con l'asse immaginario: per $0 \leq \omega < +\infty$ la parte reale non si annulla mai. Non ci sono quindi intersezioni con l'asse delle ordinate tranne per l'origine che viene raggiunta solo all'infinito.

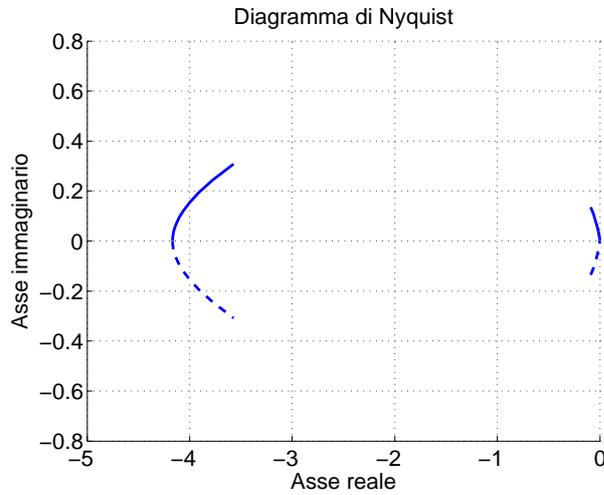


Figure 2.10. *Esempio 2.25: Frammenti di diagramma di Nyquist.*

Dalle considerazioni precedenti arriviamo a disegnare quanto riportato in Figura 2.10. Manca ancora l'informazione su come raccordare i due tratti noti. Per far questo bisogna avere informazioni su come si comporta il modulo e l'ampiezza. Solitamente queste informazioni vengono dedotte dal diagramma di Bode che però richiede la conoscenza analitica dell'allocatione di poli e zeri della funzione di trasferimento o, alternativamente, si può ricavare dal misure sperimentale.

La funzione di trasferimento di partenza si può riscrivere come

$$F(s) = \frac{100}{(s + 3)(s + 4)(s - 2)}$$

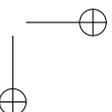
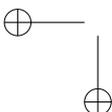
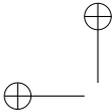
i cui diagrammi del modulo e della fase si possono ricavare facilmente come spiegato nel capitolo precedente (Figura 2.11). Essendo i poli molto vicini in frequenza, il modulo è essenzialmente quello di una funzione di trasferimento del terzo ordine con poli concidenti e senza zeri. Il modulo decresce quindi all'aumentare di ω . Per quanto riguarda la fase, il comportamento è simile a quello di un sistema del primo ordine con un offset di π dovuto al segno negativo di uno dei poli. Risulta quindi che la fase passa da π a $\pi/2$.

Possiamo adesso contare il numero di rotazioni attorno al punto critico: abbiamo $N = +1$ in quanto la rotazione avviene in senso orario. Possiamo concludere che il numero di poli instabili della funzione di trasferimento in anello chiuso sono pari a:

$$Z = N + P = 1 + 1 = 2.$$

Vi sono cioè due poli complessi coniugati instabili. Ci chiedemo adesso se per ogni $K > 0$ la funzione

$$F_K(s) = \frac{K100}{(s + 3)(s + 4)(s - 2)}$$



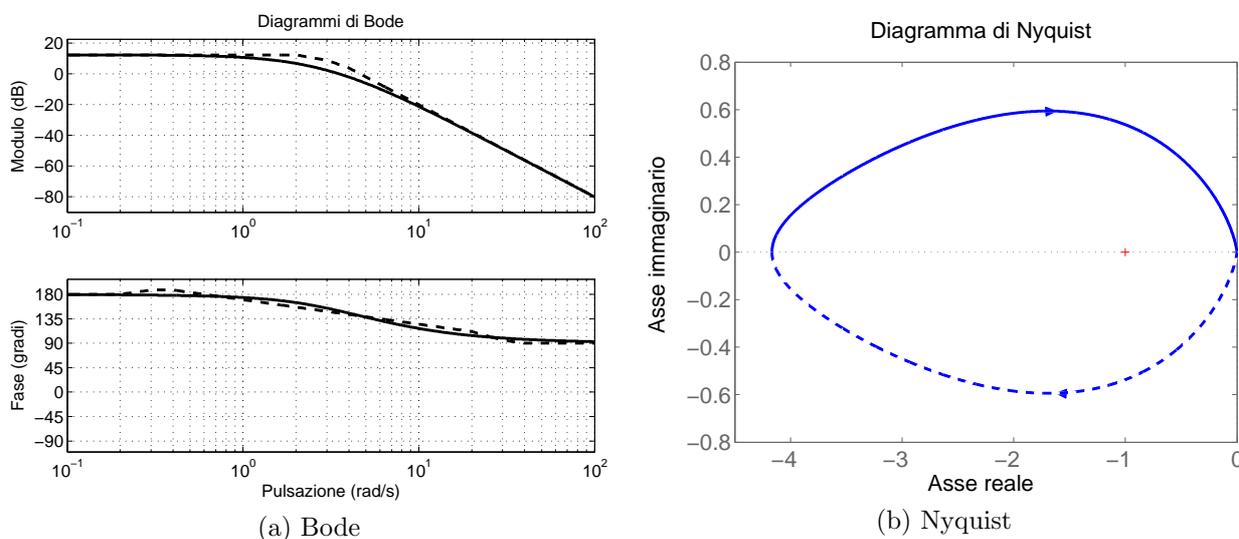


Figure 2.11. Esempio 2.25: (a) Diagramma di Bode; (b) Diagramma di Nyquist.

ha il medesimo comportamento. Al variare di K la posizione dell'intersezione con l'asse delle ascisse per $\omega \rightarrow 0$ cambia

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F_K(j\omega) = \frac{-2400K}{276}. \quad (2.11)$$

Si può quindi spostare al più l'intersezione alla destra del punto critico (per $K < \frac{276}{2400}$) garantendo $N = 0$. Anche in questo caso il sistema in anello chiuso rimane instabile con un polo reale nel semipiano destro ($Z = 1$). ■

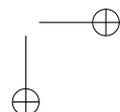
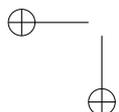
Example 2.26 Ci si può chiedere se l'andamento del diagramma di Nyquist nell'esempio precedente è caratteristico di ogni funzione di trasferimento del tipo:

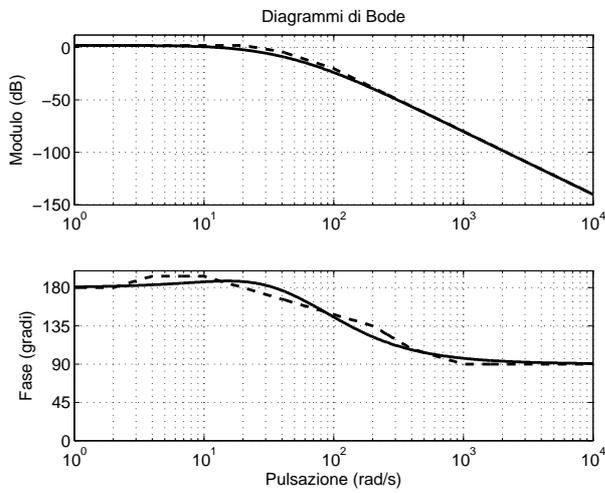
$$F(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)(s - p_3)}.$$

La risposta è negativa in quanto la forma del diagramma dipende dal valore dei poli e dal loro ordine (i.e. chi appare prima in frequenza). L'unica cosa che rimane costante è che il modulo decresce uniformemente all'aumentare della pulsazione. Le Figura 2.12 riporta i diagrammi di Bode e di Nyquist per le funzioni:

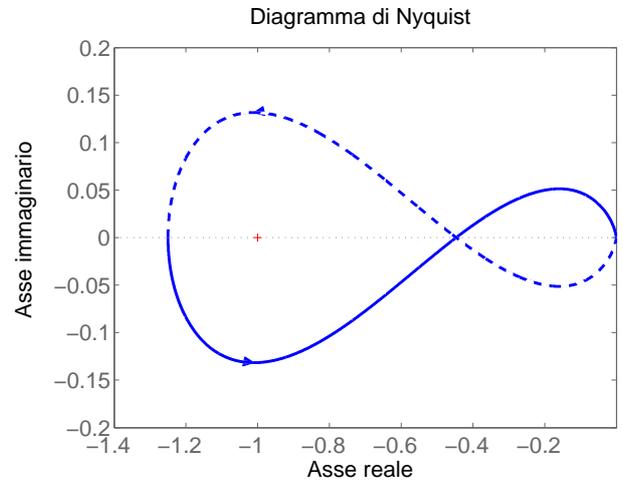
$$F_1(s) = \frac{100000}{(s + 100)(s + 40)(s - 20)}$$

$$F_2(s) = \frac{1000}{(s + 10)(s + 4)(s - 2)}.$$

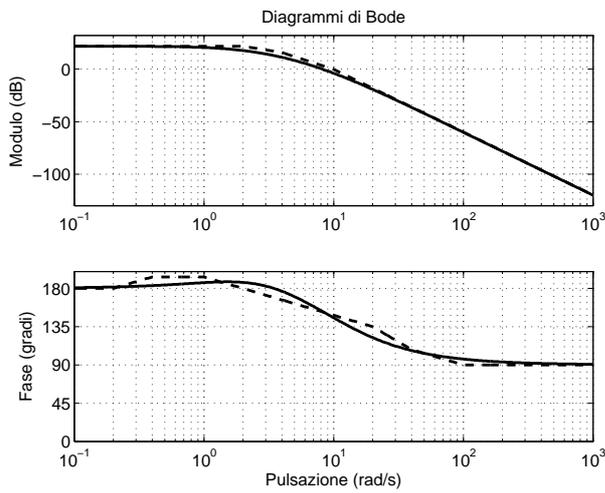




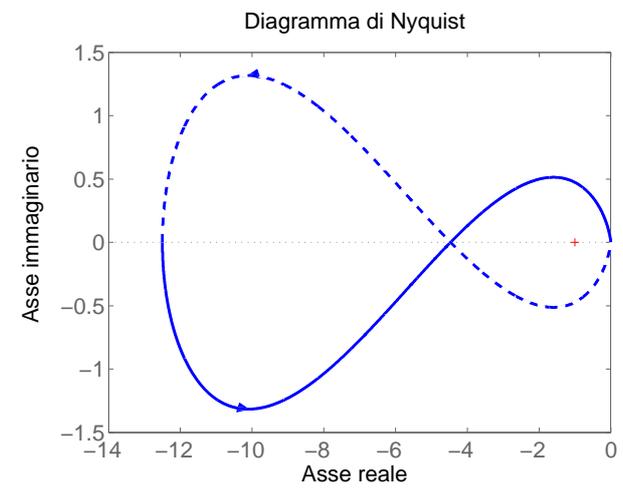
(a) Bode



(b) Nyquist



(c) Bode



(d) Nyquist

Figure 2.12. Esempio 2.26. $F_1(s)$: (a) Diagramma di Bode, (b) Diagramma di Nyquist; $F_2(s)$: (c) Diagramma di Bode; (d) Diagramma di Nyquist

In entrambi i casi $P = 1$ mentre il numero di giri attorno al punto critico vale $N = -1$ per F_1 e $N = +1$ per F_2 . Per il criterio di Nyquist possiamo concludere che la prima funzione di trasferimento sarà stabile in anello chiuso ($Z = N + P = -1 + 1 = 0$) mentre la seconda funzione avrà $Z = N + P = 1 + 1 = 2$ poli instabili in anello chiuso. ■

Example 2.27 Vogliamo ora studiare la stabilità in anello chiuso della seguente funzione d'anello

$$F(s) = \frac{K10(s + 10)}{s^2(s + 100)}.$$

avente due poli nell'origine. Il contorno di Nyquist da utilizzare è riportato nella figura 2.13 in cui l'origine viene evitata con una semicirconferenze di raggio ε percorsa in senso antiorario.

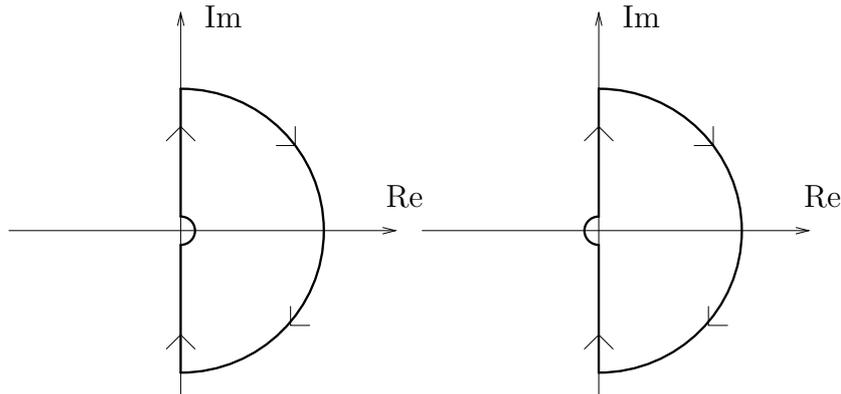


Figure 2.13. Contorno di Nyquist per funzioni di trasferimento con poli nell'origine. Sinistra: il contorno non contiene i poli nell'origine. Destra: il contorno contiene i poli nell'origine

La funzione di traferimento non presenta poli nel semipiano destro $P = 0$ e ha la seguente funzione di risposta armonica

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{K10(j\omega + 10)}{(j\omega)^2(j\omega + 100)} \\ &= \frac{-K10(j\omega + 10)}{\omega^2(j\omega + 100)} \\ &= \frac{-K10(j\omega + 10)(-j\omega + 100)}{\omega^2(\omega^2 + 10000)} \\ &= \underbrace{\frac{-K10(\omega^2 + 1000)}{\omega^2(\omega^2 + 10000)}}_{F^{\text{Re}}(\omega)} + j \underbrace{\frac{-K900\omega}{\omega^2(\omega^2 + 10000)}}_{F^{\text{Im}}(\omega)} \end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare

- comportamento per $\omega \rightarrow 0^+$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} F^{\text{Re}}(j\omega) = -\infty \tag{2.12}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} F^{\text{Im}}(j\omega) = -\infty. \tag{2.13}$$

Il diagramma appartiene al terzo quadrante e possiamo anche dire che la parte reale è un infinito di ordine due, mentre la parte immaginaria di ordine uno

$$F^{\text{Re}}(j\omega) \simeq -\frac{K}{\omega^2}, \quad F^{\text{Im}}(j\omega) \simeq -\frac{K9/100}{\omega}$$

per $\omega \rightarrow 0^+$. Per la fase possiamo scrivere

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle F(j\omega) = -\pi$$

mentre il diagramma tende ad una parabola di coefficiente $x = cy^2$ con

$$y := F^{\text{Re}}(j\omega), \quad x := F^{\text{Im}}(j\omega),$$

e

$$c := \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{F^{\text{Re}}(j\omega)}{(F^{\text{Im}}(j\omega))^2} = -\frac{10000}{81K}.$$

- comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} F(j\omega) = 0^- + j0^-$$

in quanto il denominatore ha grado superiore del numeratore sia di $F^{\text{Re}}(\omega)$ che di $F^{\text{Im}}(\omega)$. Dai segni si capisce che il diagramma tende all'origine dal terzo quadrante. Per calcolare l'angolo di arrivo, dobbiamo determinare la fase di $F(j\omega)$ per $\omega \rightarrow +\infty$

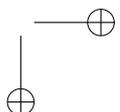
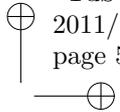
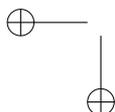
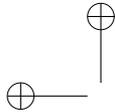
$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle F(j\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arctan \frac{F^{\text{Im}}(j\omega)}{F^{\text{Re}}(j\omega)} \pm \pi \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arctan \frac{-K900\omega}{-K10(\omega^2 + 1000)} \pm \pi \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arctan \frac{90/\omega}{1} \pm \pi = -\pi. \end{aligned}$$

- intersezione con l'asse reale e immaginario: l'unica intersezione si ha per $\omega \rightarrow +\infty$ quando il diagramma raggiunge l'origine del sistema di riferimento.

Per aiutarci con il tracciamento del diagramma, disegniamo anche il diagramma di Bode, riportato in Figura 2.14. L'ampiezza decresce uniformemente mentre la fase parte da $-\pi$, aumenta (diventa meno negativa) per poi ritornare a $-\pi$ a riprova di quello che abbiamo determinato poco sopra. Il diagramma di Nyquist riportato in Figura 2.15.a) sembra non rispecchiare l'andamento della fase; basta però fare ingradire la parte vicina alla zero (Figura 2.15.b)) per ritrovare quello che l'analisi ci aveva suggerito.

Resta da determinare il numero di rotazioni attorno al punto critico. Per capire come si chiude il diagramma di Nyquist, studiamo come l'arco di cerchio infinitesimo attorno all'origine

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{j\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



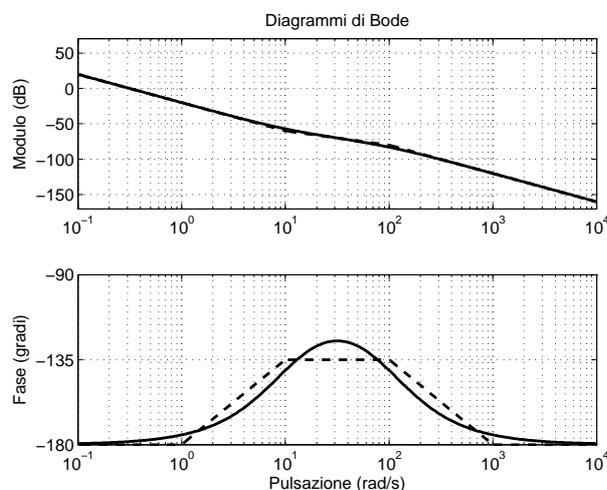
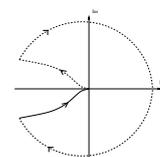


Figure 2.14. Esempio 2.27: Diagramma di Bode

viene mappato dalla funzione di trasferimento:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\varepsilon e^{j\theta}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K10(\varepsilon e^{j\theta} + 10)}{(\varepsilon e^{j\theta})^2(\varepsilon e^{j\theta} + 100)} \simeq \frac{K100}{\varepsilon^2 e^{j2\theta} 100} = \frac{K}{\varepsilon^2} e^{-j2\theta}.$$

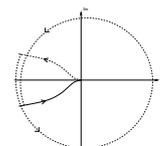
Segue quindi che per $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ la $F(\varepsilon e^{j\theta})$ compierà una rotazione completa in senso orario partendo da $-\pi$, crescendo fino a 0, per ritornare a $-\pi$ che coincide ovviamente con $+\pi$. Il diagramma si completa all'infinito come abbozzato a lato. Si hanno quindi zero rotazioni in senso antiorario.



Il numero di poli instabili in anello chiuso risulta

$$Z = N + P = 0 + 0 = 0.$$

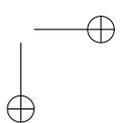
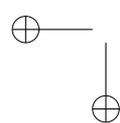
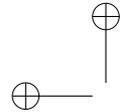
Interessante notare come se si avesse considerato il contorno di Nyquist contenente i poli nell'origine, il diagramma di sarebbe chiuso come riportato a lato con due rotazioni orario, $N = -2$, e due poli intabili. Quindi si sarebbe ottenuto per altra via



$$Z = N + P = -2 + 2 = 0$$

cioè la stabilità del sistema in anello chiuso ■

Example 2.28 esempio cancellazioni nel prodotto GH . (cfr andamento modi non osservabili/raggiungibili) ■



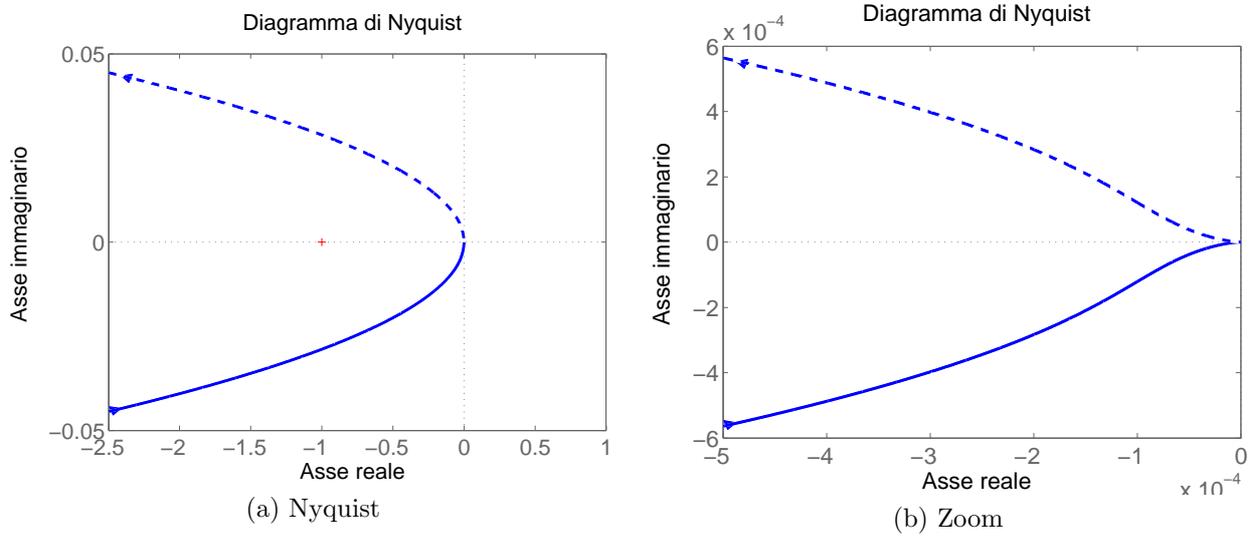
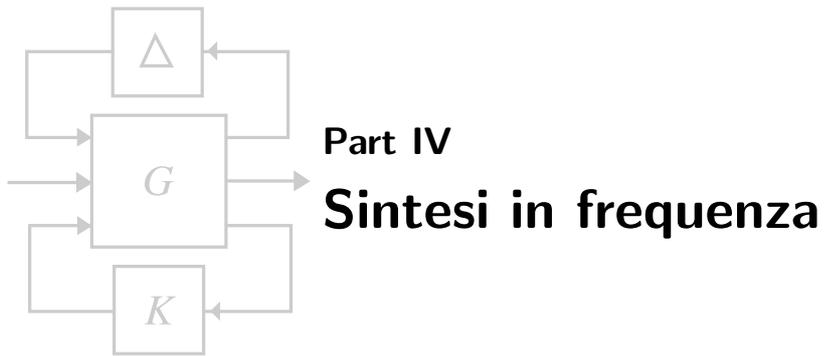
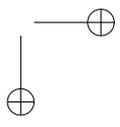
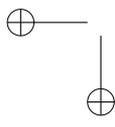
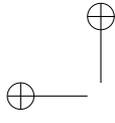


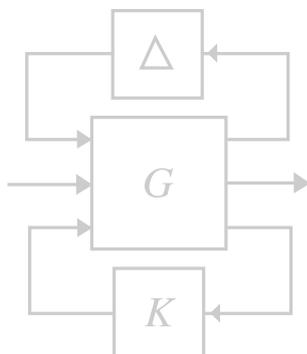
Figure 2.15. Esempio 2.27: Diagramma di Nyquist.

Exercises

- 2.1. Disegnare i diagrammi di Bode di BLA BLA
- 2.2.



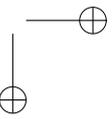
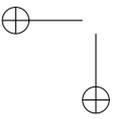
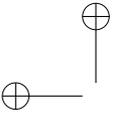


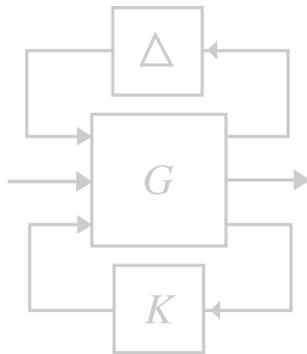


Chapter 3

Requisiti e Specifiche

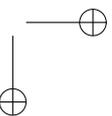
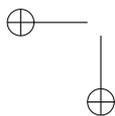
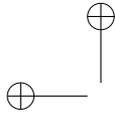
We have nothing to fear but fear itself.
—Franklin D. Roosevelt

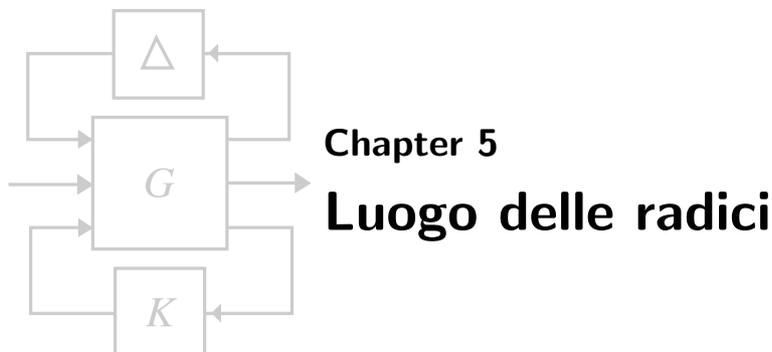




Chapter 4 La retroazione

We have nothing to fear but fear itself.
—Franklin D. Roosevelt





Chapter 5

Luogo delle radici

Experience is what you get when you don't get what you want.

—Dan Stanford

5.1 Introduzione

Nel capitolo precedente si è visto come molte importanti proprietà dei sistemi dipendono dalla posizione delle radici del polinomio a denominatore nel piano complesso.

Il luogo delle radici studia come varia la posizione dei poli del sistema in anello root locus chiuso al variare di un singolo parametro. Dato lo schema a blocchi in Figura 5.1 con sistema e controllore dati da

$$P(s) = K_P \frac{n(s)}{d(s)} \quad (5.1)$$

$$C(s) = K_C \quad (5.2)$$

con $n(s)$ e $d(s)$ polinomi coprimi, monici e a coefficienti reali:

$$n(s) = \prod_{i=1}^m (s - z_i) \quad (5.3)$$

$$d(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i). \quad (5.4)$$

I poli p_i e gli zeri z_i sono reali o, se complessi, compaiono con le rispettive radici complesse coniugate. Inoltre si assume il sistema almeno proprio, i.e. $n \geq m$.

La funzione in anello aperto è data da

$$L(s) = P(s)C(s) = K_E \frac{n(s)}{d(s)} = K_E \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = K_E \bar{L}(s). \quad (5.5)$$

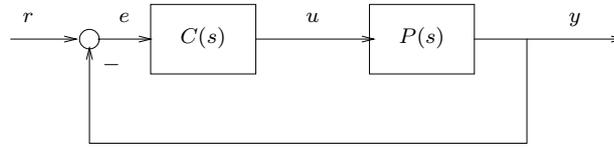


Figure 5.1. Schema a blocchi di un sistema in retroazione.

guadagno di Evans con $K_E = K_P K_C$ detto guadagno di Evans, mentre la funzione in anello chiuso vale:

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{K_E d(s)}{d(s) + K_E n(s)}. \quad (5.6)$$

Il luogo delle radici studia come varia la posizione dei poli di $T(s)$ al variare di K_E , cioè studia le radici di

$$d(s) + K_E n(s) \quad (5.7)$$

o, equivalentemente, di

$$1 + K_E \bar{L}(s), \quad (5.8)$$

$$\bar{L}(s) = -\frac{1}{K_E}, \quad (5.9)$$

Si chiama luogo positivo, il luogo che si ottiene facendo variare K_E tra zero e $+\infty$, negativo se $K_E \leq 0$. Da notare che essendo per ipotesi $n(s)$ e $d(s)$ coprimi, non ci possono essere cancellazioni poli-zeri in $T(s)$. In altre parole $T(s)$ è una rappresentazione irriducibile.

L'impostanza del luogo delle radici è dovuta al fatto che sul piano complesso si possono evidenziare le zone legate ai parametri dinamici che descrivono la risposta del sistema: risposta al gradino, tempo di salita, overshoot, etc. Studiano quindi la posizione dei poli dominanti della funzione di trasferimento in anello chiuso è possibile stimare il comportamento dinamico del sistema. Il luogo delle radici rappresenta quindi un primo metodo di progetto del controllore. Aggiungendo inoltre della dinamica a $C(s) = K_E C'(s)$ e disegnando il luogo per $L' = K_E P(s)C'(s)$ è possibile studiare come cambia il luogo al variare dei poli e degli zeri in $C'(s)$.

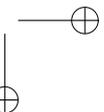
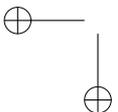
legame tra guadagno di Bode e di Evans

Prima di enunciare le regole per il tracciamento del luogo, è bene avere chiaro il legame tra il guadagno di Evans e il guadagno di Bode. Sia

$$L(s) = K_B \frac{\prod_{i=1}^m (1 + s\bar{\tau}_i)^{\bar{\mu}_i} \prod_{i=1}^m \left(1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_i} s + \frac{1}{\omega_i^2} s^2\right)^{\bar{\nu}_i}}{s^k \prod_{i=1}^n (1 + s\tau_i)^{\mu_i} \prod_{i=1}^n \left(1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_i} s + \frac{1}{\omega_i^2} s^2\right)^{\nu_i}} \quad (5.10)$$

la forma di Bode per la funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ con $k \in \mathbb{Z}$, $|\xi| < 1$ e $\lim_{s \rightarrow 0} s^k G(s) = K_B$. Confrontando la (5.5) con (5.10) si ha che

$$K_B = K_E \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{i=1}^{n-k} (-p_i)}. \quad (5.11)$$



dove i p_i a denominatore sono gli $n-k$ poli non nulli. Risulta quindi che $\text{sign}(K_E) = -\text{sign}(K_B)$ se poli e zeri nel semipiano destro sono in numero dispari.

Osservazione È importante sottolineare che la tecnica del luogo delle radici può essere applicata a qualsiasi parametro rispetto al quale l'equazione caratteristica si può scrivere in forma lineare.

5.2 Regole per il tracciamento del luogo

Esistono delle regole per disegnare qualitativamente il luogo delle radici del polinomio

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0 \tag{5.12}$$

al variare di K (d'ora in poi il pedice E verrà omissso). Verranno presentate una alla volta con un esempio per meglio comprenderle. Diamo prima la definizione formale di luogo delle radici:

Definition 5.1. Il luogo positivo delle radici è dato dall'unione di tutti i punti $\bar{s} \in \mathbb{C}$ tali che l'equazione (5.12) è soddisfatta, ovvero:

$$\begin{aligned} \text{Condizione di modulo} \quad K &= \frac{|d(\bar{s})|}{|n(\bar{s})|} = \frac{\prod_{i=1}^n |\bar{s} - p_i|}{\prod_{i=1}^m |\bar{s} - z_i|}, \\ \text{Condizione di fase} \quad \arg\left(\frac{d(\bar{s})}{n(\bar{s})}\right) &= (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ (\sum_{i=1}^n \arg(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \arg(s - z_i)) &= (2k + 1)\pi \end{aligned}$$

Il luogo negativo delle radici è dato dall'unione di tutti i punti $\bar{s} \in \mathbb{C}$ tali che l'equazione (5.12) è soddisfatta, ovvero:

$$\begin{aligned} \text{Condizione di modulo} \quad K &= -\frac{|d(\bar{s})|}{|n(\bar{s})|} = -\frac{\prod_{i=1}^n |\bar{s} - p_i|}{\prod_{i=1}^m |\bar{s} - z_i|}, \\ \text{Condizione di fase} \quad \arg\left(\frac{d(\bar{s})}{n(\bar{s})}\right) &= 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ (\sum_{i=1}^n \arg(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \arg(s - z_i)) &= 2k\pi \end{aligned}$$

Molte delle proprietà che verranno introdotte nel seguito si dimostrano usando le condizioni di modulo e fase e le proprietà delle radici dei polinomi a coefficienti reali.

Example 5.2 calcolo della fase e poi del modulo ■

Punti di partenza e di arrivo

I punti di partenza del luogo ($K = 0$) sono i poli mentre i punti di arrivo ($K \rightarrow +\infty$) sono gli zeri, compresi quelli nel punto improprio.

Si vede chiaramente dalla (5.12) sostituendo i due valori limite.

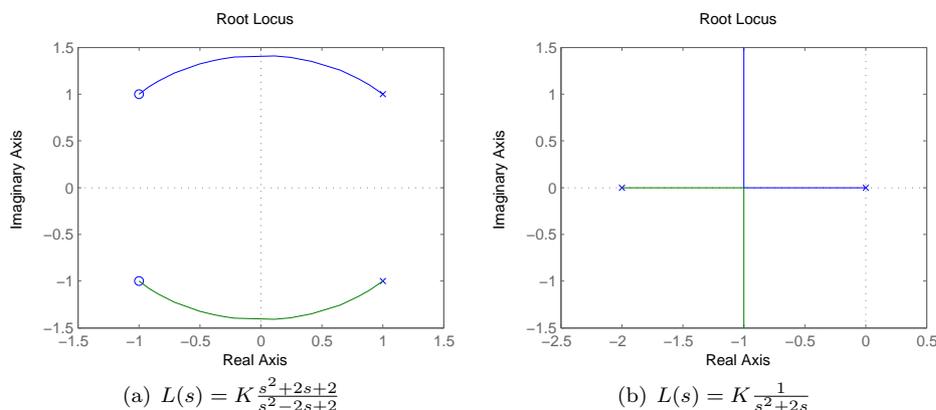


Figure 5.2. Esempi di rami.

Rami

Il luogo è costituito da tanti rami quanti sono i poli contati con la loro molteplicità .

Dalle prime due proprietà segue quindi che i rami sono n e partono dai poli e $n - m$ terminano negli zeri finiti e i rimanenti m tendono al punto improprio (i.e. all'infinito). I rami sono curve continue perché le radici dei polinomi dipendono in maniera continua dai loro coefficienti. Da questa osservazione discende anche il fatto che il luogo non può passare per lo stesso punto in \mathbb{C} più volte: non esistono cioè due valori distinti K_1 e K_2 per cui il luogo ha le stesse radici.

Example 5.3 In Figura 5.2 è possibile vedere due esempi di luogo delle radici dove in un caso i rami partono dai poli e terminano negli zeri al finito (Figura 5.2(a)) mentre nell'altro tendono al punto improprio (Figura 5.2(b)). ■

Simmetria

Il luogo (positivo o negativo) è simmetrico rispetto all'asse reale.

Questa proprietà discende dal fatto che le radici di un polinomio a coefficienti reali sono reali o complesse coniugate.

Asintoti

Nel luogo positivo gli $n - m$ rami che tendono all'infinito divergono lungo le direzioni (rispetto all'asse reale)

$$\phi_k = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}, \quad k = 0, 1, \dots, n - m - 1 \quad (5.13)$$

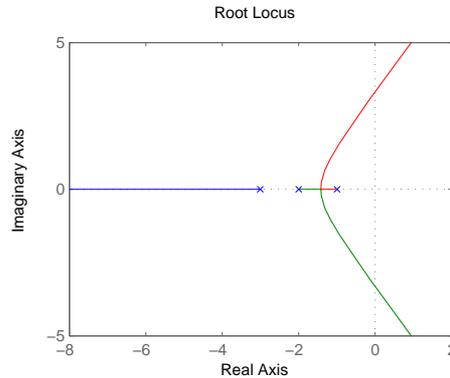


Figure 5.3. *Asintoti.*

Nel luogo negativo gli angoli delle direzioni degli asintoti sono:

$$\phi_k = \frac{2k\pi}{n - m}, \quad k = 0, 1, \dots, n - m - 1 \quad (5.14)$$

Gli asintoti formano una stella con centro nel punto

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

Example 5.4 La funzione d'anello $L(s) = K \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ ha il luogo delle radici di Figura 5.3. Avendo la funzione tre poli ($n = 3$) e nessuno zero ($m = 0$) ci sono tre rami che tendono al punto improprio. Per trovare le direzioni usiamo la (5.13) che fornisce:

$$\phi_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \phi_2 = \pi, \quad \phi_3 = \frac{5\pi}{3},$$

mentre il centro della stella si calcola usando l'equazione (5.15)

$$\sigma = \frac{-1 - 2 - 3}{3} = -2.$$

■

Punti sull'asse reale

Le parti dell'asse reale che appartengono al luogo positivo ($K > 0$) sono tutte e sole quelle che lasciano alla loro destra un numero complessivo dispari di zeri e poli reali di L .

Le parti dell'asse reale che appartengono al luogo negativo ($K < 0$) sono tutte e sole quelle che lasciano alla loro destra un numero complessivo pari di zeri e poli reali di L .

Angoli di uscita

Nel luogo positivo, gli angoli di uscita da un polo p_h di molteplicità ν_h sono

angle(s) of departure

$$\alpha_k(p_h) = \frac{1}{\nu_h} \left[- \sum_{p_i \neq p_h} \arg(p_h - p_i) + \sum_{i=1}^m \arg(p_h - z_i) + (2k+1)\pi \right]$$

$$k = 1, \dots, \nu_h. \quad (5.16)$$

Nel luogo negativo, gli angoli di uscita da un polo p_h di molteplicità ν_h sono

$$\alpha_k(p_h) = \frac{1}{\nu_h} \left[- \sum_{p_i \neq p_h} \arg(p_h - p_i) + \sum_{i=1}^m \arg(p_h - z_i) + 2k\pi \right]$$

$$k = 1, \dots, \nu_h. \quad (5.17)$$

Angoli di entrata

Nel luogo positivo, gli angoli di entrata in uno zero z_h di molteplicità $\bar{\nu}_h$ sono

angle(s) of arrival

$$\beta_k(z_h) = \frac{1}{\bar{\nu}_h} \left[\sum_{i=1}^n \arg(z_h - p_i) - \sum_{z_i \neq z_h} \arg(z_h - z_i) + (2k+1)\pi \right]$$

$$k = 1, \dots, \bar{\nu}_h. \quad (5.18)$$

Nel luogo negativo, gli angoli di entrata in uno zero z_h di molteplicità $\bar{\nu}_h$ sono

$$\beta_k(z_h) = \frac{1}{\bar{\nu}_h} \left[\sum_{i=1}^n \arg(z_h - p_i) - \sum_{z_i \neq z_h} \arg(z_h - z_i) + 2k\pi \right]$$

$$k = 1, \dots, \bar{\nu}_h. \quad (5.19)$$

Example 5.5 La Figura 5.4(a) riporta il luogo delle radici di $L(s) = K \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+5)}$. Per calcolare gli angoli di uscita dei rami dai due poli complessi coniugati usiamo la (5.16). Siccome i poli complessi coniugati $p_{1,2} = -2 \pm j1$ sono radici semplici e non ci sono zeri, avremo

$$\begin{aligned} \alpha_1(-2 + j1) &= -\arg(-1 - (-2 + j1)) - \arg(-2 - j1 - (-2 + j1)) + \pi \\ &= -\arg(1 - j1) - \arg(-j2) - \pi \\ &= -\left[\arctan\left(\frac{1}{-1}\right) \right] - \left(-\frac{1}{2}\pi\right) + \pi \\ &= -\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi + \pi = -\frac{1}{4}\pi \end{aligned}$$

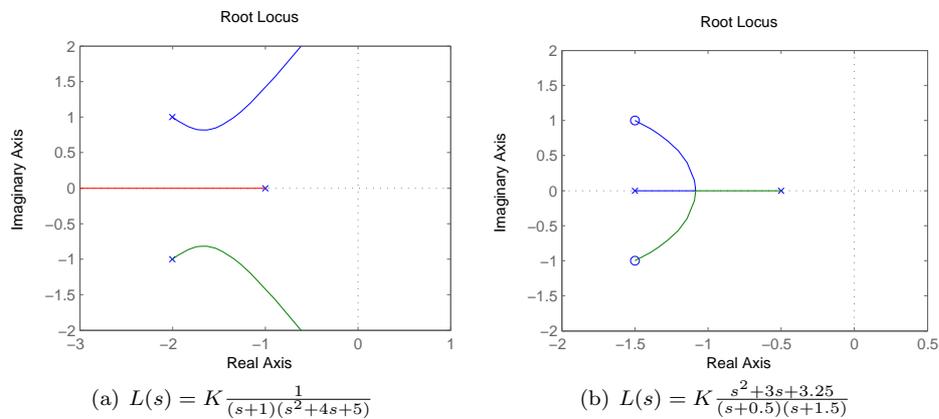


Figure 5.4. Angoli di uscita e di entrata in radici complesse coniugate semplici.

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(-2 - j1) &= -\arg(-1 - (-2 - j1)) - \arg(-2 + j1 - (-2 - j1)) + \pi \\
 &= -\arg(1 + j1) - \arg(j2) - \pi \\
 &= -\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi + \pi = \frac{1}{4}\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(-1) &= -\arg(-2 - j1 - (-1)) - \arg(-2 + j1 - (-1)) + \pi \\
 &= -\arg(-1 - j1) - \arg(-1 + j1) - \pi \\
 &= +\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi + \pi = -\pi
 \end{aligned}$$

I SEGNI NON TORNANO!!! ■

Example 5.6 La Figura 5.4(b) riporta il luogo delle radici di $L(s) = K \frac{s^2+3s+3.25}{(s+0.5)(s+1.5)}$. Per calcolare gli angoli di entrata dei rami dai due zeri complessi coniugati $p_{1,2} = -1.5 \pm j1$ usiamo la (5.18). Avremo una direzione per ogni zero:

$$\begin{aligned}
 \beta_1(-1.5 + j1) &= \arg(-1.5 + j1 - (-0.5)) + \arg(-1.5 + j1 - (-1.5)) - \dots \\
 &\quad - \arg(-1.5 + j1 - (-1.5 - j1)) + \pi \\
 &= \arg(-1 + j1) + \arg(j1) - \arg(j2) + \pi \\
 &= \left[\arctan\left(\frac{1}{-1}\right) \right] + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi + \pi \\
 &= \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi + \pi = \frac{7}{4}\pi = -\frac{1}{4}\pi \\
 \beta_1(-1.5 - j1) &= \frac{1}{4}\pi
 \end{aligned}$$

Come nell'esempio precedente gli angoli hanno lo stesso modulo e segno opposto perché il luogo deve essere simmetrico rispetto all'asse reale. ■

Punti multipli

Una radice multipla di (5.12) corrisponde ad un punto sul luogo comune a più rami (i rami entranti e quelli uscenti sono alternati). Un punto multiplo \hat{s} di molteplicità κ soddisfa le equazioni

$$1 + K\bar{L}(\hat{s}) = 0 \tag{5.20}$$

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{\bar{L}(\hat{s})} = 0 \text{ [o } \frac{d}{ds} \bar{L}(\hat{s}) \text{]} \tag{5.21}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{\kappa-1}}{ds^{\kappa-1}} \frac{1}{\bar{L}(\hat{s})} = 0 \tag{5.22}$$

Nel luogo positivo, gli angoli tra i rami in un punto multiplo su \mathbb{R} di molteplicità κ sono dati da

$$\frac{(2k+1)\pi}{\kappa} \text{ [CHECK]}$$

mentre sono

$$\frac{2k\pi}{\kappa} \text{ [CHECK]}$$

nel luogo negativo

Si possono fare due osservazioni sui punti multipli:

breakaway points
breakin points

- Tra due zeri (o due poli) su $\mathbb{R} \cup \infty$ che comprendono un segmento del luogo vi è sempre almeno un punto multiplo.
- Nel caso di radici doppie entrambe le equazioni (5.20)-(5.21) sono soddisfatte. In questo caso la (5.21) può essere riscritta come:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{(s - z_i)} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(s - p_i)} = 0, \tag{5.23}$$

o come

$$n(s) \frac{dd(s)}{ds} = d(s) \frac{dn(s)}{ds}. \tag{5.24}$$

Infatti sviluppando $\frac{d}{ds} \frac{1}{\bar{L}(s)}$ si ha:

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{\bar{L}(s)} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d(s)}{n(s)} \right) = \frac{d(s) \frac{dn(s)}{ds} - n(s) \frac{dd(s)}{ds}}{(n(s))^2}. \tag{5.25}$$

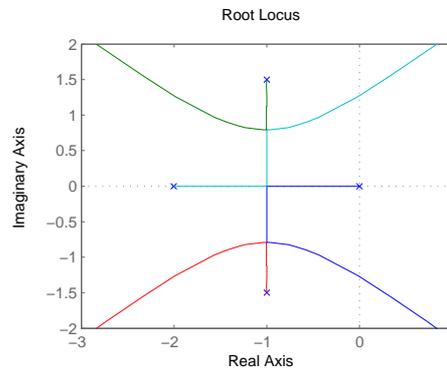


Figure 5.5. Punti multipli.

Example 5.7 In Figura 5.5 è riportato il luogo delle radici di $L(s) = K \frac{1}{s(s^2 + 2s + 3.25)(s+2)}$. Vogliamo determinare la posizione dei tre punti multipli. Come si deve in punti multipli hanno tutti molteplicità 2: quindi la soluzione del sistema di equazioni (5.20)-(5.21) ci darà le risposte cercate. Utilizzando la formulazione in (5.24) si ha:

$$1 \frac{d}{ds} (s(s^2 + 2s + 3.25)(s + 2)) = s(s^2 + 2s + 3.25)(s + 2) \frac{d1}{ds}$$

e quindi

$$4s^3 + 12s^2 + 14.5s + 6.5 = 0;$$

Le radici sono $\hat{s}_1 = -1$, $\hat{s}_{1,2} = -1 \pm j0.7906$. Appartenendo anche al luogo delle radici (cioè soddisfano anche la (5.20)) abbiamo trovato i punti cercati. ■

Intersezione con l'asse immaginario

Il luogo attraversa l'asse immaginario nei punti in cui il criterio di Routh mostra una transizione tra radici in LHP a radici in RHP. Se $n - m > 2$ almeno un ramo del luogo attraversa l'asse immaginario.

Example 5.8 Sia data la funzione $L(s) = K \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$ con luogo delle radici in Figura 5.6. Per determinare i punti esatti di attraversamento sull'asse immaginario e il corrispondente valore di K calcoliamo il polinomio a denominatore

$$\begin{aligned} d(s) + Kn(s) &= (s + 1)(s + 2)(s + 3)(s + 4) + K \\ &= s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24 + K \end{aligned}$$

e costruiamo la tabella di Routh in funzione di K

4	1	35	24+K
3	10	50	
2	30	24+K	
1	$42 - \frac{K}{3}$		
0	24+K		

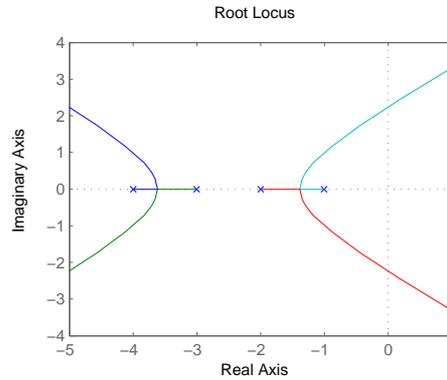


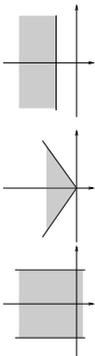
Figure 5.6. *Intersezione con l'asse immaginario.*

Siccome stiamo studiando il luogo positivo, l'unico valore di K che annulla il primo coefficiente di una riga è $K_{j\mathbb{R}} = 126$. La riga che si annulla non può che essere la numero 1. Sostituendo il valore di K trovato nei coefficienti della riga 2, troviamo le radici complesse coniugate sull'asse immaginario risolvendo

$$30s^2 + (24 + K_{j\mathbb{R}}) = 0$$

che fornisce $s_{1,2} = \pm j2.2361$. ■

5.3 Utilizzo del luogo delle radici per la sintesi del controllore

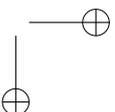
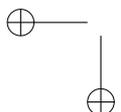


In questa sezione faremo veder alcuni esempi di applicazione del luogo delle radici come metodologia di progetto del controllore. Abbiamo già mostrato nel capitolo precedente che la posizione dei poli dominanti sul piano complessa è strettamente legata alla risposta dinamica del sistema. In particolare nel caso di sistemi del secondo ordine abbiamo ricavato le espressioni analitiche del tempo di salita, dell'ampiezza dell'overshoot, del tempo di assestamento in funzione della posizione dei poli complessi coniugati.

5.3.1 Progetto del controllore per un motore DC

Il modello matematico di un motore in corrente continua si ottiene mettendo a sistema l'equazione differenziale che descrive il circuito elettrico e l'equazione differenziale che descrive la meccanica. Se il rotore ha una inerzia J e un coefficiente di attrito viscoso pari a b l'equazione che descrive la posizione angolare θ è data da

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = K_m I \tag{5.26}$$



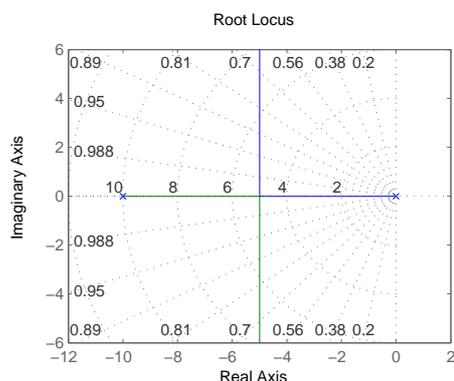


Figure 5.7. *Luogo delle radici per il motore DC.*

dove la coppia generata dal motore si calcola moltiplicando la corrente d'armatura I con la costante meccanica K_m . La corrente I si ottiene dall'equazione elettrica

$$L\dot{I} + RI = V - K_e\dot{\theta} \quad (5.27)$$

dove R e L sono la resistenza e l'induttanza del circuito elettrico, V è la tensione applicata al motore e K_e è la costante elettrica. Il prodotto $K_e\dot{\theta}$ genera la forza contro elettromotrice.

Calcolando la trasformata di Laplace ed eliminando i termini comuni in (5.26)-(5.27) si arriva alla funzione di trasferimento tra tensione e posizione

$$P(s) = \frac{\hat{\theta}(s)}{\hat{V}(s)} = \frac{K_t}{s[(Js + b)(Ls + R) + K_m K_e]} \quad (5.28)$$

Solitamente il circuito elettrico ha una costante di molto più piccola del sistema meccanico, per cui spesso in letteratura si trova il modello semplificato:

$$P(s) = \frac{A}{s(1 + s\tau)} \quad (5.29)$$

Assumiamo i seguenti parametri:

$$A = 1; \quad \tau = 0.1. \quad (5.30)$$

Vogliamo determinare in valore del parametro K tale per cui il sistema in anello chiuso risponde ad un gradino in ingresso con un overshoot uguale pari al 5% del valore finale. I poli in catena chiusa sono le soluzioni di

$$0.1s^2 + s + K = 0 \quad (5.31)$$

a cui corrisponde il luogo delle radici in Figura 5.7. Per un generico sistema del secondo ordine

$$P(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.32)$$

la risposta ad un gradino ha un overshoot dato da $M = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ quando $\xi \in [0, 1)$, cioè quando le radici sono complesse coniugate. Con $M\% = 5\%$ si ha $\xi \simeq 0.7$. Il K cercato è quello a cui corrisponde l'intersezione del luogo con la semiretta che parte dall'origine indicata con 0.7 nella Figura 5.7.

I poli di (5.32) sono dati da (per $\xi \in [0, 1)$)

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (5.33)$$

mentre quelli di (5.31) sono

$$p_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 10K} \quad (5.34)$$

Dall'analisi della parte reale si ottiene $\omega_n = \frac{5}{0.7} \simeq 7.14$, mentre dall'equazione

$$\sqrt{10K - 25} = 7.14\sqrt{1 - 0.7^2} \quad (5.35)$$

otteniamo il valore cercato per il guadagno: $K \simeq 6.14$.

5.3.2 Poli dominanti

Sia dato l'impianto di funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.36)$$

con $\xi = 0.6$ e ω_n . Si vuole progettare un controllore tale che il sistema in anello chiuso abbia un tempo di assestamento (al 5%) con ingresso a gradino minore di 0.5s. Proviamo con un controllore costante $C_1(s) = K$. Al variare di K il luogo di $L(s) = KP(s)$ decrive in poli in catena chiusa come mostrato in Figura 5.8. Dai due poli in catena aperta partono due asintoti con direzioni:

$$\begin{aligned} \phi_k &= \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, & k &= 0, 1, \dots, n-m-1 \\ &= \frac{(2k+1)\pi}{2}, & k &= 0, 1 \\ &= \left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right\} \end{aligned}$$

con centro della stella

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -\xi\omega_n = -3$$

Sappiamo che il tempo di assestamento è legato alla ordinata di una coppia di poli complessi coniugati da

$$T_a \simeq \frac{3}{\xi\omega_n}.$$

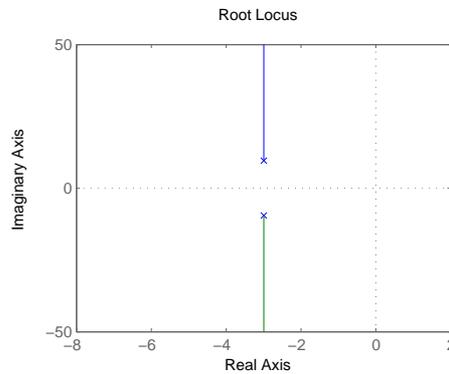


Figure 5.8. *Luogo delle radici di $L(s) = \frac{K100}{s^2+6s+100}$*

Con un controllore costante, il meglio che possiamo fare è garantire un T_a circa uguale a $1s$ che non soddisfa le specifiche del problema. Quello che dobbiamo fare è “spostare” i poli complessi coniugati alla sinistra di $\sigma = 6$ aggiungendo un polo in alta frequenza. L’alta frequenza è necessaria per evitare di influenzare la risposta del sistema, permettendoci l’approssimazione del sistema con i due poli dominanti complessi coniugati. L’aggiunta di un polo non è però sufficiente. Con $C_2 = \frac{1}{1+s/p}$, il luogo è formato dalla parte dell’asse reale minore di $-p$ e da due archi tendenti all’infinito secondo le direzioni

$$\begin{aligned} \phi_k &= \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, & k &= 0, 1, \dots, n-m-1 \\ &= \frac{(2k+1)\pi}{3}, & k &= 0, 1, 2 \\ &= \left\{ \frac{\pi}{6}, -\pi, -\frac{\pi}{6} \right\} \end{aligned}$$

con centro in

$$\sigma = \frac{-2\xi\omega_n - p}{3}.$$

In Figura 5.9 si vede come il sistema diventa instabile senza avere nessuna coppia di poli complessi coniugati che soddisfano le specifiche.

Dobbiamo quindi inserire anche uno zero nel controllore

$$C_3(z) = K \frac{1+s/z}{1+s/p}, \quad z > 0, p > 0$$

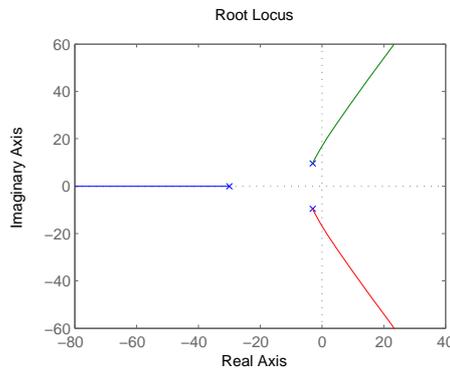


Figure 5.9. *Luogo delle radici di $L(s) = \frac{K}{1+s/p} \frac{100}{s^2+6s+100}$ con $p = 30$*

Per il tracciamento del luogo notiamo che la parte dell'asse reale appartenente al luogo è l'intervallo compreso tra $-p$ e $-z$, mentre si avranno ancora due rami che tendono all'infinito che partono dalla coppia di poli complessi coniugati. le direzioni sono $\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}$ come nel primo caso, mentre il centro della stella viene influenzato dalla posizione del polo e dello zero nel controllore

$$\sigma = \frac{-2\xi\omega_n - p + z}{3 - 1} = -\xi\omega_n + \frac{-p + z}{2}.$$

Risulta quindi che per $p > z$ l'asintoto è alla sinistra di $-\xi\omega_n$, mentre se $p < z$ è alla sua destra. Cerchiamo quindi una soluzione con $p > z$ per avere la parte reale dei poli complessi coniugati che ci permetta di verificare le specifiche sul tempo di assestamento.

Dovendo essere

$$\xi\omega_n \geq \frac{3}{T_a} = 6$$

dovremo scegliere p e z tali che $\frac{-p+z}{2} \leq -3$ e collocati in frequenza in modo da non modificare la risposta del sistema dovuta ai poli complessi coniugati (approssimazione che ci permette di utilizzare la formula approssimata $T_a \simeq \frac{3}{\xi\omega_n}$). Fissato $p - z = 20$, in Figura 5.10 sono mostrati i luoghi delle radici e le corrispondenti risposte al gradino per diverse coppie $\{p, z\}$. Per le risposta al gradino si è scelto il K tale che la parte reale dei poli complessi coniugati sia esattamente uguale a -6 . Interessante notare come all'avvicinarsi della coppia polo-zero all'asse reale la risposta diventa meno oscillatoria, l'overshoot diminuisce, mentre aumenta il tempo di salita. Cambia infatti la parte immaginaria dei poli complessi coniugati (la pulsazione dei poli complessi coniugati in catena chiusa) e la risposta è anche influenzata dall'ulteriore polo con frequenza paragonabile con quella dei poli complessi coniugati.

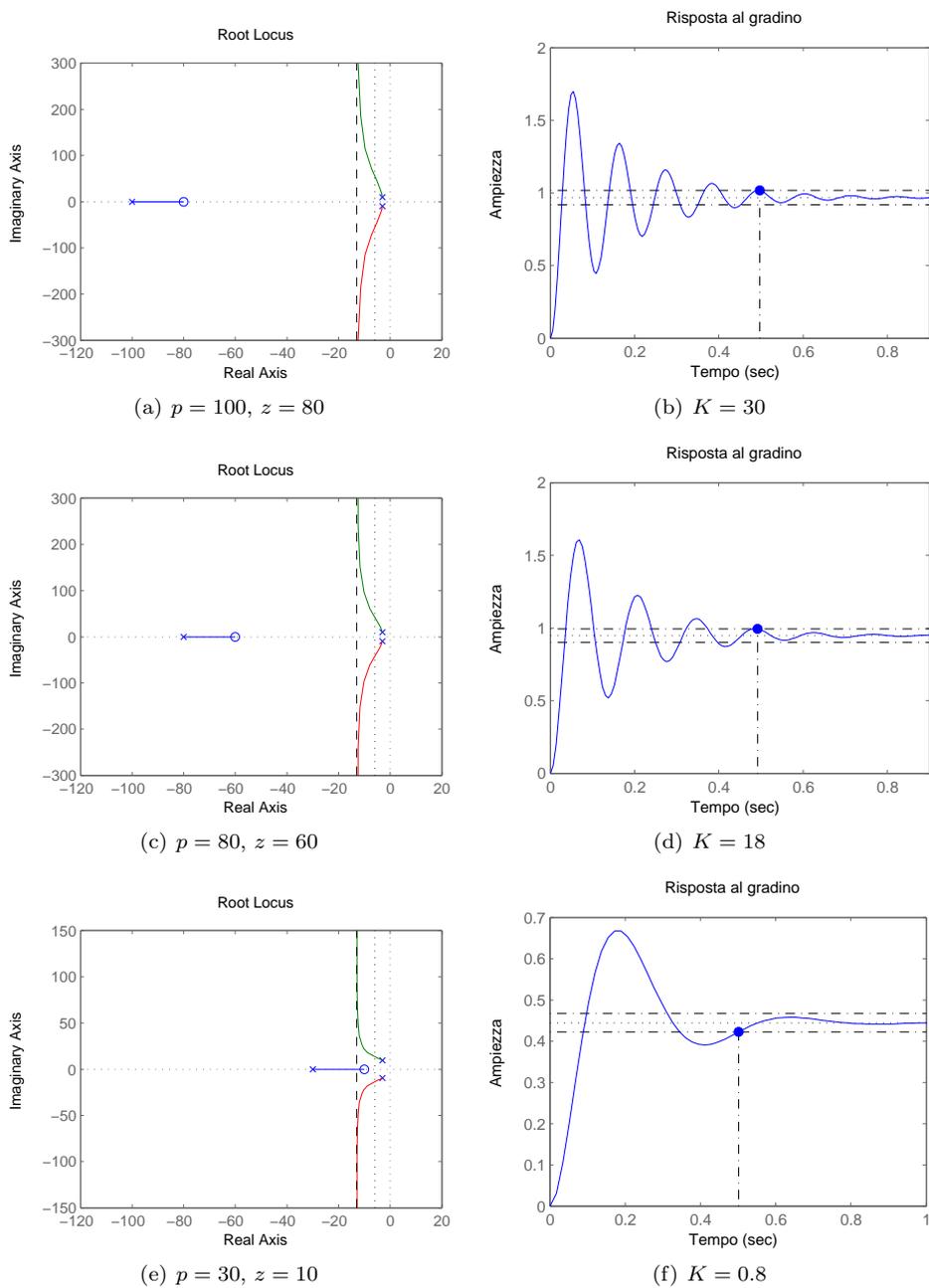


Figure 5.10. Luogo delle radici di $L(s) = K \frac{1+s/z}{1+s/p} \frac{100}{s^2+6s+100}$

5.3.3 Nested Control Loop

position/velocity loop (two parameters)

5.3.4 Progettazione di un controllore per sistemi collocati e non collocati

Ex franklin p. 256

5.3.5 Contorno delle radici

Marro p.187

5.3.6 Reti anticipatrici e ritardatrici

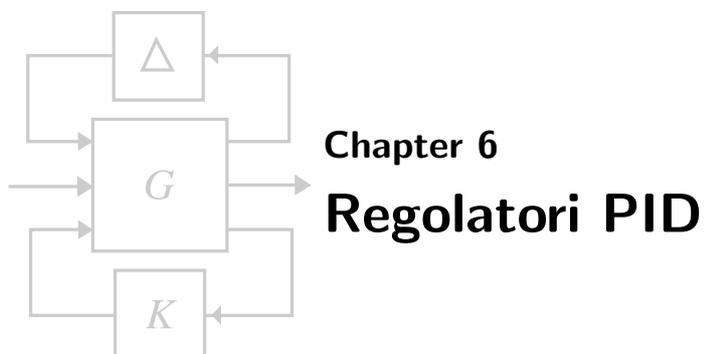
lead compensation
lag compensation

5.4 Il luogo delle radici per sistemi a tempo discreto

DA INSERIRE? mah

Exercises

- 5.1. Disegnare il luogo delle radici di BLA BLA
- 5.2. Disegnare il luogo delle radici di BLA BLA



Chapter 6

Regolatori PID

The factory of the future will have only two employees, a man and a dog. The man will be there to feed the dog. The dog will be there to stop the man touching the equipment.

—Warren Bennis

In questo capitolo introdurremo i controllori (o regolatori) PID che rappresentano il tipo di controllori più diffusi nell'industria. Il motivo è che la loro progettazione consiste essenzialmente nel “trovare” i valori di un numero molto piccolo di parametri che garantiscono un comportamento *buono* del sistema.

6.1 Introduzione

Nell'industria si ha sempre una conoscenza approssimata dell'impianto da controllare e si vorrebbe progettare un controllore sul campo, agendo cioè su un certo numero (sperabilmente piccolo) di parametri e vedere in tempo reale come il sistema si comporta. Questo ovviamente non può essere applicato quando il sistema è intrinsecamente instabile ma è utile nella stragrande maggioranza di sistemi elettromeccanici e chimici.

6.2 PID

Consideriamo nuovamente lo schema a blocchi di un sistema $P(s)$ controllato in retroazione dal regolatore $C(s)$ in Figura 6.1

Il caso trattato con il metodo del luogo delle radici corrisponde ad avere:

$$C(s) = k_P. \quad (6.1)$$

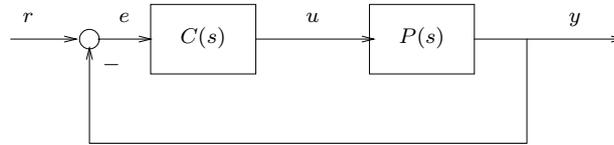


Figure 6.1. Schema a blocchi di un sistema in retroazione.

Infatti se l'impianto si scrive come rapporto di polinomi coprimi $P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$, la funzione di trasferimento in anello chiuso vale

$$T(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{k_P d(s)}{d(s) + k_P n(s)} \quad (6.2)$$

e il denominatore si presenta nella forma studiata nel capitolo 5. Il controllo (6.1) viene detto proporzionale in quanto l'uscita di controllo $u(t)$ è proporzionale al segnale di errore $e(t)$

$$u(t) = k_P e(t) = k_P (r(t) - y(t)). \quad (6.3)$$

Si può complicare il modello di controllo aggiungendo alla componente (o azione) proporzionale, altre due parti: una azione integrativa e una azione derivativa. Il controllo si descrive con la seguente equazione integro-differenziale

PID

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + k_D \frac{de(t)}{dt} \quad (6.4)$$

dove k_I è il guadagno integrale e k_D è il guadagno derivativo. Utilizzando la trasformata di Laplace, la funzione di trasferimento del controllore risulta

$$C(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s \quad (6.5)$$

o, equivalentemente,

$$C(s) = k_P \left[1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right] \quad (6.6)$$

dove $T_I := \frac{k_P}{k_I}$ è la costante di tempo dell'azione integrale (*reset rate*) e $T_D := \frac{k_D}{k_P}$ è la costante di tempo dell'azione derivativa (*derivative rate*).

Si nota immediatamente che la funzione di trasferimento di $C(s)$ sia nella forma (6.5) che nella forma (6.6) non è causale per $k_D \neq 0$. Il grado del numeratore è infatti maggiore del grado del denominatore. Questo è dovuto al fatto che l'azione derivativa non si può realizzare con dispositivi causali. Per ovviare a questo problema di fisica realizzabilità, solitamente si aggiunge un polo in alta frequenza in modo da rendere il grado del numeratore uguale a quello del denominatore senza modificare sostanzialmente il comportamento del sistema in anello chiuso. L'espressione di $C(s)$ diventa

$$C(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + \frac{k_D s}{1 + \frac{K_D}{K_P N} s} = k_P \left[1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + \frac{T_D}{N} s} \right] \quad (6.7)$$

$$C(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + \frac{k_D s}{1 + k'_D s} = k_P \left[1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T'_D s} \right] \quad (6.8)$$

in cui il polo aggiuntivo è in $-\frac{1}{T'_D}$ con $T'_D \ll T_D$.

A seconda di quali coefficienti sono diversi da zero, si hanno le seguenti configurazioni di controllo utilizzate più di frequente:

Tipo di controllore	k_P	k_I	k_D	polo	zero/i
P	$\neq 0$	0	0	-	-
I	0	$\neq 0$	0	$s = 0$	-
PI	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$s = 0$	$s = -\frac{1}{T_I}$
PD	$\neq 0$	0	$\neq 0$	-	$s = -\frac{1}{T'_D}$
PID	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$s = 0$	$s_{1,2} = \frac{-T_I \pm \sqrt{T_I^2 - 4T_D T_I}}{2T_D T_I}$

Nella tabella precedente sono anche riportati poli e zeri per la formulazione standard nell'equazione (6.6). Nel caso del PID con tutte le tre azioni presenti i due zeri saranno reali distinti per $T_I > 4T_D$, reali coincidenti per $T_I = 4T_D$ e complessi coniugati per $T_I < 4T_D$. Se le costanti di tempo sono positive (come è nella norma), gli zeri sono nel semipiano sinistro.

Se risulta chiaro il significato del termine proporzionale, vale la pena spendere qualche parola per descrivere il significato dell'azione integrale e derivativa.

- **termine integrale:** essendo il contributo di questo termine proporzionale all'integrale dell'errore, risulta che se fossimo in presenza di un errore costante, questo termine divergerebbe diventando più o meno infinito a seconda del segno dell'errore. Questo implica che il termine integrale tende ad annullare l'errore almeno asintoticamente e viene utilizzato per garantire la reiezione di riferimenti e/o disturbi costanti asintoticamente;
- **termine derivativo:** il termine derivativo è proporzionale alla derivata dell'errore, cioè alla velocità con la quale l'errore cambia. In questo modo è come avere "in anticipo" delle informazioni sull'andamento futuro dell'errore in modo da rispondere più prontamente ai cambiamenti.

La taratura dei parametri del controllore PID dovrà essere guidata dal soddisfacimento dei seguenti requisiti

1. stabilità asintotica,
2. margini di stabilità ,
3. tipo del sistema,
4. precisione statica ,
5. precisione dinamica (velocità di risposta),
6. reiezione dei disturbi.

Nei controllori PID, il numero di gradi di libertà che si hanno a disposizione sono solo tre, per cui non sempre è possibile soddisfare qualsiasi insieme di specifiche contemporaneamente.

Example 6.1 Consideriamo un sistema del primo ordine di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{A}{1 + \tau s}$$

con $\tau = 10$ e $A = 1$. Si vogliono inizialmente confrontare gli errori a regime del sistema controllato con un semplice controllo proporzionale e con un controllo PI quando il segnale di riferimento $r(t)$ in ingresso è un gradino di ampiezza B . I due controllori saranno del tipo

$$C_P(s) = k_P, \quad C_{PI}(s) = k_P + \frac{k_I}{s}$$

con $k_P > 0$ e $k_I > 0$. Le funzioni d'anello $L(s) = C(s)P(s)$ e le funzioni di trasferimento $W(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ in anello chiuso hanno la forma

$$L_P(s) = \frac{k_P A}{1 + \tau s}, \quad L_{PI}(s) = \frac{k_I A + k_P A s}{s(1 + \tau s)}$$

e

$$W_P(s) = \frac{k_P A}{\tau s + (1 + k_P A)}, \quad W_{PI}(s) = \frac{k_I A + k_P A s}{\tau s^2 + s(1 + k_P A) + k_I A}$$

rispettivamente. Guardando le funzioni d'anello possiamo già dire che $L_P(s)$ è di tipo 0 e quindi presenterà un errore a regime al gradino finito mentre $L_{PI}(s)$ è di tipo 1 con errore a regime nullo. Per le ipotesi sui valori A e τ e sui coefficienti dei controllori, possiamo applicare il teorema del valore finale da cui segue:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(1 - W(s)) \frac{B}{s} = B(1 - W(0))$$

e quindi

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e_P(t) &= B \left(1 - \frac{k_P A}{(1 + k_P A)} \right) = \frac{B}{(1 + k_P A)} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_{PI}(t) &= B \left(1 - \frac{k_I A}{k_I A} \right) = 0. \end{aligned}$$

Per avere errore a regime nullo abbiamo bisogno dell'azione integrale, i.e. $k_I \neq 0$, mentre se è sufficiente garantire un errore inferiore ad un certa soglia ℓ , si può ancora usare un controllo proporzionale con

$$\bar{k}_P \geq \frac{B - \ell}{A\ell}.$$

Con $B = 5$ e ℓ inferiore al 10% di B , abbiamo che il coefficiente proporzionale deve essere maggiore di

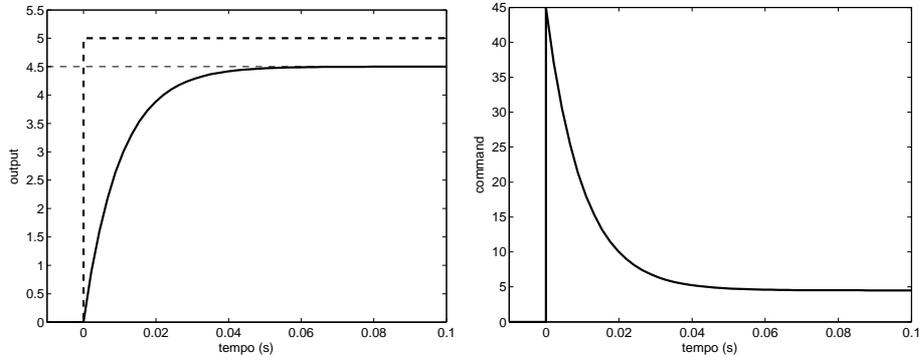
$$\bar{k}_P \geq \frac{B - \ell}{A\ell} = \frac{5 - 5/10}{1 \cdot 5/10} = 9.$$

Per ℓ uguale al 5% di B , il valore di \bar{k}_P diventa 19. Sembrerebbe quindi che, tranne per il caso con errore a regime nullo, sia possibile ottenere qualsiasi altro livello di accuratezza semplicemente aumentando il valore di k_P . Questo è vero solo “sulla carta”. Infatti si deve sempre tenere a mente che il comando $u(t)$ in uscita dal controllore dovrà essere attuato da un qualche dispositivo che ovviamente avrà dei limiti fisici. In altre parole, i comandi devono essere compresi tra un valore minimo e un valore massimo (ex. $|u(t)| < U_{max}$) per ragioni di progettazione e sicurezza.

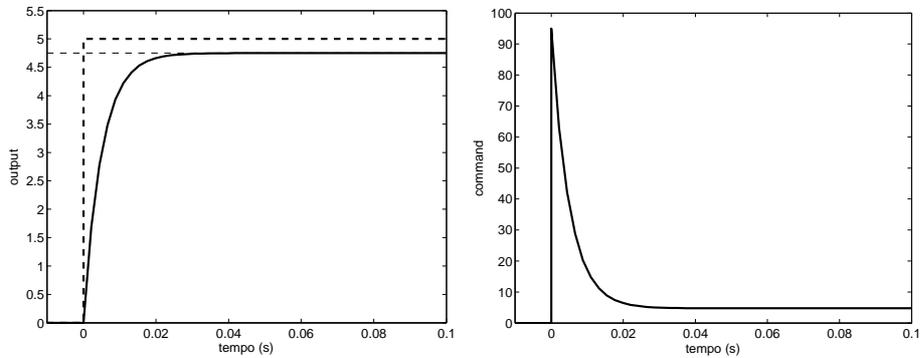
Dalle figure 6.2(a) e 6.2(b) ci si può rendere facilmente conto del legame tra accuratezza a regime e valore massimo dell'ingresso di controllo quando si utilizza solo la componente proporzionale. In questo semplice esempio si vede come un aumento della precisione a regime (dal 10% al 5%) viene pagato con circa il raddoppio del valore massimo del controllo assunto nel punto iniziale.

Se si dovesse rispettare il vincolo sul valore massimo di $|u| < 20$, si dovrebbe ridurre il guadagno proporzionale a 4. Questo valore di k_P soddisfa le specifiche sul controllo ma riduce sia l'accuratezza a regime ($\sim 20\%$ del valore finale) sia il tempo di risposta come si vede nella figura 6.2(c).

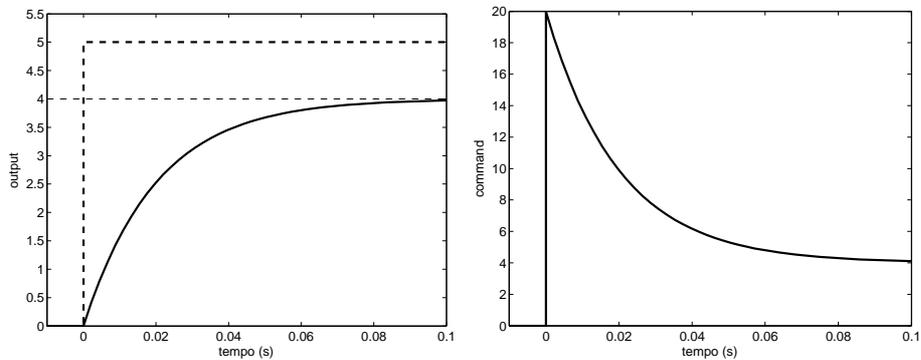
A questo punto vale la pena domandarsi se è possibile ottenere prestazioni migliori introducendo anche l'azione integrale. Nella sezione 6.4 introdurremo alcune tecniche per fare la calibrazione automatica (o semiautomatica) dei parametri dei controllori PID. Per il momento ci limiteremo a provare alcune combinazioni di coppie $\{k_P, k_I\}$ e verificare a posteriori se le specifiche sono state soddisfatte. Sappiamo già che per $k_I > 0$ il valore a regime dell'uscita coinciderà con quello del riferimento. Non sappiamo però se il limite sul valore massimo del comando è rispettato.



(a) ℓ è il 10% del valore finale B



(b) ℓ è il 5% del valore finale B



(c) $|u| < 20$

Figure 6.2. *Controllo proporzionale: legame tra precisione e ampiezza del controllo*

La figura 6.3 mostra le coppie $\{k_P, k_I\}$ che garantiscono $|u| < 20$. Abbiamo quindi una infinità di coppie “lecite”: quale scegliamo? Vedremo nell’esempio successivo qualche altro criterio che può guidare la progettazione.

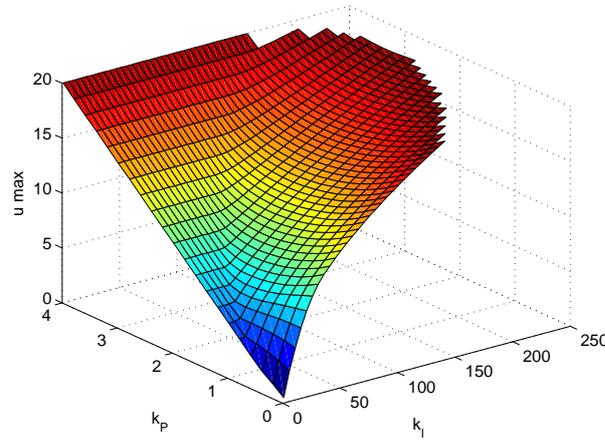


Figure 6.3. Coppie di k_P e k_I che garantiscono $|u(t)| < 20, \forall t$ nell’esempio 6.1.

Per il momento riportiamo in figura 6.4 due andamenti temporali per due controllori che soddisfano le specifiche sull’errore a regime e sul valore massimo del controllo. ■

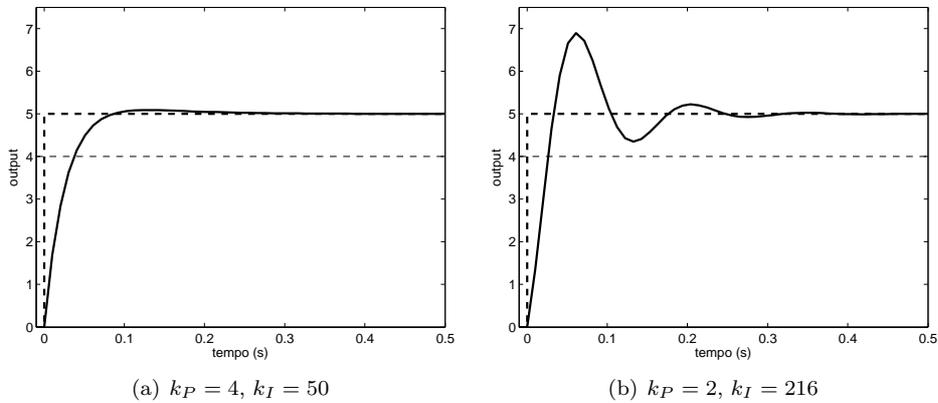


Figure 6.4. Esempi di controllo proporzionale-integrativo nell’esempio 6.1.

Example 6.2 La progettazione nell'esempio precedente ha studiato solo il comportamento a regime e, a posteriori, il valore massimo del controllo per un ingresso a gradino di ampiezza nota. Abbiamo visto che ci sono infinite coppie per il controllore PI che soddisfano queste due specifiche. Ci chiediamo:

- cosa succede durante il transitorio?
- la risposta dinamica è sufficientemente pronta?
- l'eventuale sovralongazione è tollerabile?

Dal capitolo 3 sappiamo che le grandezze che descrivono la risposta dinamica sono strettamente legate alla posizione degli autovalori dominanti nel piano complesso. Nel caso di una funzione di trasferimento con poli doppi complessi coniugati e senza zeri, i legami sono stati calcolati esplicitamente. Come si può osservare dalla funzione di trasferimento W_{PI} , se k_P è identicamente nullo, siamo esattamente in questa situazione. Si può quindi ricorrere al luogo delle radici e cercare, se esiste, il valore di k_I che assicura le proprietà dinamiche volute.

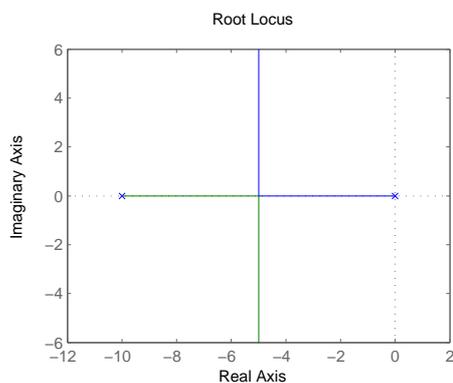


Figure 6.5. Luogo delle radici relativo all'esempio 6.2 con $k_P = 0$.

La figura 6.5 riporta il luogo delle radici al variare di k_I . Per $k_I > 2.5$ (punto doppio) la funzione di trasferimento in anello chiuso presenta una coppia di poli complessi coniugati. Se confrontiamo la funzione di trasferimento in (6.9) con la generica funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati ($0 < \xi < 1$)

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

otteniamo

$$\omega_n^2 = \frac{k_I A}{\tau} \quad (6.9)$$

$$2\xi\omega_n = \frac{1}{\tau}. \quad (6.10)$$

Immaginiamo di fissare un tempo di salita massimo uguale a T_s e una sovraelongazione massima M . Ricordando che il tempo di salita è legato alla pulsazione da

$$T_s \simeq \frac{1.8}{\omega_n}, \tag{6.11}$$

e che la sovraelongazione è legata allo smorzamento da

$$M = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \tag{6.12}$$

mettendo a sistema le uguaglianze (6.9)-(6.10) con le (6.11)-(6.12) e ricordando il legame tra ξ e M , si ottengono le disequazioni:

$$k_I > \frac{(1.8)^2\tau}{AT_s^2} \quad (\simeq 5.2)$$

$$k_I < \frac{1}{4\xi^2 A\tau} \quad (\simeq 12.3)$$

che il guadagno integrale deve soddisfare contemporaneamente. Con $T_s \leq 0.05s$ e $M \leq 0.20$ (a cui corrisponde $\xi \geq 0.45$) dai due grafici nella Figura 6.6 che corrispondono alle precedenti disequazioni, si può determinare l'intervallo dei k_I che soddisfa le nostre specifiche. I valori simulati sono in accordo con le approssimazioni delle disequazioni precedenti.

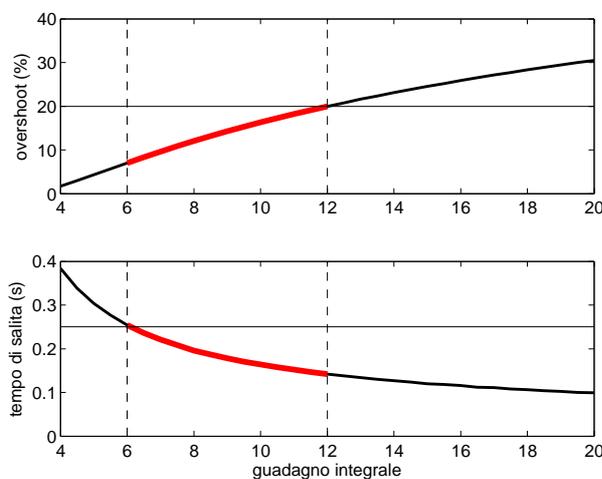


Figure 6.6. Valori di k_I che soddisfano le specifiche nell'esempio 6.2.

Per quanto riportato nella Figura 6.3, per ognuno di questi guadagni, il valore massimo del controllo con un ingresso a gradino è inferiore al valore 20 e quindi anche la specifica sul controllo risulta soddisfatta. ■

6.3 PID e specifiche

Il tipo di specifiche finora riportate solitamente portano non a un unico set *ottimo* di valori per il controllore PID, ma ad un range di valori che “vanno bene”, cioè che soddisfano tutti i requisiti. I criteri che abbiamo utilizzato finora sono legati alla *risposta del sistema ad un riferimento costante*:

- tempo di salita,
- tempo di assestamento,
- overshoot,
- errore a regime

o agli *indici di stabilità*

- margine di fase,
- margine di guadagno,
- margine di stabilità .

Altri criteri sono legati alla *risposta in frequenza*

- picco di risonanza: valore massimo della risposta in frequenza,
- frequenza al picco: frequenza alla quale è presente il picco,
- banda passante: frequenza alla quale il guadagno decresce di 3dB ($1/\sqrt{2}$ in valore assoluto).

Tutti questi criteri sono legati alla funzione di trasferimento e ad ingressi canonici ma non ci dicono in forma diretta qual'è il comportamento del sistema: l'errore sarà piccolo o grande?

Per rispondere a questa domanda dobbiamo introdurre una qualche metrica per pesare l'errore

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

al variare del tempo t . Tra le metriche più in uso abbiamo

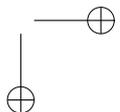
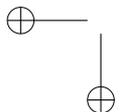
Errore assoluto massimo $e_{max} = \max_{t \geq 0} |e(t)|$

integrated absolute error Integrale del valore assoluto dell'errore $IAE = \int_0^\infty |e(t)| dt$

IAE moltiplicato per il tempo $ITNAE = \int_0^\infty t^n |e(t)| dt$

integrated squared error Integrale del quadrato dell'errore $ISE = \int_0^\infty (e(t))^2 dt$

quadratic criterion Criterio quadratico $QC = \int_0^\infty [(e(t))^2 + \rho(u(t))^2] dt$



I criteri più interessanti sono l'IAE e il QC dove, oltre all'errore viene considerato attraverso il coefficiente ρ anche il valore del controllo. In questo caso si pesa non solo l'accuratezza del controllo (cioè quanto piccolo è l'errore) ma anche quanto ci costa in termini di controllo.

Questi indici difficilmente si riescono ad esprimere in forma chiusa in funzione dei parametri di controllo. Grazie però ai simulatori è possibile ottenere dei grafici che permettono di determinare il miglior set di parametri che minimizzano uno degli indici proposti (ovviamene con orizzonte finito T invece che ∞). Per far questo è necessario fornire

- la classe dei segnali di riferimento a cui siamo interessati (e.g. gradini, rampe, segnali stocastici);
- la classe dei disturbi che solitamente corrompono le misure (e.g. gradino, rumore bianco).

A partire da queste informazioni si possono determinare in maniera esaustiva tutti gli indici che riteniamo importanti. È importante sottolineare che il valore dei dati ottenuti da queste simulazioni è legato alla qualità del modello dell'impianto che abbiamo a disposizione: più il modello è incerto, minore sarà il grado di affidabilità dei dati ottenuti.

Osservazione Da sottolineare da ultimo che i dati raccolti sono solitamente campionati, cioè ottenuti a prefissati istanti temporali $t = kT_s$, $k \in \mathbb{Z}_+$ multipli di un tempo di campionamento T_s legato al tipo di strumentazione a disposizione. Ad esempio encoder che forniscono la posizione angolare del rotore di un motore possono avere $T_s = 1ms$ o maggiore/minore a seconda della qualità del sensore. Segue quindi che ogni volta che troviamo il segno di integrale negli indici riportati sopra, dovremmo sostituirlo con il segno di sommatoria.

Example 6.3 PID con IAE ■

6.3.1 Indici Stocastici

(varianza campionaria, teorema ergodico, controllo a minima varianza)
DA INSERIRE?

6.4 Taratura automatica dei controllori PID alla Ziegler-Nichols

In questa sezione verranno presentate due tecniche per il tuning automatico dei parametri di un controllore PID. Queste tecniche sono state sviluppate da Ziegler e Nichols nel 1942. Ne esistono in realtà molte altre progettate nel corso degli anni e spesso vengono implementate nelle apparecchiature elettromeccaniche per facilitare il lavoro dei progettisti. Un tipico esempio è dato dal tuning dei parametri per i robot industriali.

Tutte queste tecniche hanno come passo intermedio l'identificazione del modello approssimato del sistema. Questa identificazione viene fatta attraverso degli esperimenti direttamente sull'impianto senza dover richiedere lo sviluppo di un modello matematico analitico.

Da quanto detto risulta che queste tecniche valgono nell'ipotesi che:

Assunzione: l'impianto è asintoticamente stabile con guadagno d'anello positivo.

Da osservare inoltre che i valori ottenuti sono spesso solo indicativi e servono come base di partenza per un tuning più accurato eseguito manualmente.

6.4.1 Ziegler-Nichols in anello chiuso

Il metodo di Ziegler-Nichols in anello chiuso si basa sul controllare l'impianto in retroazione con un semplice controllore proporzionale, $C(s) = k_P$ in cui la costante viene fatta variare opportunamente. Il metodo si sviluppa nei seguenti passi:

1. chiudere l'anello di controllo con un valore k_P che assicura la stabilità del sistema. Il segnale di riferimento $r(t)$ è costante,
2. aumentare il valore di k_P finché il sistema retroazionato è al limite di stabilità. Questa condizione equivale all'avere due poli complessi coniugati sull'asse immaginario nella funzione di trasferimento in anello chiuso. La risposta $y(t)$ ad un gradino nel riferimento $r(t)$ sarà quindi una sinusoidale. Il valore del guadagno k_P^* trovato si chiama guadagno critico mentre si indicherà con T^* il periodo della sinusoidale, i.e. $y(t) = A \sin(2\pi \frac{t}{T^*})$.

guadagno
critico

Noti $\{k_P^*, T^*\}$, i valori dei parametri per i controllori P, PI e PID sono dati nella tabella 6.1.

Tipo di controllore	k_P	T_I	T_D
P	$0.5k_P^*$	-	-
PI	$0.45k_P^*$	$0.8T^*$	-
PID	$0.6k_P^*$	$0.5T^*$	$0.125T^*$

Table 6.1. Taratura di Ziegler-Nichols in anello chiuso

Prima di applicare questa tecnica ad un esempio, vale la pena fare alcune osservazioni:

1. il guadagno critico trovato nella procedura non è altro che il margine di guadagno che abbiamo definito sul diagramma di Bode nel caso dei sistemi lineari. Va da se che se l'impianto è tale per il margine di guadagno è infinito, questa tecnica non è applicabile: non esiste un valore k_P^* tale per cui il sistema risponde con un sinusoidale ad un ingresso a gradino.

- per il legame tra i margini di stabilità nei diagrammi di Bode e Nyquist, risulta anche che il guadagno critico k_P^* è pari all'inverso dell'ascissa in corrispondenza dell'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale. Inoltre la pulsazione ω^* a cui si verifica questa intersezione è legata al periodo della sinusoide da $\omega^* = \frac{2\pi}{T^*}$.

Example 6.4 ZN ■

6.4.2 Ziegler-Nichols in anello aperto

In questo caso si vuole innanzitutto approssimare l'impianto $P(s)$ con una funzione di trasferimento $\hat{P}(s)$ del primo ordine con ritardo τ

$$\hat{P}(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts} \tag{6.13}$$

I parametri da determinare oltre al ritardo equivalente τ , sono la costante di tempo equivalente T e il guadagno equivalente K . Per l'assunzione fatta precedentemente, sarà $T > 0$.

La taratura del modello approssimato viene fatta fittando la risposta del sistema quando l'ingresso di controllo $u(t)$ è un gradino. Se il sistema ha due poli dominanti invece di un polo dominante l'approssimazione sarà poco accurata e quindi anche i parametri per i controllori saranno poco precisi. Un altro problema è dovuto al fatto che il sistema potrebbe essere non lineare: cioè portebbe rispondere, per esempio, con guadagni diversi K per valori del gradino diversi. Anche in questo caso, la taratura sarà attendibile solo se il controllore vgarantirà segnali di comando nello stesso range di funzionamento in cui si è fatta la taratura del modello approssimato.

Una volta noti i parametri del modello (6.13), i parametri del controllore PID si calcolano come nella tabella 6.2.

Tipo di controllore	k_P	T_I	T_D
P	$\frac{T}{K\tau}$	-	-
PI	$\frac{0.9T}{K\tau}$	3τ	-
PID	$\frac{1.2T}{K\tau}$	2τ	0.5τ

Table 6.2. Taratura di Ziegler-Nichols in anello aperto

Un altro set di parametri vengono forniti dalle regole proposte da Cohen e Coon riportate nella tabella 6.3.

Example 6.5 ZN vs CC ■

6.5 Iterative Feedback Tuning

INSERIRE?

Tipo di controllore	k_P	T_I	T_D
P	$\frac{3T+\tau}{3K\tau}$	-	-
PI	$\frac{10.8T+\tau}{12K\tau}$	$\tau \frac{30T+3\tau}{9T+20\tau}$	-
PID	$\frac{16T+3\tau}{12K\tau}$	$\tau \frac{32T+6\tau}{12\tau}$	$\frac{4T\tau}{11T+2\tau}$

Table 6.3. Taratura di Cohen-Coon

6.6 Schema anti wind-up

INSERIRE?

6.7 Filtro Notch

INSERIRE?

6.8 Predittore di Smith

INSERIRE?

6.9 Principio del Modello Interno

INSERIRE?

6.10 Controllo Feedforward

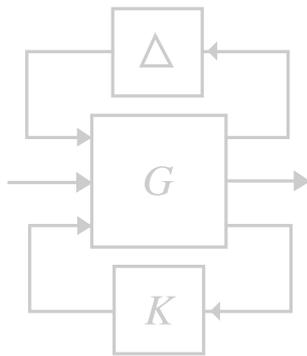
INSERIRE?

6.11 Controllori PID a tempo discreto

INSERIRE?

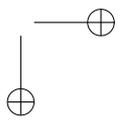
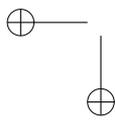
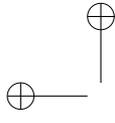
Exercises

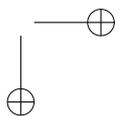
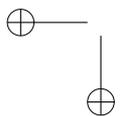
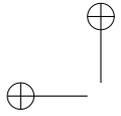
- 6.1. Progettare un controllore PI tale che
- 6.2. Progettare un controllore PD tale che
- 6.3. Progettare un controllore PID tale che

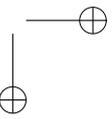
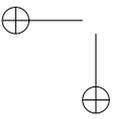
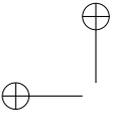


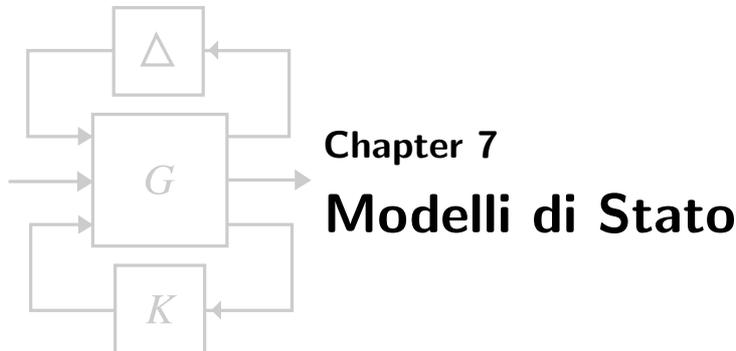
Part V

Rappresentazione di Stato









Chapter 7

Modelli di Stato

You and I do not see things as they are. We see things as we are.

—Herb Cohen

In questo capitolo descriveremo i modelli dinamici (a tempo continuo e discreto) usando la rappresentazione di stato o interna. La descrizione dei sistemi usando le funzioni di trasferimento o le corrispondenti equazioni differenziali o alle differenze viene detta rappresentazione esterna perché descrive come l'ingresso e l'uscita sono legate. La rappresentazione interna descrive sempre il legame ingresso-uscita introducendo però un nuovo ingrediente: le variabili di stato.

7.1 Introduzione

La rappresentazione ingresso-uscita usata finora permette di capire molte delle proprietà dei modelli dinamici studiando il rapporto tra i polinomi a numeratore e denominatore. Grazie all'utilizzo di strumenti analitici come la tabella di Routh o di Jury, o grafici come i diagrammi di Bode e Nyquist è possibile sapere se il sistema è stabile oppure no, dedurre i margini di stabilità e avere una chiara indicazione di come il sistema risponde a sollecitazioni di tipo sinusoidale o a gradino. Per la sintesi di controllori che assicurino il comportamento voluto abbiamo introdotto i controllori PID e il luogo delle radici. Se da un lato questi strumenti sono facili da usare e da inizializzare, dall'altro non permettono di sfruttare tutte le potenzialità del controllo in retroazione.

Per queste ragioni sono state sviluppate altre tecniche che si basano non sulla rappresentazione ingresso-uscita (o esterna) ma sulla rappresentazione ingresso-stato-uscita, detta anche rappresentazione interna o di stato. La novità è l'introduzione di alcune variabili ausiliarie, dette variabili di stato, per descrivere la dinamica del sistema. Queste variabili possono avere o meno significato fisico.

Uno dei risultati fondamentali dell'analisi delle equazioni differenziali è il seguente:

Ogni equazione differenziale di ordine n in forma normale

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (7.1)$$

si può trasformare in un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine; definiti

$$\begin{aligned} y_1(x) &\triangleq y(x) \\ y_2(x) &\triangleq y'(x) \\ &\vdots \\ y_n(x) &\triangleq y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

l'equazione (7.1) si riscrive come:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

Le variabili $y_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ sono variabili ausiliarie che permettono di rappresentare il legame tra la variabile indipendente x e la variabile dipendente y in una maniera diversa. Ci si chiede quindi come si può riscrivere l'equazione differenziale di ordine n che lega l'ingresso $u(t)$ con l'uscita $y(t)$

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k} \quad (7.2)$$

come un sistema di n equazioni differenziali di ordine uno o analogamente come riscrivere l'equazione alle differenze di ordine n

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^m b_i u(k-i) \quad (7.3)$$

con un sistema di n equazioni alle differenze del primo ordine. La differenza tra la (7.1) e la (7.2) sta nel fatto che la variabile indipendente u entra nell'equazione differenziale insieme alle sue derivate e quindi le variabili ausiliarie introdotte per la forma normale devono essere opportunamente modificate. La teoria della realizzazione raccoglie le tecniche che permettono di passare dalle rappresentazioni esterne a quelle interne preservando il legame ingresso-uscita.

7.2 Cenni di teoria della realizzazione

In questa sezione ci limiteremo a presentare due tecniche per la realizzazione di sistemi dinamici SISO, cioè in cui sia l'ingresso che l'uscita hanno dimensione uno: $\dim\{u\} = m = 1$ e $\dim\{y\} = p = 1$. Nel seguito ne verranno date l'estensioni al caso multidimensionale. Le due rappresentazioni di stato proposte anche se sono diversa nella rappresentazione interna, garantiscono lo stesso comportamento ingresso-uscita. Per motivi che saranno chiariti nei capitoli successivi, le due rappresentazioni sono dette forma canonica di controllo (Capitolo 8) e di osservazione (Capitolo 9).

7.2.1 Forma canonica di controllo

Deriveremo la forma canonica a partire dall'equazione alle differenze. Assumiamo che la (7.3) sia in forma normale, cioè con $n = m$ e $a_n = 1$ e che non ci siano poli e zeri coincidenti. In altre parole, la funzione di trasferimento $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ sia il rapporto di due polinomi coprimi di cui il denominatore monico. Abbiamo quindi

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

se $A(z), B(z) \in \mathbb{R}[z]$ con $\mathbb{R}[z]$ il corpo (field) dei polinomi in z con coefficienti reali, e

$$G(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

se $A(z^{-1}), B(z^{-1}) \in \mathbb{R}[z^{-1}]$ con $\mathbb{R}[z^{-1}]$ corpo (field) dei polinomi in z^{-1} con coefficienti reali. Utilizzeremo la seconda espressione in cui z^{-1} verrà considerato come l'elemento di ritardo unitario. Prima di iniziare è bene richiamare alcune forme in cui la funzione di trasferimento può comparire:

Modello a media mobile (<i>Moving average, MA</i>)	$y(t) = B(h^{-1})u(t)$ $Y(z) = B(z^{-1})U(z)$
Modello auto regressivo (<i>Auto Regressive, AR</i>)	$A(h^{-1})y(t) = u(t)$ $A(z^{-1})Y(z) = U(z)$
Modello auto regressivo a media mobile (<i>ARMA</i>)	$A(h^{-1})y(t) = B(h^{-1})u(t)$ $A(z^{-1})Y(z) = B(z^{-1})U(z)$

L'equazione alle differenze

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k)$$

si riscrive come

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) = b_0 u(k) + \sum_{i=1}^n b_i y(k-i)$$

Dalla

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k)$$

posso definire il segnale $v(k)$ come l'uscita di un modello auto-regressivo con polinomio $A(z^{-1})$,

$$v(k) \triangleq \frac{1}{A(z^{-1})}u(k).$$

Ritornando nel dominio del tempo, ottengo l'equazione alle differenze in cui compare solo il passato di $v(k)$, mentre l'ingresso compare solo all'istante k senza ritardi

$$A(z^{-1})v(k) = u(k) \quad \Rightarrow \quad v(k) = u(k) - \sum_{i=1}^n a_i v(k-i)$$

Definendo le variabili di stato $x_{n-i}(k)$ come

$$x_{n-i}(k) \triangleq z^{-i-1}v(k)$$

arrivo ad esprimere $v(k)$ come funzione dell'ingresso corrente $u(k)$ e delle n variabili di stato $x_i(k)$

$$v(k) = u(k) - a_1 \underbrace{z^{-1}v(k)}_{x_n(k)} - a_2 \underbrace{z^{-2}v(k)}_{x_{n-1}(k)} - \dots - a_{n-1} \underbrace{z^{-(n-1)}v(k)}_{x_2(k)} - a_n \underbrace{z^{-n}v(k)}_{x_1(k)}$$

Calcolando l'evoluzione di un passo delle $x_i(k)$, otteniamo le n equazioni alle differenze di ordine uno:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= z^{-n}v(k+1) = z^{-n}zv(k) = z^{-(n-1)}v(k) = x_2(k) \\ x_2(k+1) &= z^{-(n-1)}v(k+1) = z^{-(n-1)}zv(k) = z^{-(n-2)}v(k) = x_3(k) \\ &\vdots \\ x_i(k+1) &= x_{i+1}(k) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) \\ x_n(k+1) &= z^{-1}v(k+1) = z^{-1}zv(k) = v(k) \\ &= -a_1x_n(k) - a_2x_{n-1}(k) - \dots - a_{n-1}x_2(k) - a_nx_1(k) + u(k). \end{aligned}$$

Raccogliendo le variabili $x_i(k)$ nel *vettore di stato* $x(k)$

$$x(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

otteniamo

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Rimane da utilizzare la parte a media mobile della funzione di trasferimento. L'uscita in funzione di $v(k)$ vale

$$\begin{aligned} y(k) &= B(z^{-1})v(k) \\ &= \sum_{i=0}^n b_i v(k-i) \\ &= b_0 v(k) + b_1 z^{-1} v(k) + \dots + b_n z^{-n} v(k) \end{aligned}$$

e sostituendo le $v(k)$ con le variabili di stato, si arriva alla

$$\begin{aligned} y(k) &= b_0 [-a_1 x_n(k) - a_2 x_{n-1}(k) - \dots - a_{n-1} x_2(k) - a_n x_1(k) + u(k)] + b_1 x_n(k) + \dots + b_n x_1(k) \\ &= b_0 u(k) - b_0 [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1] x(k) + [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_1] x(k). \end{aligned}$$

Raccogliendo i termini comuni di ha infine:

$$y(k) = [(b_n - b_0 a_n) \ (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) \ \dots \ (b_1 - b_0 a_1)] x(k) + b_0 u(k)$$

Si è quindi dimostrato il risultato seguente.

Theorem 7.1 (Forma canonica di controllo di un sistema a tempo discreto). *La realizzazione in forma canonica di controllo del sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze*

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^n b_i u(k-i), \quad a_0 = 1$$

è dato dal modello di stato $\Sigma_c = \{A_c, B_c, C_c, D_c\}$ di ordine n

$$\begin{cases} x(t+1) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t) \end{cases}$$

in cui

$$\begin{aligned} A_c &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, B_c \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_c &\triangleq [(b_n - b_0 a_n) \ (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) \ \dots \ (b_1 - b_0 a_1)], D_c = b_0. \end{aligned}$$

Analogamente vale:

Theorem 7.2 (Forma canonica di controllo di un sistema a tempo continuo). *La realizzazione in forma canonica di controllo del sistema a tempo continuo descritto dall'equazione differenziale*

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k}, \quad a_n = 1$$

è dato dal modello di stato $\Sigma_c = \{A_c, B_c, C_c, D_c\}$ di ordine n

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t) \end{cases}$$

in cui

$$A_c \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B_c \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c \triangleq [(b_0 - b_n a_0) \quad (b_1 - b_n a_1) \quad \dots \quad (b_{n-1} - b_n a_{n-1})], D_c = b_n.$$

7.2.2 Forma canonica di osservazione

Partendo dall'equazione alle differenze

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) = b_0 u(k) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i)$$

ricaviamo l'uscita come somma dell'ingresso $u(k)$ (pesato da b_0) e da quello che rimane che definiamo come $x_1(k)$, i.e.

$$y(k) = b_0 u(k) + \underbrace{\sum_{i=1}^n b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i)}_{\triangleq x_1(k)}$$

$$= b_0 u(k) + x_1(k). \quad (7.4)$$

La variabile $x_1(k)$ sarà il primo componente del vettore di stato. Per capire la forma degli altri termini, valutiamo $x_1(k)$ al tempo $k+1$:

$$x_1(k+1) = \sum_{i=1}^n b_i u(k-i+1) - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i+1)$$

$$= b_1 u(k) - a_1 y(k) + \underbrace{\sum_{i=2}^n b_i u(k-i+1) - \sum_{i=2}^n a_i y(k-i+1)}_{\triangleq x_2(k)}$$

che ci permette di definire la seconda componente del vettore di stato. Sostituendo nell'equazione precedente l'espressione (7.4), si ha

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= b_1 u(k) - a_1 b_0 u(k) - a_1 x_1(k) + x_2(k) \\ &= -a_1 x_1(k) + x_2(k) + [b_1 - a_1 b_0] u(k). \end{aligned}$$

Procedendo ricorsivamente, si ottengono le altre equazioni alle differenze di ordine uno

$$x_i(k+1) = -a_i x_i(k) + x_{i+1}(k) + [b_i - a_i b_0] u(k).$$

definendo

$$x_{i+1}(k) \triangleq \sum_{i=i+1}^n b_i u(k-i+1) - \sum_{i=i+1}^n a_i y(k-i+1).$$

Particolare attenzione va riservata al caso $i+1 = n$; vale infatti

$$x_n(k) \triangleq b_n u(k-1) - a_n y(k-1)$$

e l'aggiornamento diventa

$$\begin{aligned} x_n(k+1) &= b_n u(k) - a_n y(k) \\ &= -a_n x_1(k) + [b_n - a_n b_0] u(k). \end{aligned}$$

in cui non c'è bisogno di definire ulteriori variabili di stato. Possiamo quindi scrivere il seguente modello di stato:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} b_1 - b_0 a_1 \\ b_2 - b_0 a_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \\ b_n - b_0 a_n \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] x(k) + b_0 u(k). \end{aligned}$$

La matrice di aggiornamento dello stato è in forma compagna. Per ricavare la forma canonica di osservazione dobbiamo fare un cambiamento di variabile definendo $x_{n-i} \rightarrow x_i$, mantenendo, per semplicità la stessa lettera per le componenti del vettore di stato. Con questa trasformazione si ottiene

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} b_n - b_0 a_n \\ b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \\ \vdots \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [0 \ \dots \ 0 \ 1] x(k) + b_0 u(k). \end{aligned}$$

Riassumendo

Theorem 7.3 (Forma canonica di osservazione di un sistema a tempo discreto). *La realizzazione in forma canonica di osservazione del sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze*

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^n b_i u(k-i), \quad a_0 = 1$$

è dato dal modello di stato $\Sigma_o = \{A_o, B_o, C_o, D_o\}$ di ordine n

$$\begin{cases} x(t+1) &= A_o x(t) + B_o u(t) \\ y(t) &= C_o x(t) + D_o u(t) \end{cases}$$

in cui

$$A_o \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, B_o \triangleq \begin{bmatrix} b_n - b_0 a_n \\ b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \\ \vdots \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix}$$

$$C_o \triangleq [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1], D_o = b_0.$$

Per i sistemi a tempo continuo vale:

Theorem 7.4 (Forma canonica di osservazione di un sistema a tempo continuo). *La realizzazione in forma canonica di osservazione del sistema a tempo continuo descritto dall'equazione differenziale*

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k}, \quad a_n = 1$$

è dato dal modello di stato $\Sigma_o = \{A_o, B_o, C_o, D_o\}$ di ordine n

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_o x(t) + B_o u(t) \\ y(t) &= C_o x(t) + D_o u(t) \end{cases}$$

in cui

$$A_o \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_2 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_n \end{bmatrix}, B_o \triangleq \begin{bmatrix} b_1 - b_0 a_1 \\ b_2 - b_0 a_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \\ b_n - b_0 a_n \end{bmatrix}$$

$$C_o \triangleq [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1], D_o = b_0.$$

7.2.3 Forma canonica di Markov

7.3 Rappresentazione ingresso-stato-uscita

Nella sezione precedente sono state presentate alcune tecniche basilari che permettono di legare la rappresentazione ingresso-uscita (equazioni differenziale/alle differenze o funzioni di trasferimento) con la rappresentazione ingresso-stato-uscita. Risulta evidente dalle forme canoniche presentate che il legame tra funzione di trasferimento e modello di stato non è univoco. Vedremo tra breve che ci sono infinite rappresentazioni di stato per la stessa funzione di trasferimento, alcune delle quali sono più utili per essere risolte in modo analitico (forma di Jordan) e altre per essere utilizzate nelle implementazioni pratiche (forma bilanciata) per le loro proprietà numeriche.

Essendo partiti da modelli dinamici lineari tempo-invarianti, abbiamo ottenuto delle rappresentazioni del tipo

$$\begin{cases} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con $\{A, B, C, D\}$ matrici costanti. In letteratura si trovano modelli più complicati che rispecchiano la stessa suddivisione del modello di stato in *equazione di stato* e *equazione di misura*:

Lineare tempo-invariante (LTI): $\begin{cases} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$

Lineare tempo-variante (LTV): $\begin{cases} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$

Non lineare tempo-invariante: $\begin{cases} x(t+1) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{cases}$

Non lineare tempo-variante: $\begin{cases} x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \end{cases}$

Una stessa suddivisione vale per i sistemi a tempo continuo.

Qualsiasi sia il tipo di modello, ci sono alcuni insiemi che si devono definire:

- l'insieme tempo \mathcal{T} : $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ nel caso di sistemi a tempo continuo e $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$;
- l'insieme degli ingressi \mathcal{U} , $u(t) \in \mathcal{U}, \forall t$. Il caso più semplice corrisponde a $\mathcal{U} = \mathbb{R}^p$;
- l'insieme delle funzioni di ingresso \mathcal{U}_f , e.g. spazio delle funzioni continue o continue a tratti per i sistemi continui, spazio delle funzioni sommabili per i sistemi discreti;
- l'insieme delle variabili di stato \mathcal{X} . Nel caso più semplice si ha $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, cioè ogni componente nel vettore di stato può assumere qualsiasi valore reale. Ci sono casi in cui \mathcal{X} è una varietà: ad esempio le componenti del vettore di stato appartengono ad una ipersfera;

- l'insieme delle uscite \mathcal{Y} ; e.g $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$.

Diamo ora la definizione formale di sistema dinamico a tempo continuo e discreto.

Definition 7.5 (Sistema dinamico).

Un sistema dinamico a tempo continuo è definito dagli insiemi

$$\{\mathbb{R}, \mathcal{U}, \mathcal{U}_f, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\},$$

da una funzione velocità

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

avente un'unica soluzione per ogni stato iniziale x_0 e ingresso ammissibile, e da una funzione di uscita

$$y(t) = g(x(t), u(t), t).$$

Un sistema dinamico a tempo discreto è definito dagli insiemi

$$\{\mathbb{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{U}_f, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\},$$

da una funzione stato futuro

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

e da una funzione di uscita

$$y(t) = g(x(t), u(t), t).$$

Siccome siamo principalmente interessati ai sistemi lineari, la definizione precedente viene declinata nel seguente modo:

Definition 7.6 (Sistema dinamico lineare).

Un sistema continuo è lineare se gli insiemi $\{\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{U}_f, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$ sono spazi vettoriali sullo stesso campo ($\mathcal{U} = \mathbb{R}^p$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$ nel caso di dimensione finita qui considerato) e la funzione f nella equazione di stato e la funzione g nell'equazione di misura dipendono linearmente dallo stato x e dall'ingresso ammissibile u per ogni istante t , i.e.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

nel caso tempo-variante, e

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

nel caso tempo-invariante.

Un sistema discreto è lineare se gli insiemi $\{\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{U}_f, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$ sono spazi vettoriali sullo stesso campo ($\mathcal{U} = \mathbb{R}^p$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$ nel caso di dimensione finita qui considerato) e la funzione f nella equazione di stato e la funzione g nell'equazione di misura dipendono linearmente dallo stato x e dall'ingresso ammissibile u per ogni istante t , i.e.

$$\begin{cases} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

nel caso tempo-variante, e

$$\begin{cases} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

nel caso tempo-invariante

Per i sistemi continui si assume \mathcal{U}_f uguale all'insieme delle funzioni continue a tratti con valori in \mathcal{U} .

Definition 7.7 (Stato). *Lo stato di un sistema dinamico è una vettore tempo variante tale che il suo valore $x(t_0)$ all'istante iniziale t_0 e la funzione di ingresso nell'intervallo $[t_0, t]$, $u|_{[t_0, t]}$, determinano univocamente la funzione di uscita $y|_{[t_0, t]}$.*

Un risultato analogo vale per ogni istante temporale t . Risulta quindi che nel vettore di stato è contenuta tutta e sola la storia passata del modello che permette di determinare l'evoluzione dell'uscita una volta nota la funzione di ingresso. Questa proprietà viene detta *proprietà di separazione*. Se la proprietà di separazione ci dice cosa è importante del passato, la proprietà di causalità ci dice cosa è importante del futuro.

Definition 7.8 (Causalità). *L'uscita y all'istante τ non dipende dai valori dell'ingresso u per $t > \tau$.*

Mentre l'equazione (o mappa) di uscita lega il valore corrente dello stato e dell'ingresso all'uscita in maniera algebrica, l'equazione di stato è una equazione dinamica che quindi ha delle proprietà estraneamente interessanti da aggiungere a quelle già menzionate.

Proposition 7.9. *Sia f la funzione velocità o stato futuro e ϕ la corrispondente funzione di transizione dello stato, cioè il suo integrale*

$$x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t]}(\cdot)), \quad t \geq t_0$$

ha le seguenti proprietà :

- (i) *orientazione temporale:* ϕ è definita per $t \geq t_0$ [ma non necessariamente per $t < t_0$]
- (ii) *consistenza*

$$x(t) = \phi(t, t, x(t), u|_{[t, t]}(\cdot)), \quad \forall t \geq t_0$$

- (iii) *causalità :*

$$\phi(t, t_0, x(t_0), u|_{[t, +\infty)}(\cdot)) \equiv \phi(t, t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t]}(\cdot))$$

- (iv) *composizione*

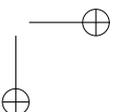
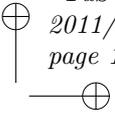
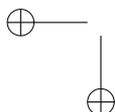
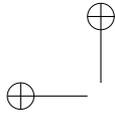
$$\phi(t, \tau, x(\tau), u|_{[\tau, t]}(\cdot)) = \phi(t, \sigma, \phi(\sigma, \tau, x(\tau), u|_{[\tau, \sigma]}(\cdot)), u|_{[\sigma, t]}(\cdot)), \tau \leq \sigma \leq t$$

- (v) *invarianza temporale:* per un sistema tempo-invariante vale

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \Leftrightarrow x(t + \tau) = \phi(t + \tau, t_0 + \tau, x_0, u_{\Delta}(\cdot))$$

dove

$$u_{\Delta}(t + \tau) \triangleq u(t), \forall t \geq t_0$$



- (vi) in un sistema tempo-invariante l'istante iniziale può essere assunto uguale a zero senza perdita di generalità
- (vii) in un sistema tempo-invariante le funzioni ϕ e γ dipendono solo da $t - t_0$.
- (viii) se il sistema è lineare vale la sovrapposizione degli effetti: detti

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \phi(t, t_0, x_{0,1}, u_1(\cdot)) \\x_2(t) &= \phi(t, t_0, x_{0,2}, u_2(\cdot))\end{aligned}$$

vale

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \phi(t, t_0, x_{0,1} + x_{0,2}, u_1(\cdot) + u_2(\cdot)).$$

p. 17 BM (caso generale) stati indistinguibili, equivalenti, sistema minimo, sistemi equivalenti, stato di equilibrio

7.4 Modelli di stato di sistemi LTI

Dopo aver dato qualche idea su come si possono descrivere i sistemi dinamici con la rappresentazione di stato, vogliamo ora ricavare per altra via quanto è stato ricavato utilizzando le equazioni differenziali (o le equazioni alle differenze) e le funzioni di trasferimento. Vogliamo cioè ottenere in funzione delle matrici $\{A, B, C, D\}$ del modello di stato le seguenti informazioni:

- evoluzione libera dello stato e dell'uscita,
- risposta impulsiva,
- evoluzione forzata dello stato e dell'uscita,
- funzione di trasferimento.

7.4.1 Evoluzione libera e forzata dello stato

Proposition 7.10 (Mappa di aggiornamento dello stato).

Dato un sistema LTI causale a tempo continuo definito attraverso la sua rappresentazione di stato con $x(0) = x_0$ stato iniziale in $t = 0$, la sua evoluzione libera e forzata sono date da

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= x_l(t) + x_f(t). \end{aligned}$$

Se l'istante iniziale è il generico t_0 si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= x_l(t) + x_f(t). \end{aligned}$$

Dato un sistema LTI causale a tempo discreto definito attraverso la sua rappresentazione di stato con $x(0) = x_0$ stato iniziale in $t = 0$, la sua evoluzione libera e forzata sono date da

$$\begin{aligned} x(k) &= A^kx(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(k) \\ &= x_l(k) + x_f(k) \end{aligned}$$

Se l'istante iniziale è il generico k_0 si ha

$$\begin{aligned} x(k) &= A^{k-k_0}x(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(k) \\ &= x_l(k) + x_f(k) \end{aligned}$$

Dimostrazione per sistemi a tempo continuo

Dimostriamo separatamente il teorema per l'evoluzione libera e per l'evoluzione forzata. Questo è possibile perché vale la sovrapposizione degli effetti essendo il sistema lineare.

Evoluzione libera:

Per dimostrare che $x_l(t) = e^{At}x(0)$ è l'evoluzione libera del sistema quando l'ingresso è nullo, dobbiamo verificare che $x_l(t)$ è soluzione del modello di stato

$$\Sigma_l : \begin{cases} \dot{x}_l(t) &= Ax_l(t) \\ x_l(0) &= x_0 \end{cases} \quad (7.5)$$

con $x_l \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Σ_l non è altro che un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine nelle incognite $x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$. Per procedere abbiamo bisogno della seguente definizione e dei successivi risultati sulle equazioni differenziali.

Definition 7.11 (Insieme fondamentale di soluzioni). *Le funzioni vettoriali $\phi_1(\cdot), \dots, \phi_n(\cdot)$, $\phi_i(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ sono un insieme fondamentale di soluzioni (o sistema fondamentale d'integrali) di Σ_l se le $\phi_i(\cdot)$ sono linearmente indipendenti.*

I due lemmi seguenti ci dicono come possiamo ricavare un insieme fondamentale di soluzioni e da questo tutte le possibili soluzioni al variare delle condizioni iniziali.

Lemma 7.12. *Per ottenere un insieme fondamentale di soluzioni è sufficiente considerare le n soluzioni corrispondenti a n stati iniziali linearmente indipendenti.*

Lemma 7.13. *Ogni soluzione della Σ_l è esprimibile come combinazione lineare di un insieme fondamentale di soluzioni.*

Consideriamo quindi come condizioni iniziali gli n vettori linearmente indipendenti e_i aventi 1 nella posizione i -esima e zero altrove. L'insieme fondamentale di soluzioni si otterranno risolvendo (7.5) con queste condizioni iniziali, cioè

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1(t) = A\phi_1(t) \\ \phi_1(0) = e_1 \end{cases}, \begin{cases} \dot{\phi}_2(t) = A\phi_2(t) \\ \phi_2(0) = e_2 \end{cases}, \dots, \begin{cases} \dot{\phi}_n(t) = A\phi_n(t) \\ \phi_n(0) = e_n \end{cases}$$

Siccome la condizione iniziale si può scrivere in maniera univoca come combinazione lineare della base $\{e_i\}$

$$x(0) = x_1(0)e_1 + \dots + x_n(0)e_n$$

abbiamo anche che

$$x_l(t) = x_1(0)\phi_1(t) + \dots + x_n(0)\phi_n(t).$$

Giustapponendo le n $\phi_i(t)$ otteniamo

$$x_l(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \dots & \phi_n(t) \end{bmatrix} x(0)$$

in cui la matrice

$$\Phi(t) \triangleq \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \dots & \phi_n(t) \end{bmatrix}$$

prende il nome di matrice di transizione dello stato in quanto ci dice il valore dello stato al tempo t come funzione delle condizioni iniziali $x_l(t) = \Phi(t)x(0)$. Come dimostreremo tra breve, $\Phi(t)$ ha una struttura particolarmente interessante essendo una matrice esponenziale.

Definition 7.14 (Matrice esponenziale). *Data la matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la matrice esponenziale di A indicata con e^{At} , $t \in \mathbb{R}$ è definita come*

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!}$$

Le matrice di transizione gode delle seguenti proprietà :

Lemma 7.15 (Proprietà della matrice di transizione dello stato). *La matrice di transizione dello stato ha le seguenti proprietà*

- (i) $\Phi(t)$ è soluzione della $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$,
- (ii) $\Phi(0) = I$
- (iii) $\Phi(t)$ è invertibile per ogni t
- (iv) $\Phi(t) = e^{At}$

Proof.

(i) $\dot{x}_l(t) = Ax_l(t)$, $\dot{x}_l(t) = \Phi(t)x(0)$, derivando

$$\dot{\Phi}(t)x(0) = A\Phi(t)x(0)$$

dovendo valere per ogni $x(0)$ segue, $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$.

(ii) valutando $\dot{x}_l(t) = \Phi(t)x(0)$ per $t = 0$ si ha

$$x(0) = x_l(t)|_{t=0} = \Phi(0)x(0)$$

da cui $\Phi(0) = I$.

(iii) si dimostra per assurdo: sia \bar{t} tale che $\Phi(\bar{t})$ è singolare. Esiste quindi $v \neq 0$ tale che

$$\Phi(\bar{t})v = 0$$

Siccome vale anche

$$x_l(\bar{t}) = \Phi(\bar{t})x(0)$$

si ha $x_l(\bar{t}) = 0$ per $x(0) = v$. Lo stesso risultato, $x_l(\bar{t}) = 0$, si ha anche per $x(0) = 0$. Per l'unicità della soluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, un tale v non può esistere. Quindi $\Phi(t)$ è non singolare per ogni t , i.e. $\Phi(t)$ è invertibile per ogni t .

(iv) Dalla definizione di matrice esponenziale si ha

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!}.$$

Si vuole dimostrare che $\Phi(t) = e^{At}$. Per far questo basta calcolare $\dot{\Phi}(t)$ e verificare che $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$

□

Possiamo quindi concludere che l'evoluzione libera ha proprio la forma $x_\ell(t) = e^{At}x(0)$.

Evoluzione forzata:

L'espressione per la risposta forzata

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

deriva dal seguente teorema più generale per la risoluzione di equazioni differenziali non omogenee che si basa sul metodo della variazione delle costanti di Lagrange.

Theorem 7.16. *La soluzione della equazione differenziale lineare non omogenea*

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x) \tag{7.6}$$

con condizioni iniziali nulle, $y(x_0) = 0$, esiste, è unica e vale

$$y = \int_{x_0}^x e^{\int_{\xi}^x f(\zeta) d\zeta} g(\xi) d\xi. \quad (7.7)$$

Particolarizzando questo risultato al nostro sistema

$$\Sigma_f : \begin{cases} \dot{x}_f(t) &= Ax_f(t) + Bu(t) \\ x_f(0) &= 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

abbiamo che $y \rightarrow x_f$, $x \rightarrow t$, $f(x) \rightarrow A$, $g(x) \rightarrow Bu(t)$, da cui

$$x_f(t) = \int_0^t e^{\int_{\tau}^t A d\zeta} Bu(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Si può anche facilmente verificare che l'espressione trovata è corretta derivando rispetto al tempo⁴ e sfruttando le proprietà della matrice esponenziale del lemma 7.15. Vale infatti:

$$\begin{aligned} \dot{x}_f(t) &= \int_0^t \frac{d}{dt} \left(e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) \right) d\tau + e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) \Big|_{\tau=t} - e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_0^t A e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Bu(t) - e^{At} Bu(0) \\ &= A \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Bu(t) \\ &= Ax_f(t) + Bu(t), \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la condizione che u è uguale a zero per $t \leq 0$. La presenza di impulsi in $t = 0$ richiede qualche accorgimento.

Dimostrazione per sistemi a tempo discreto

La derivazione dell'evoluzione libera e forzata per un sistema a tempo discreto nella sua rappresentazione di stato non richiede l'utilizzo di strumenti di analisi matematica ma si può ricavare calcolando esplicitamente l'andamento dell'uscita all'aumentare di k .

⁴

Theorem 7.17. Sia $f(x, t)$ una funzione continua da $X \times [a, b]$ in \mathbb{R} di cui esiste la derivata parziale rispetto a x , $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$, continua in $X \times]a, b[$. Siano $\alpha(x), \beta(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili in X con codominio $]a, b[$. La funzione

$$\phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt : X \rightarrow \mathbb{R}$$

è derivabile e per ogni $\bar{x} \in X$ vale

$$\phi'(\bar{x}) = \int_{\alpha(\bar{x})}^{\beta(\bar{x})} \frac{\partial f(\bar{x}, t)}{\partial x} dt + f(\bar{x}, t) \Big|_{t=\beta(\bar{x})} - f(\bar{x}, t) \Big|_{t=\alpha(\bar{x})}.$$

Data l'equazione di stato

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

con $x(0) = x_0$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\ &= Ax_0 + Bu(0) \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1) \\ &= A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1) \\ &\vdots \\ x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-1) \\ &= A^kx_0 + A^{k-1}Bu(0) + A^{k-2}Bu(1) + \dots + Bu(k-1).\end{aligned}$$

Introducendo il simbolo di sommatoria si arriva all'espressione che vale $\forall k \geq 0$

$$x(k) = A^kx_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu(i).$$

Risulta chiaro che la parte che dipende dalle condizioni iniziali definisce l'evoluzione libera

$$x_\ell(k) = A^kx_0,$$

mentre la parte che dipende solamente dall'ingresso definisce la risposta forzata

$$x_f(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu(i).$$

7.4.2 Evoluzione libera e forzata dell'uscita

L'evoluzione dell'uscita y si ricava direttamente dall'equazione di uscita

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (7.9)$$

sostituendo al posto di $x(t)$ la corrispondente espressione nella proposizione ?? . La suddivisione in evoluzione libera y_ℓ e forzata y_f discende direttamente da quella dello stato come mostrato nel seguente risultato che non richiede nessuna dimostrazione.

Proposition 7.18 (Mappa di aggiornamento dell'uscita).

Dato un sistema LTI causale a tempo continuo definito attraverso la sua rappresentazione di stato con $x(0) = x_0$ stato iniziale in $t = 0$, l'evoluzione dell'uscita è somma dell'evoluzione libera e forzata

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t).$$

dove:

$$y_\ell(t) = Ce^{At}x(0)$$

$$y_f(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).$$

Se l'istante iniziale è il generico t_0 si ha

$$y_\ell(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

$$y_f(t) = \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).$$

Dato un sistema LTI causale a tempo discreto definito attraverso la sua rappresentazione di stato con $x(0) = x_0$ stato iniziale in $k = 0$, l'evoluzione dell'uscita è somma dell'evoluzione libera e forzata

$$y(k) = y_\ell(k) + y_f(k).$$

dove:

$$y_\ell(k) = CA^kx(0)$$

$$y_f(k) = \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1}Bu(i) + Du(k).$$

Se l'istante iniziale è il generico k_0 si ha

$$y_\ell(k) = CA^{k-k_0}x(k_0)$$

$$y_f(k) = \sum_{i=k_0}^{k-1} CA^{k-i-1}Bu(i) + Du(k).$$

7.5 Matrice di transizione dello stato

Nella sezione precedente abbiamo incontrato l'esponenziale o la potenza della matrice A nel calcolo dell'evoluzione dello stato. In particolare nel calcolo dell'evoluzione libera queste matrici prendono il nome di matrice transizione dello stato:

Definition 7.19 (Matrice transizione dello stato per sistemi LTI).

Tempo continuo

$$\Phi(t, t_0) \triangleq e^{A(t-t_0)} = \Phi(t - t_0)$$

Tempo discreto

$$\Phi(k, k_0) \triangleq A^{k-k_0} = \Phi(k - k_0)$$

Queste matrici godono di alcune importanti proprietà che verranno impiegate nell'analisi dei modelli di stato.

Proposition 7.20 (Proprietà della matrice esponenziale). *La matrice esponenziale ha le seguenti proprietà*

- (i) e^{At} è non singolare $\forall t$
- (ii) $e^{At_1}e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_2}e^{At_1}$ (composizione)
- (iii) $e^{(A_1+A_2)t} = e^{A_1t}e^{A_2t} = e^{A_2t}e^{A_1t}$ se e solo se A_1 e A_2 commutano
- (iv) $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ (inversione)
- (v) $(e^{At})^T = e^{A^T t}$ (trasposizione)
- (vi) se v è autovettore di A rispetto all'autovalore λ , allora v è anche autovettore di e^{At} rispetto all'autovalore $e^{\lambda t}$
- (vii) $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$
- (viii) $T^{-1}e^{At}T = e^{T^{-1}ATt}$ (cambiamento di base)
- (ix) se A è diagonale di autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{allora } e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & & \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- (x) se A è diagonale a blocchi

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & & \\ 0 & A_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & A_h \end{bmatrix}, \quad \text{allora } e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 & & \\ 0 & e^{A_2 t} & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & e^{A_h t} \end{bmatrix}.$$

Non tutte le proprietà sopra riportate hanno un analogo nel caso a tempo discreto. Tra le più importanti è che mentre la matrice esponenziale è sempre non singolare, la non singolarità della matrice potenza dipende dalla singolarità o meno della matrice A .

Proposition 7.21 (Proprietà della matrice potenza). *La matrice potenza ha le seguenti proprietà*

- (i) $A^{k_1}A^{k_2} = A^{k_1+k_2} = A^{k_2}A^{k_1}$ (composizione)
- (ii) $A_1^k A_2^k = (A_1 A_2)^k = A_2^k A_1^k$ se e solo se A_1 e A_2 commutano
- (iii) $(A^k)^{-1} = A^{-k}$ se e solo se A è non singolare (inversione)
- (iv) $(A^k)^T = (A^T)^k$ (trasposizione)
- (v) $T^{-1}A^k T = (T^{-1}AT)^k$ (cambiamento di base)

(vi) se A è diagonale di autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{allora } A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & & \\ 0 & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

(vii) se A è diagonale a blocchi

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & & \\ 0 & A_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & A_h \end{bmatrix}, \quad \text{allora } A^k = \begin{bmatrix} A_1^k & 0 & & \\ 0 & A_2^k & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & A_h^k \end{bmatrix}.$$

7.6 Forma canonica di Jordan

Le proprietà delle matrici esponenziale e potenza permettono di calcolare esplicitamente l'evoluzione libera solo nel caso in cui la matrice è diagonalizzabile. In questo caso basta infatti calcolare la matrice di cambiamento di base che diagonalizza la matrice, calcolare l'esponenziale o la potenza, e poi ritornare nella base originaria:

1. trovate T tale che $\bar{A} = T^{-1}AT = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$,
2. calcolare l'esponenziale

$$e^{\bar{A}t} = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$$

o la potenza

$$\bar{A}^k = \text{diag}\{\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\},$$

3. tornare nella base originale

$$e^{At} = T \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\} T^{-1}.$$

o

$$A^k = T \text{diag}\{\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\} T^{-1}.$$

Nel caso in cui la matrice A non è diagonalizzabile, bisogna ricorrere a strumenti più raffinati del calcolo matrice come la matrice di Jordan.

Definition 7.22 (Forma di Jordan). Una matrice $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è in forma di Jordan se assume la forma diagonale a blocchi

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & & \\ 0 & J_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & J_s \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

dove ciascun blocco J_i è un miniblocco di Jordan

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \lambda_i & 1 \\ & & & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

con λ_i sono gli autovalori di J .

Attraverso un semplice cambiamento di ordine delle coordinate, è possibile ricondurre qualsiasi forma di Jordan alla sua versione *ordinate* definita come segue.

Definition 7.23 (Forma di Jordan ordinata). Una matrice $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è in forma di Jordan ordinata se assume la forma diagonale a blocchi

$$J = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 & 0 & & \\ 0 & \bar{J}_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & \bar{J}_r \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

con tanti blocchi \bar{J}_i quanti sono gli autovalori distinti di J . Ogni blocco \bar{J}_i assume la forma

$$\bar{J}_i = \begin{bmatrix} J_{i,1} & 0 & & \\ 0 & J_{i,2} & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & J_{i,s_i} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

dove ciascuna matrice sulla diagonale $J_{i,j}$ è un miniblocco di Jordan di dimensione decrescente.

L'importanza della forma di Jordan è dovuta al seguente teorema:

Theorem 7.24. Per ogni matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ esiste una matrice di cambiamento di base T tale che $J = T^{-1}AT$ è in forma di Jordan.

Per quanto osservato sopra esiste anche sempre una matrice di cambiamento di base tale che J è in forma di Jordan ordinata. Risulta infatti che due matrici di Jordan sono simili se e solo se si possono ottenere una dall'altra permutando i blocchi.

Prima di studiare le proprietà della matrice di Jordan è bene richiamare il procedimento per ottenere la matrice di cambiamento di base che porta una generica matrice A nella forma voluta. Innanzitutto una matrice non diagonalizzabile è caratterizzata dall'aver un numero di autovettori linearmente indipendenti strettamente più piccolo del numero di autovalori contati con la loro molteplicità. Data la matrice quadrata A , i suoi autovalori si ottengono dal suo polinomio caratteristico.

Definition 7.25 (Polinomio caratteristico). *Data una matrice quadrata A , il polinomio caratteristico di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è il polinomio di ordine n definito come*

$$\Delta_A(s) = \det(sI - A) = \det(A - sI). \quad (7.14)$$

Risulta quindi che il polinomio caratteristico può essere riscritto come

$$\Delta_A(s) = \prod_{i=1}^h (s - \lambda_i)^{n_i}$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ sono gli h autovalori distinti.

Definition 7.26 (Molteplicità algebrica). *Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ gli autovalori distinti della matrice A . Si definisce molteplicità algebrica n_i dell'autovalore λ_i la sua molteplicità come zero del polinomio caratteristico di A , $\Delta_A(z) = \det(zI - A)$.*

Prima di enunciare il meccanismo per determinare la matrice di cambiamento di base abbiamo bisogno di una ulteriore definizione.

Definition 7.27 (Autovettore generalizzato). *Data una matrice quadrata A e sia λ un suo autovettore. Il vettore v è un autovettore generalizzato di ordine m rispetto all'autovettore λ se*

$$(\lambda I - A)^m v = 0 \quad e \quad (\lambda I - A)^{m-1} v \neq 0.$$

Gli m vettori definiti nel seguente modo a partire dall'autovettore generalizzato v di ordine m :

$$\begin{aligned} w_1 &= (\lambda I - A)^{m-1} v \\ w_2 &= (\lambda I - A)^{m-2} v \\ &\vdots \\ w_j &= (\lambda I - A)^{m-j} v \\ &\vdots \\ w_{m-1} &= (\lambda I - A)v \\ w_m &= v \end{aligned}$$

definiscono una catena di autovettori generalizzati di lunghezza m .

Si può dimostrare che i vettori appartenenti ad una catena di autovettori generalizzati sono linearmente indipendenti. Riportiamo infine la definizione di molteplicità geometrica.

Definition 7.28 (Molteplicità geometrica). *Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ gli autovalori distinti della matrice A . Si definisce molteplicità geometrica s_i dell'autovalore λ_i la dimensione dell'autospazio $U_i = \ker(\lambda_i I - A)$.*

Nel caso in cui la matrice sia diagonalizzabile la molteplicità geometrica e quella algebrica coincidono.

SPERO DI NON AVER FATTO CASOTTO CON I PEDICLI...

Per determinare la matrice di cambiamento di base procediamo nel seguente modo:

1. Per ogni autovalore distinto λ_i determiniamo il più piccolo intero m_i per cui la seguente catena di sottospazi crescenti diventa stazionaria

$$\ker(A - \lambda_i I) \subsetneq \ker(A - \lambda_i I)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(A - \lambda_i I)^{m_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i+1}$$

La sequenza $\delta_1^i, \dots, \delta_j^i, \dots, \delta_{m_i}^i$ rappresenta la differenza di dimensione tra un sottospazio e il successivo relativi all'autovalore λ_i , i.e.

$$\begin{aligned} \delta_1^i &= \dim\{\ker(A - \lambda_i I)\} \\ \delta_2^i &= \dim\{\ker(A - \lambda_i I)^2\} - \dim\{\ker(A - \lambda_i I)\} \\ &\vdots \\ \delta_j^i &= \dim\{\ker(A - \lambda_i I)^j\} - \dim\{\ker(A - \lambda_i I)^{j-1}\} \\ &\vdots \\ \delta_{m_i}^i &= \dim\{\ker(A - \lambda_i I)^{m_i}\} - \dim\{\ker(A - \lambda_i I)^{m_i-1}\} \end{aligned}$$

Risulta quindi che

$$\delta_1^i + \delta_2^i + \dots + \delta_{m_i}^i = m_i.$$

Definiamo anche

$$\begin{aligned} U_{\lambda_i} &\triangleq \ker(A - \lambda_i I) \\ N_{\lambda_i} &\triangleq \ker(A - \lambda_i I)^{m_i} \end{aligned}$$

2. per ogni autovalore distinto λ_i , costruire le basi per gli sottospazi $\ker(A - \lambda_i I)^j$ per j che va da 1 a m_i nel seguente modo

$$\begin{aligned} \ker(A - \lambda_i I) &= \text{span} \left\{ v_{1,1}^i, \dots, v_{1,\delta_1^i}^i \right\} \\ \ker(A - \lambda_i I)^2 &= \text{span} \left\{ v_{1,1}^i, \dots, v_{1,\delta_1^i}^i, v_{2,1}^i, \dots, v_{2,\delta_2^i}^i \right\} \\ &\vdots \\ \ker(A - \lambda_i I)^j &= \text{span} \left\{ v_{1,1}^i, \dots, v_{1,\delta_1^i}^i, v_{2,1}^i, \dots, v_{2,\delta_2^i}^i, \dots, v_{j,1}^i, \dots, v_{j,\delta_j^i}^i \right\} \\ &\vdots \\ \ker(A - \lambda_i I)^{m_i} &= \text{span} \left\{ v_{1,1}^i, \dots, v_{1,\delta_1^i}^i, \dots, v_{m_i,1}^i, \dots, v_{m_i,\delta_{m_i}^i}^i \right\} \end{aligned}$$

Si aggiungono cioè vettori linearmente indipendenti da quelli già determinati passando da un sottospazio a quello successivo.

Dalla definizione precedente, risulta che $v_{m_i,1}^i, \dots, v_{m_i,\delta_{m_i}^i}^i$ sono i δ_{m_i} autovet-tori generalizzati relativi all'autovalore λ_i .

3. per ogni autovalore distinto λ_i , costruire la base cercata nel seguente modo
passo m_i

$$\mathcal{S}_{m_i}^i = \{v_{m_i,1}^i, \dots, v_{m_i,\delta_{m_i}^i}^i\}$$

passo $(m_i - 1)$

$$\mathcal{S}_{m_i-1}^i = \{v_{m_i-1,1}^i, \dots, v_{m_i-1,\delta_{m_i}^i}^i\} \cup \{v_{m_i-1,\delta_{m_i}^i+1}^i, \dots, v_{m_i-1,\delta_{m_i-1}^i}^i\}$$

dove

$$v_{m_i-1,j}^i = (A - \lambda_i I)v_{m_i,j}^i, \quad j = 1, \dots, \delta_{m_i}^i$$

e i vettori $v_{m_i-1,j}^i$, $j = \delta_{m_i}^i + 1, \dots, \delta_{m_i-1}^i$ sono scelti in modo da essere linearmente indipendenti dagli autovettori generalizzati di ordine $m_i - 1$ ottenuti da quelli di ordine m_i .

passo $(m_i - h)$

$$\mathcal{S}_{m_i-h}^i = \{v_{m_i-h,1}^i, \dots, v_{m_i-h,\delta_{m_i}^i}^i\} \cup \{v_{m_i-h,\delta_{m_i}^i+1}^i, \dots, v_{m_i-h,\delta_{m_i-h}^i}^i\}$$

dove

$$v_{m_i-h,j}^i = (A - \lambda_i I)v_{m_i-h+1,j}^i, \quad j = 1, \dots, \delta_{m_i-h+1}^i$$

e i vettori $v_{m_i-h,j}^i$, $j = \delta_{m_i-h+1}^i + 1, \dots, \delta_{m_i-h}^i$ sono scelti in modo da essere linearmente indipendenti dagli autovettori generalizzati di ordine $m_i - h$ ottenuti da quelli di ordine $m_i - h + 1$.

passo 1

$$\mathcal{S}_1^i = \{v_{1,1}^i, \dots, v_{1,\delta_2^i}^i\} \cup \{v_{1,\delta_2^i+1}^i, \dots, v_{1,\delta_1^i}^i\}$$

dove

$$v_{1,j}^i = (A - \lambda_i I)v_{2,j}^i, \quad j = 1, \dots, \delta_2^i$$

e i vettori $v_{1,j}^i$, $j = \delta_2^i + 1, \dots, \delta_1^i$ sono scelti in modo da essere linearmente indipendenti dagli autovettori generalizzati di ordine 1 ottenuti da quelli di ordine 2.

4. dalla $\sum_j \delta_j^i = m_i$ discende che per ogni autovalore distinto λ_i la base per l'autospazio generalizzato N_{λ_i} è dato dall'insieme dei vettori

$$\mathcal{S}^i = \mathcal{S}_1^i \cup \mathcal{S}_2^i \cup \dots \cup \mathcal{S}_{m_i}^i$$

5. Per ottenere la forma ordinata di Jordan per il blocco \bar{J}_i , i vettori indipendenti in \mathcal{S}^i devono essere ordinati secondo la lunghezza delle catene di autovettori generalizzati e in ordine inverso rispetto al quale sono stati ottenuti gli autovettori generalizzati:

$$\mathcal{B}^i = \mathcal{B}_{m_i}^i \cup \mathcal{B}_{m_i-1}^i \cup \dots \cup \mathcal{B}_1^i$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{m_i}^i &= \{v_{1,1}^i, v_{2,1}^i \dots, v_{m_i,1}^i\} \cup \\ &\quad \{v_{1,2}^i, v_{2,2}^i \dots, v_{m_i,2}^i\} \cup \\ &\quad \vdots \\ &\quad \{v_{1,\delta_{m_i}^i}, v_{2,\delta_{m_i}^i} \dots, v_{m_i,\delta_{m_i}^i}\} \cup \end{aligned}$$

contiene le catene di ordine m_i (a cui corrisponderanno i blocchi di Jordan relativi all'autovettore λ_i di dimensione più grande, i.e. m_i),

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{m_i-1}^i &= \{v_{1,\delta_{m_i}^i+1}^i, v_{2,\delta_{m_i}^i+1}^i \dots, v_{m_i-1,\delta_{m_i}^i+1}^i\} \cup \\ &\quad \{v_{1,\delta_{m_i}^i+2}^i, v_{2,\delta_{m_i}^i+2}^i \dots, v_{m_i-1,\delta_{m_i}^i+2}^i\} \cup \\ &\quad \vdots \\ &\quad \{v_{1,\delta_{m_i}^i-1}^i, v_{2,\delta_{m_i}^i-1}^i \dots, v_{m_i-1,\delta_{m_i}^i-1}^i\} \cup \end{aligned}$$

contiene le catene di ordine $m_i - 1$. Proseguendo a ritroso si arriva agli autovettori generalizzati di ordine uno:

$$\mathcal{B}_1^i = \{v_{1,\delta_1^i+1}^i, \dots, v_{1,\delta_1^i}^i\}$$

a cui corrispondono miniblocchi di Jordan di dimensione uno.

6. La matrice di cambiamento di base T che porta la matrice A nella forma di Jordan ordinata si ottiene giustapponendo i vettori in

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2 \cup \dots \cup \mathcal{B}^h$$

nell'ordine prestabilito.

Example 7.29 INSERIRE ■

Dai calcoli fatti finora possiamo concludere che:

- il valore della molteplicità geometrica s_i ci dice cioè quanti blocchi di Jordan ci sono relativi all'autovalore λ_i all'interno di \bar{J}_i ,
- l'indice m_i fornisce la dimensione del miniblocco di Jordan di dimensione più grande relativo all'autovalore λ_i .

- la molteplicità algebrica n_i dell'autovalore λ_i coincide con la dimensione del blocco \bar{J}_i

$$n_i = \sum_{j=1}^{s_i} \dim\{J_{i,j}\}$$

in cui vale anche $m_i = \dim\{J_{i,1}\}$ se i blocchi di Jordan $J_{i,j}$ sono ordinati in maniera decrescente all'interno di \bar{J}_i (forma di Jordan ordinata).

Definition 7.30 (Polinomio minimo). Data una matrice quadrata A con autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ si definisce polinomio minimo il prodotto

$$\psi_A(z) = \prod_{i=1}^h (zI - \lambda_i)^{m_i}. \quad (7.15)$$

dove gli m_1, \dots, m_h sono le dimensioni dei miniblocchi di Jordan più grandi relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_h$, i.e.

$$J_{1,1} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}, \quad \dots, \quad J_{h,1} \in \mathbb{R}^{m_h \times m_h}.$$

Abbiamo quindi dimostrato in maniera costruttiva il seguente risultato fondamentale da cui discende il corollario enunciato più sotto.

Theorem 7.31. Per qualsiasi matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, esiste una matrice cambiamento di base $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che A è simile ad una matrice in forma di Jordan (ordinata): $\exists T$ tale che $T^{-1}AT = J$.

Corollary 7.32. Due matrici simili hanno gli stessi autovalori con uguali molteplicità algebriche e geometriche.

Sfruttando infine le proprietà delle matrici esponenziali e potenza arriviamo al risultato che lega l'esponenziale (o la potenza) di una generica matrice A con quella di una matrice in forma di Jordan.

Proposition 7.33.

Sia T la matrice di cambiamento di base che porta la matrice A nella forma di Jordan $J = T^{-1}AT$. Allora vale

$$e^{At} = e^{T^{-1}JTt} = T^{-1}e^{Jt}T. \quad (7.16)$$

Sia T la matrice di cambiamento di base che porta la matrice A nella forma di Jordan $J = T^{-1}AT$. Allora vale

$$A^k = (T^{-1}JT)^k = T^{-1}J^kT, \quad k \in (\mathbb{Z}, \neq 0)$$

Il motivo di questo passaggio intermedio nella forma di Jordan è fondamentale perché l'esponenziale e la potenza di un blocco di Jordan si sanno calcolare in forma esplicita come enunciato nelle seguenti due proposizioni

Proposition 7.34 (Esponenziale del generico miniblocco di Jordan). *L'esponenziale del generico miniblocco di Jordan $J_{i,j}$ relativo all'autovalore λ_i di dimensione $s_{i,j}$ vale*

$$e^{J_{i,j}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{s_{i,j}-1}}{(s_{i,j}-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} \\ & & & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

per $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, e

$$e^{J_{i,j}t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{s_{i,j}-1}}{(s_{i,j}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & 0 & 1 & t \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

per $\lambda = 0$.

Proof. Per $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ si ha $J_{i,j} = (\lambda I + N)$ dove N è la matrice nilpotente

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $s_{i,j}$ è la dimensione del blocco $J_{i,j}$ si ha che $N^h = 0$, $h \geq s_{i,j}$. Le matrici λI e N commutano, quindi:

$$e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda I} e^{Nt}$$

dove $e^{\lambda I} = \text{diag}\{\{e^\lambda, \dots, e^\lambda\}\} = I e^\lambda$, mentre

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{t^2}{2!} N^2 + \dots + \frac{t^{(s_{i,j}-1)}}{(s_{i,j}-1)!} N^{(s_{i,j}-1)}$$

□

Proposition 7.35 (Potenza del generico miniblocco di Jordan). *La potenza k -esima del generico miniblocco di Jordan $J_{i,j}$ relativo all'autovalore λ_i di dimensione $s_{i,j}$ vale*

$$J_{i,j}^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} & \cdots & \binom{k}{s_{i,j}-1} \lambda_i^{k-s_{i,j}+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} & \cdots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} \\ & & & & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

per $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, e

$$J_{i,j}^k = \begin{bmatrix} \delta(k) & \delta(k-1) & \cdots & \delta(k-s_{i,j}+1) \\ 0 & \delta(k) & \delta(k-1) & \cdots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & \delta(k) & \delta(k-1) \\ & & & & 0 & \delta(k) \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

per $\lambda = 0$.

Proof. Per $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ si ha $J_{i,j}^k = (\lambda I + N)^k$ dove N è la matrice nilpotente

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $s_{i,j}$ è la dimensione del blocco $J_{i,j}$ si ha che $N^h = 0$, $h \geq s_{i,j}$. Usando la formula del binomio di Newton per il calcolo della potenza

$$(\lambda I + N)^k = \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} (\lambda I)^{k-h} N^h = \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} \lambda^{k-h} N^h$$

□

Proposition 7.36 (Modi distinti). *Il numero di modi distinti del blocco \bar{J}_i relativo all'autovalore λ_i è pari alla dimensione del miniblocco di Jordan più grande ($J_{i,1}$ se ordinati opportunamente) contenuto in \bar{J}_i (molteplicità geometrica). Il numero totale di modi distinti è pari a $\sum_{i=1}^h m_i$.*

Proposition 7.37 (Evoluzione libera). *L'evoluzione libera dello stato è combinazione lineare dei modi elementari della matrice A del sistema attraverso la matrice di cambiamento di base T e le condizioni iniziali x_0 .*

Lo studio condotto finora si lega perfettamente a quello fatto risolvendo le equazioni differenziali (o alle differenze). Mentre la corrispondenza nel caso continuo è evidente, nel caso a tempo discreto si può provare con calcoli algebrici che la famiglia dei modi elementari ottenuti dalla matrice di transizione del modello di stato

$$\lambda_i^k, \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1}, \dots, \binom{k}{\mu-1} \lambda_i^{k-\mu+1}$$

con $i = 1, \dots, h$ e $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq 0$, e la famiglia dei modi elementari ottenuti dalla funzione di trasferimento (o dalle equazione alle differenze)

$$\lambda_i^k, k\lambda_i^k, \dots, \frac{k^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \lambda_i^k$$

descrivono la stessa dinamica. Non c'è invece una immediata corrispondenza nel caso l'autovalore sia nullo.

Osservazione. Come nell'analisi dei modi dalle funzioni di trasferimento, anche per i modi ottenuti dalla matrice di transizione si può dire che per il modi relativi agli autovalori complessi coniugati

$$\begin{array}{ll} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t}, & \frac{t^k}{k!} e^{\bar{\lambda}_i t} & \text{tempo continuo} \\ \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j}, & \binom{k}{j} \bar{\lambda}_i^{k-j} & \text{tempo discreto} \end{array}$$

esistono le corrispondenti formulazioni reali:

$$\begin{array}{ll} \frac{t^k}{k!} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t), & \frac{t^k}{k!} e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t) & \text{tempo continuo} \\ \binom{k}{j} \rho^{k-j} \cos(\theta(k-j)), & \binom{k}{j} \rho^{k-j} \sin(\theta(k-j)) & \text{tempo discreto} \end{array}$$

I risultati precedenti permettono di arrivare per altra via alla caratterizzazione dei modi di un sistema partendo in questo caso dagli autovalori di una matrice.

Theorem 7.38 (Caratterizzazione dei modi).

Il modo elementare $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_i t}$ relativo all'autovalore λ_i della matrice A del sistema a tempo continuo Σ è

- (i) *convergente se e solo se $Re\{\lambda_i\} < 0$,*
- (ii) *limitato se e solo se $Re\{\lambda_i\} \leq 0$, e se $Re\{\lambda_i\} = 0$ deve essere $k = 0$,*
- (iii) *divergente negli altri casi.*

Il modo elementare $\binom{k}{j} \lambda_i^{k-j}$ relativo all'autovalore λ_i della matrice A del sistema a tempo discreto Σ è

- (i) *convergente se e solo se $|\lambda_i| < 1$,*
- (ii) *limitato se e solo se $|\lambda_i| \leq 1$, e se $|\lambda_i| = 1$ deve essere $j = 0$,*
- (iii) *divergente negli altri casi.*

I modi elementari associati all'autovalore nullo $\delta(k - j)$ sono sempre convergenti a zero in un numero finito di passi.

I risultati esposti finora permettono di calcolare esplicitamente la risposta libera dello stato e quindi dell'uscita. Anche la risposta forzata può essere espressa utilizzando la rappresentazione di stato passando, come nel caso delle equazioni differenziali o alle differenze, attraverso la nozione della risposta impulsiva.

Theorem 7.39 (Risposta all'impulso).

La risposta all'impulso δ di un sistema continuo lineare $\Sigma = \{A, B, C, D\}$ è data da

$$W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t). \quad (7.22)$$

La risposta all'impulso δ di un sistema discreto lineare $\Sigma = \{A, B, C, D\}$ è data da

$$W(k) = D\delta(k) + CA^k B \delta_{-1}(k - 1) = \begin{cases} D, & k = 0 \\ CA^k B, & k > 0. \end{cases} \quad (7.23)$$

Proof. Sia... p. 352 RP □

Osservazione Coefficienti di Markov:

$$m_0 = d$$

$$m_i = cA^{i-1}b$$

La risposta impulsiva è calcolabile in forma chiusa ricorrendo alla forma di Jordan per determinare esplicitamente l'esponenziale o la potenza della matrice A . Per ottenere la risposta forzata bisogna ancora passare attraverso l'integrale di convoluzione.

Theorem 7.40 (Risposta forzata).

La risposta forzata di un sistema continuo LTI $\Sigma = \{A, B, C, D\}$ è data da

$$y_f(t) = [W * u](t) = \int_0^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

dove $W(t)$ è la risposta impulsiva (7.22).

La risposta forzata di un sistema discreto LTI $\Sigma = \{A, B, C, D\}$ è data da

$$y_f(k) = [W * u](k) = \sum_{i=0}^k W(k - i)u(i)$$

dove $W(k)$ è la risposta impulsiva (7.23).

7.7 Rappresentazione ingresso-stato-uscita in s e z

Utilizzando la trasformata di Laplace e la trasformata Zeta è possibile esprimere l'evoluzione libera e forzata in s o in z . Per fare questo si utilizzano le stesse proprietà utilizzate in precedenza per le equazioni differenziali o le equazioni alle differenze

Nel seguito faremo le seguenti assunzioni sul modello di stato a tempo continuo (TC) e discreto (TD) rispettivamente:

A_{TC} : la funzione d'ingresso $u(t)$ ammette la trasformata di Laplace. Per la linearità del modello di stato questo implica che anche per lo stato $x(t)$ e l'uscita $y(t)$ si può calcolare la trasformata di Laplace. Nel seguito porremo:

$$U(s) \triangleq \mathcal{L}\{u(t)\}, \quad X(s) \triangleq \mathcal{L}\{x(t)\}, \quad Y(s) \triangleq \mathcal{L}\{y(t)\};$$

A_{TD} : la successione d'ingresso $u(k)$ ammette la trasformata Zeta. Per la linearità del modello di stato questo implica che anche per lo stato $x(k)$ e l'uscita $y(k)$ si può calcolare la trasformata Zeta. Nel seguito porremo:

$$U(z) \triangleq \mathcal{Z}\{u(k)\}, \quad X(z) \triangleq \mathcal{Z}\{x(k)\}, \quad Y(z) \triangleq \mathcal{Z}\{y(k)\}.$$

Proposition 7.41 (Evoluzione dello stato).

Se l'ipotesi A_{TC} è soddisfatta, la trasformata di Laplace dello stato si può scrivere come somma della trasformata di Laplace dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata

$$X(s) = X_\ell(s) + X_f(s)$$

dove

$$\begin{aligned} X_\ell(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) \\ X_f(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s). \end{aligned}$$

Se l'ipotesi A_{TC} è soddisfatta, la trasformata di Laplace dello stato si può scrivere come somma della trasformata di Laplace dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata

$$X(z) = X_\ell(z) + X_f(z)$$

dove

$$\begin{aligned} X_\ell(z) &= (zI - A)^{-1}zx(0) \\ X_f(z) &= (zI - A)^{-1}BU(z). \end{aligned}$$

Proof.

Modello a tempo continuo

Applicando la trasformata di Laplace all'equazione di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

si ottiene

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

dove si sono utilizzate le proprietà di linearità e di trasformata della derivata. Raccolgendo i termini comuni a $X(s)$ si arriva alla

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}x(0)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - A)^{-1}BU(s)}_{X_f(s)}$$

dove sono stati evidenziati le componenti relative all'evoluzione libera $X_\ell(s) = \mathcal{L}\{x_\ell(t)\}$ e forzata $X_f(s) = \mathcal{L}\{x_f(t)\}$.

Modello a tempo discreto

Applicando la trasformata Zeta all'equazione di stato

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

si ottiene

$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z)$$

dove si sono utilizzate le proprietà di linearità e di traslazione. Raccolgendo i termini comuni a $X(z)$ si arriva alla

$$X(z) = \underbrace{(zI - A)^{-1}zx(0)}_{X_\ell(z)} + \underbrace{(zI - A)^{-1}BU(z)}_{X_f(z)}$$

dove sono stati evidenziati le componenti relative all'evoluzione libera $X_\ell(z) = \mathcal{Z}\{x_\ell(k)\}$ e forzata $X_f(z) = \mathcal{Z}\{x_f(k)\}$. \square

Inserendo nell'equazioni di uscita

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

le corrispondenti trasformate per lo stato e l'ingresso, si ottengono immediatamente le trasformate dell'evoluzione dell'uscita come somma dell'evoluzione libera e forzata.

Proposition 7.42 (Evoluzione dell'uscita).

Se l'ipotesi A_{TC} è soddisfatta, la trasformata di Laplace dell'uscita si può scrivere come somma della trasformata di Laplace dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata

$$Y(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s)$$

dove

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x(0)$$

$$Y_f(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s).$$

Se l'ipotesi A_{TC} è soddisfatta, la trasformata di Laplace dell'uscita si può scrivere come somma della trasformata di Laplace dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata

$$Y(z) = Y_\ell(z) + Y_f(z)$$

dove

$$Y_\ell(z) = C(zI - A)^{-1}zx(0)$$

$$Y_f(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z).$$

Nella espressione per la risposta forzata si può ritrovare la definizione di funzione di trasferimento espressa in questo caso in funzione delle matrici $\{A, B, C, D\}$ del modello di stato. Nelle condizioni in cui stiamo lavorando, le funzioni di trasferimento

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \quad W(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

risultano razionali e proprie. Possiamo quindi scrivere l'inversa della matrice come

$$W(z) = C \frac{\text{adj}(zI - A)}{\det(zI - A)} B + D = C \frac{\text{adj}(zI - A)}{\Delta_A(z)} B + D$$

$$W(s) = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\Delta_A(s)} B + D$$

dove è stata introdotta la nozione di aggiunta adj. L'aggiunta di una matrice quadrata W si definisce come

$$\text{adj}(W) = [(-1)^{i+j} \det W_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}^T$$

dove W_{ij} è la matrice ottenuta da W togliendo la riga i -esima e la colonna j -esima. L'importanza di questo operatore discende dal fatto che se la matrice W ha rango pieno, la sua inversa si può scrivere come

$$W^{-1} = \frac{\text{adj}(W)}{\det(W)} = \frac{\text{adj}(W)}{\Delta_W}$$

in cui si è utilizzato anche il polinomio caratteristico della matrice W .

Arrivati a questo punto si possono legare gli autovalori della matrice A del modello di stato con i poli della corrispondente funzione di trasferimento

Proposition 7.43 (Autovalori e poli). *L'insieme dei poli della funzione di trasferimento con numeratore e denominatore coprimi sono contenuti nell'insieme degli autovalori della matrice A .*

Osservazione. L'Inversa di $(zI - A)$ vale

$$(zI - A)(z^{-1}I + z^{-2}A + z^{-3}A^2 + \dots) = I$$

7.7.1 Forma di Souriau

inversa della matrice

$$(zI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(zI - A)}{\det(zI - A)} = \frac{N_0 + N_1z + \dots + N_{n-1}z^{n-1}}{d_0 + d_1z + \dots + d_{n-1}z^{n-1} + z^n}$$

Remark. Forma di Souriau (p. 29 RP)

$$\begin{aligned} \text{adj}(zI - A) &= P_{n-1} + P_{n-2}z + \dots + P_1z^{n-2} + P_0z^{n-1} \\ \det(zI - A) &= \alpha_n + \alpha_{n-1}z + \dots + \alpha_1z^{n-1} + z^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_0 &= I & \alpha_1 &= -\text{Trace}\{P_0A\} \\ P_1 &= P_0A + \alpha_1I & \alpha_2 &= -\frac{1}{2}\text{Trace}\{P_1A\} \\ P_2 &= P_1A + \alpha_2I & \alpha_3 &= -\frac{1}{3}\text{Trace}\{P_2A\} \\ &\vdots & &\vdots \\ P_{n-1} &= P_{n-2}A + \alpha_{n-1}I & \alpha_n &= -\frac{1}{n}\text{Trace}\{P_{n-1}A\} \end{aligned}$$

□

Quindi

$$\begin{aligned} x_l(k+n) &= -\sum_{i=0}^{n-1} d_i x(k+i) \\ y_l(k+n) &= -\sum_{i=0}^{n-1} d_i y(k+i) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_f(k+n) &= \sum_{i=0}^{n-1} N_i B u(k+i) - \sum_{i=0}^{n-1} d_i x(k+i) \\ y_f(k+n) &= \sum_{i=0}^{n-1} C N_i B u(k+i) - \sum_{i=0}^{n-1} d_i y(k+i) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(e^{At}) = (sI - A)^{-1}$$

inversa della matrice

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(zI - A)} = \frac{N_0 + N_1z + \dots + N_{n-1}z^{n-1}}{d_0 + d_1z + \dots + d_{n-1}z^{n-1} + z^n}$$

Quindi

$$\sum_{i=0}^n d_i \frac{d^i x_l(t)}{dt^i} = 0, \quad t > 0$$

$$\sum_{i=0}^n d_i \frac{d^i y_l(t)}{dt^i} = 0, \quad t > 0$$

e

$$\sum_{i=0}^n d_i \frac{d^i x_f(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{n-1} N_i B \frac{d^i u(t)}{dt^i}, \quad t > 0$$

$$\sum_{i=0}^n d_i \frac{d^i y_f(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{n-1} C N_i B \frac{d^i u(t)}{dt^i}, \quad t > 0$$

7.8 Stabilità interna ed esterna

Stabilità interna = c.i. e ingresso nullo

Definition 7.44 (Asintoticamente stabile). *Il sistema LTI $\Sigma = \{A, B, C, D\}$ è asintoticamente stabile se l'evoluzione libera dello stato del sistema converge asintoticamente a zero per qualsiasi condizione iniziale.*

Definition 7.45 (Semplicemente stabile). *Il sistema LTI $\Sigma = \{A, B, C, D\}$ è Semplicemente stabile se l'evoluzione libera dello stato del sistema è una funzione/successione limitata per qualsiasi condizione iniziale.*

Proposition 7.46 (Asintotica stabilità).

Dato il sistema LTI a tempo continuo $\Sigma = \{A, B, C, D\}$, sono equivalenti:

- (i) Σ è asintoticamente stabile,
- (ii) tutti i modi elementari di A convergono a zero,
- (iii) gli autovalori di A hanno parte reale minore di 0,
- (iv) le radici del polinomio caratteristico $\Delta_A(z)$ hanno tutti parte reale minore di 0.

Dato il sistema LTI a tempo discreto $\Sigma = \{A, B, C, D\}$, sono equivalenti:

- (i) Σ è asintoticamente stabile,
- (ii) tutti i modi elementari di A convergono a zero,
- (iii) gli autovalori di A hanno tutti modulo minore di 1,
- (iv) le radici del polinomio caratteristico $\Delta_A(z)$ hanno tutti modulo minore di 1.

Proposition 7.47 (Semplice stabilità).

Dato il sistema LTI a tempo continuo $\Sigma = \{A, B, C, D\}$, sono equivalenti:

- (i) Σ è stabile,
- (ii) tutti i modi elementari di A sono limitati,
- (iii) gli autovalori di A hanno tutti parte reale minore o uguale a 0, e agli autovalori a parte reale nulla sono associati solo miniblocchi unitari,
- (iv) gli autovalori di A hanno tutti parte reale minore o uguale a 0, e gli autovalori a parte reale nulla sono radici semplici del polinomio minimo,
- (v) le radici del polinomio caratteristico $\Delta_A(s)$ hanno tutti parte reale minore o uguale a 0, e alle radici a parte reale nulla viene associato un singolo modo.

Dato il sistema LTI a tempo discreto $\Sigma = \{A, B, C, D\}$, sono equivalenti:

- (i) Σ è stabile,
- (ii) tutti i modi elementari di A sono limitati,
- (iii) gli autovalori di A hanno tutti modulo minore o uguale a 1, e agli autovalori di modulo unitario sono associati solo miniblocchi unitari
- (iv) gli autovalori di A hanno tutti modulo minore o uguale a 1, e gli autovalori di modulo unitario sono radici semplici del polinomio minimo,
- (v) le radici del polinomio caratteristico $\Delta_A(z)$ hanno tutti modulo minore o uguale a 1, e alle radici di modulo unitario viene associato un singolo modo.

Stabilità esterna = BIBO stabilità (c.i. nulle e si guarda alla risposta forzata)

Definition 7.48 (Stabilità BIBS). Il sistema lineare $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ è bounded input-bounded state (BIBS) stabile se $\forall t_0$ e $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che per $\|u(t)\| < \eta$, $t \geq t_0$ vale

$$\|x(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Theorem 7.49. Il sistema lineare $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ è bounded input-bounded state (BIBS) stabile se e solo se

$$\int_{t_0}^t \|V(t, \tau)\| d\tau \triangleq \int_{t_0}^t \|\Phi(t, \tau) B(\tau)\| d\tau \leq M < \infty, \forall t \geq t_0.$$

Proof. Sia... p. 102 BM □

Definition 7.50 (Stabilità BIBO). Il sistema lineare $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ è bounded input-bounded output (BIBO) stabile se $\forall t_0$ e $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che per $\|u(t)\| < \eta$, $t \geq t_0$ vale

$$\|y(t)\| = \|C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + D(t)u(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Theorem 7.51. Il sistema lineare $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ è BIBO stabile se e solo se

$$\int_{t_0}^t \|W(t, \tau)\| d\tau \triangleq \int_{t_0}^t \|C(\tau)\Phi(t, \tau)B(\tau)\| d\tau \leq M < \infty, \forall t \geq t_0.$$

Proof. Sia... p. 102 BM □

Proposition 7.52 (Stabilità esterna (BIBO)).

Dato il sistema LTI a tempo continuo $\Sigma = \{A, B, C, D\}$, sono equivalenti:

- (i) Σ è BIBO stabile,
- (ii) la risposta impulsiva del sistema $W(t)$ è sommabile in norma,
- (iii) la risposta impulsiva del sistema $W(t)$ ha tutte le componenti sommabili,
- (iv) tutti i modi elementari che compaiono nella $W(t)$ con coefficiente non nullo sono convergenti,
- (v) i poli della matrice di trasferimento $W(s)$ hanno tutti parte reale minore di 0,
- (vi) la ROC di $W(s)$ contiene l'asse immaginario $j\mathbb{R}$.

Dato il sistema LTI a tempo discreto $\Sigma = \{A, B, C, D\}$, sono equivalenti:

- (i) Σ è BIBO stabile,
- (ii) la risposta impulsiva del sistema $W(k)$ è sommabile in norma,
- (iii) la risposta impulsiva del sistema $W(k)$ ha tutte le componenti sommabili,
- (iv) tutti i modi elementari che compaiono nella $W(k)$ con coefficiente non nullo sono convergenti,
- (v) i poli della matrice di trasferimento $W(z)$ hanno tutti modulo minore di 1,
- (vi) la ROC di $W(z)$ contiene il cerchio unitario.

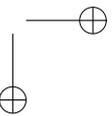
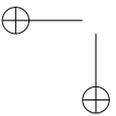
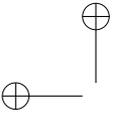
7.8.1 Risposta in frequenza

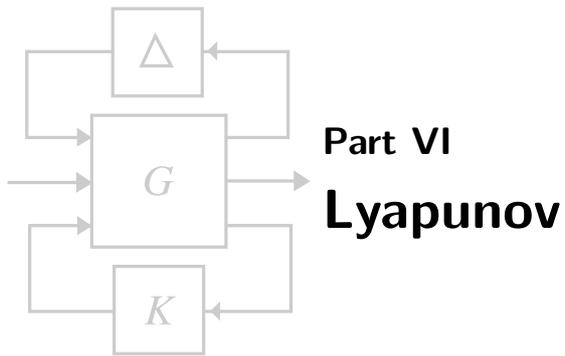
Se la ROC di $W(z)$ contiene il cerchio unitario

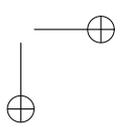
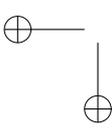
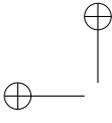
$$W(e^{j\omega}) = C(e^{j\omega}I - A)^{-1}B + D$$

Se la ROC di $W(s)$ contiene l'asse immaginario

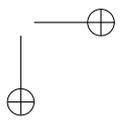
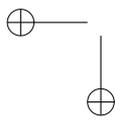
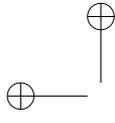
$$W(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B + D$$

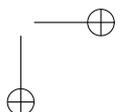
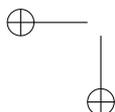
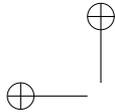


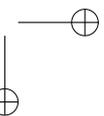
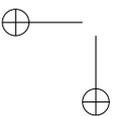
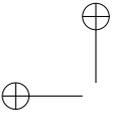


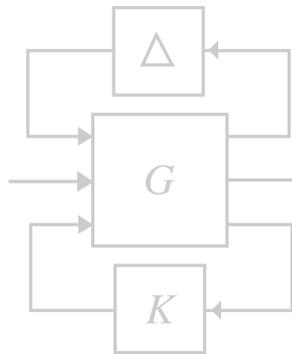












Chapter 8

Raggiungibilità e Retroazione dallo stato

Have you ever noticed? Anybody going slower than you is an idiot, and anyone going faster than you is a moron.

—George Carlin

In questo capitolo verranno introdotte alcune tecniche di controllo in retroazione a partire dai concetti di raggiungibilità e stabilizzabilità. La retroazione nello spazio di stato permette di modificare (quando è possibile) la posizione degli autovalori del sistema e quindi il suo comportamento dinamico.

8.1 Introduzione

8.2 Raggiungibilità dei sistemi lineari e discreti

ipotesi: $x(0) = 0$

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i) = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{k-1}B] \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Definition 8.1 (matrice di Raggiungibilità in k passi). *La matrice*

$$\mathcal{R}_k \triangleq [B \quad AB \quad \dots \quad A^{k-1}B]$$

si definisce matrice di Raggiungibilità in k passi.

Definition 8.2 (Sottospazio raggiungibile in k passi). *Al variare di $u(i)$, $i = 0, \dots, k-1$, l'insieme degli stati raggiungibili in k passi \mathcal{X}_k^R è definito come l'immagine della matrice \mathcal{R}_k*

$$\mathcal{X}_k^R = \text{Im} \{ \mathcal{R}_k \} (= \mathbb{R}^n).$$

Lemma 8.3 (Stato raggiungibile in k passi). *Uno stato $x \in \mathcal{X}$ è raggiungibile in k passi, i.e. $x \in \mathcal{X}_k$ se può essere espresso come combinazione lineare delle colonne di \mathcal{R}_k .*

catena di inclusioni e teorema di Cayley-Hamilton

$$\mathcal{X}_1^R \subseteq \mathcal{X}_2^R \subseteq \dots \subseteq \mathcal{X}_2^R \subseteq \dots \subseteq \mathcal{X}_n^R = \mathcal{X}_{n+1}^R = \dots \triangleq \mathcal{X}^R$$

Ogni stato raggiungibile lo è in al più n passi.

Definition 8.4 (Sottospazio raggiungibile). *Il sottospazio \mathcal{X}^R è detto sottospazio raggiungibile*

$$\mathcal{X}^R = \text{Im} \{ \mathcal{R} \}$$

dove

$$\mathcal{R} \triangleq [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

è la matrice di raggiungibilità della coppia (A, B) .

Definition 8.5 (Sistema raggiungibile). *Il sistema $\Sigma : \{A, B, \cdot, \cdot\}$ è raggiungibile se*

$$\mathcal{X}^R = \mathcal{X}.$$

Proposition 8.6 (CNeS). *Condizione necessaria e sufficiente perché Σ sia raggiungibile è che*

$$\text{rank} \{ \mathcal{R} \} = n.$$

Definition 8.7 (Indice di raggiungibilità). *Dato il sistema raggiungibile $\Sigma : \{A, B, \cdot, \cdot\}$, si definisce indice di raggiungibilità il più piccolo intero r per cui vale*

$$\text{rank} \{ [B \quad AB \quad \dots \quad A^{r-1}B] \} = n.$$

Proposition 8.8 (Sistema SI, matrice di Vandermonde). *Sistema SI con A diagonalizzabile.*

Theorem 8.9 (Caratterizzazione geometrica di \mathcal{X}^R). *Il sottospazio di raggiungibilità \mathcal{X}^R del sistema $\Sigma : \{A, B, \cdot, \cdot\}$ è il più piccolo sottospazio A invariante di \mathcal{X} contenente $\text{Im}\{B\}$.*

Proof. Assume that \square

$$\mathcal{X}^R = \langle A|B \rangle$$

Remark Caso generale

Definition 8.10 (Sistemi algebricamente equivalenti). *Due sistemi $\Sigma : \{A, B, C, D\}$ e $\bar{\Sigma} : \{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$ sono algebricamente equivalenti se esistono tre matrici non singolari T_x, T_u, T_y tali che*

$$\begin{aligned} \bar{A} &= T_x A T_x^{-1} \\ \bar{B} &= T_x A T_u^{-1} \\ \bar{C} &= T_y A T_x^{-1} \\ \bar{D} &= T_y A T_u^{-1}. \end{aligned}$$

\square

Proposition 8.11 (Equivalenza algebrica). *Sistemi algebricamente equivalenti hanno le stesse proprietà di raggiungibilità.*

Per sistemi SI e raggiungibili

$$T = \mathcal{R}\bar{\mathcal{R}}^{-1}$$

8.3 Controllabilità dei sistemi lineari e discreti

lo stato x_0 (o l'evento (t_0, x_0)) è controllabile a x_1

lo stato x_1 (o l'evento (t_1, x_1)) è raggiungibile da x_0

insieme degli stati raggiungibili all'istante t_1 a partire dall'evento (t_0, x_0)

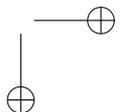
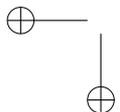
$$\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x_0) \triangleq \{x_1 : x_1 = (t_1, t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$$

insieme degli stati raggiungibili in un istante dell'intervallo $[t_0, t_1]$ a partire dall'evento (t_0, x_0)

$$\mathcal{W}^+(t_0, t_1, x_0) \triangleq \{x_1 : x_1 = (\tau, t_0, x_0, u(\cdot)), \tau \in [t_0, t_1], u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$$

insieme degli stati controllabili all'evento (t_1, x_1) a partire dall'istante t_0

$$\mathcal{R}^-(t_0, t_1, x_0) \triangleq \{x_0 : x_1 = (t_1, t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$$



insieme degli stati controllabili all'evento (t_1, x_1) a partire da un istante nell'intervallo $[t_0, t_1]$

$$\mathcal{W}^-(t_0, t_1, x_0) \triangleq \{x_0 : x_1 = (t_1, \tau, x_0, u(\cdot)), \tau \in [t_0, t_1], u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\}$$

$$\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x_0) \subseteq \mathcal{W}^+(t_0, t_1, x_0), \forall x \in \mathcal{X}$$

$$\mathcal{R}^-(t_0, t_1, x_0) \subseteq \mathcal{W}^-(t_0, t_1, x_0), \forall x \in \mathcal{X}$$

completamente raggiungibile $\Leftrightarrow \mathcal{W}^+(t_0, t_1, x) = \mathcal{X}, \forall x \in \mathcal{X}$

completamente controllabile $\Leftrightarrow \mathcal{W}^-(t_0, t_1, x) = \mathcal{X}, \forall x \in \mathcal{X}$

caso stazionario: $\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x_0) = \mathcal{R}^+(t_0 - t_1, x_0) = \mathcal{R}^+(t_1, x) = \mathcal{R}_{t_1}^+(x)$

completamente controllabile $\Leftrightarrow \mathcal{W}^+(x) = \mathcal{W}^-(x) = \mathcal{X}, \forall x \in \mathcal{X}$

Definition 8.12 (Stato controllabile in k passi). Dato il sistema discreto $\Sigma : \{A, B, \cdot, \cdot\}$, uno stato x è controllabile a zero in k passi se esiste una successione di ingresso $u(i), i = 0, \dots, k-1$, che porta Σ dallo stato x allo stato zero nell'intervallo $[0, k]$:

$$0 = A^k x + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i).$$

Proposition 8.13 (Condizione di controllabilità in k passi). Lo stato x è controllabile a zero in k passi se lo stato $-A^k x$ è raggiungibile in k passi

$$A^k x \in \mathcal{X}_k^R.$$

Definition 8.14 (Sottospazio controllabile in k passi). L'insieme \mathcal{X}_k^C degli stati che soddisfano la condizione

$$A^k x \in \mathcal{X}_k^R.$$

ha struttura di spazio vettoriale ed è chiamato sottospazio controllabile in k passi.

Definition 8.15 (Sistema controllabile in k passi). Il sistema discreto $\Sigma : \{A, B, \cdot, \cdot\}$ è controllabile in k passi se vale la

$$A^k x \in \mathcal{X}_k^R.$$

per ogni $x \in \mathcal{X}$, cioè se

$$\text{Im} \{A^k\} \subseteq \mathcal{X}_k^R.$$

Definition 8.16 (Sistema controllabile). Il sistema discreto $\Sigma : \{A, B, \cdot, \cdot\}$ è controllabile se l'intero spazio degli stati \mathcal{X} è controllabile in k passi per qualche valore di k .

Theorem 8.17 (Condizione di controllabilità). *Il sistema discreto $\Sigma : \{A, B, \cdot, \cdot\}$ è controllabile se e solo se vale la condizione di controllabilità*

$$\text{Im} \{A^n\} \subseteq \mathcal{X}^R,$$

cioè se è controllabile in n passi.

Proof. Assume that \square

Fatto: la raggiungibilità implica la controllabilità.

Proposition 8.18. *Dato il sistema discreto $\Sigma : \{A, B, \cdot, \cdot\}$. Se A è non singolare allora raggiungibilità e controllabilità sono equivalenti.*

Proof. Assume that \square

Proposition 8.19. *Per ogni k , il sottospazio raggiungibile in k passi ha dimensione minore o uguale del sottospazio controllabile in k passi.*

Proof. Assume that \square

8.4 Controllo dei sistemi discreti

Problema: trovare $u(i)$, $i = 0, \dots, k - 1$ che porti il sistema da $x(0)$ a $x(k)$
 CNeS: $x(k) - A^k x(0)$ raggiungibile dallo stato zero in k passi

$$x(k) - A^k x(0) \in \mathcal{X}_k^R.$$

Determinare $u(i)$, $i = 0, \dots, k - 1$

$$x(k) - A^k x(0) = \mathcal{R}_k \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$x(k) - A^k x(0) = \mathcal{R}_k \mathbf{u}$$

sistema lineare e non omogeneo in n equazioni e km incognite.
 Sistema omogeneo associato

$$0 = \mathcal{R}_k \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$x(k) - A^k x(0) = \mathcal{R}_k \mathbf{u}$$

Soluzione particolare

$$x(k) - A^k x(0) = (\mathcal{R}_k \mathcal{R}_k^T) \eta$$

con

$$\mathbf{u} = \mathcal{R}_k^T \eta$$

Nel caso di sistemi raggiungibili in k passi, \mathcal{R}_k ha rango n e $\mathcal{R}_k \mathcal{R}_k^T$ è invertibile.

$$\mathbf{u} = \mathcal{R}_k^T (\mathcal{R}_k \mathcal{R}_k^T)^{-1} (x(k) - A^k x(0))$$

8.5 Raggiungibilità dei sistemi lineari e continui

ipotesi: $x(0) = 0$ (evoluzione forzata)

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Definition 8.20 (Stato raggiungibile al tempo t). Uno stato x è raggiungibile al tempo t se esiste un ingresso $u(\cdot)$ tale che

$$x = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Operatore lineare R_t

$$R_t : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X} (= \mathbb{R}^n)$$

$$u(\cdot) \mapsto \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Proposition 8.21 (Condizione di raggiungibilità al tempo t). Lo stato x è raggiungibile al tempo t se e solo se $x \in \text{Im} \{R_t\}$.

Definition 8.22 (Sottospazio raggiungibile al tempo t). L'insieme degli stati raggiungibili al tempo t è chiamato sottospazio raggiungibile al tempo t ed vale

$$\mathcal{X}_t^R = \text{Im} \{R_t\}.$$

Trasformazione aggiunta

Siano \mathcal{V} e \mathcal{W} due spazi con prodotto interno

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle \mapsto \mathbb{R}$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle w_1, w_2 \rangle \mapsto \mathbb{R}$$

Il prodotto interno gode delle seguenti proprietà

1. bilinearità

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, v \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v \rangle$$

2. simmetria

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$$

3. positività

$$\langle v, v \rangle \geq 0$$

e $\langle v, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0$.

ESEMPIO SPAZIO VETTORIALE (prodotto scalare)

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} = (v_1)^T v_2$$

ESEMPIO SPAZIO DELLE FUNZIONI CONTINUE A TRATTI IN $[\tau, t]$

$$\langle u(\cdot), v(\cdot) \rangle_{\mathcal{U}} = \int_{\tau}^t u^T(\sigma) v(\sigma) d\sigma$$

Definition 8.23 (Operatore aggiunto). Siano \mathcal{V} e \mathcal{W} due spazi con prodotto interno e \mathcal{A} una trasformazione lineare

$$\mathcal{A} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}.$$

Si chiama aggiunta di \mathcal{A} la trasformazione lineare \mathcal{A}^*

$$\mathcal{A}^* : \mathcal{W} \mapsto \mathcal{V}.$$

tale che

$$\langle \mathcal{A}v, w \rangle_{\mathcal{W}} = \langle v, \mathcal{A}^*w \rangle_{\mathcal{V}}.$$

Se esiste è unica.

ESEMPIO SPAZIO VETTORIALE

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^m, \mathcal{W} = \mathbb{R}^p$$

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p (\mathcal{A} = A)$$

$$\mathcal{A}^* : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^m$$

$$\langle Av, w \rangle_{\mathbb{R}^p} = (Av)^T w = v^T A^T w = \langle v, A^T w \rangle_{\mathbb{R}^m}.$$

Quindi $A^* = A^T$.

ESEMPIO SPAZIO DELLE FUNZIONI CONTINUE A TRATTI IN $[\tau, t]$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathcal{U}, \mathcal{W} = \mathbb{R}^p \\ \mathcal{A} : \mathcal{U} &\mapsto \mathbb{R}^p(u(\cdot)) \mapsto \int_{\tau}^t \underbrace{M(\sigma)}_{\in \mathbb{R}^{p \times m}} u(\sigma) d\sigma \\ \mathcal{A}^* &: \mathbb{R}^p \mapsto \mathcal{U} \end{aligned}$$

$$\langle \mathcal{A}u(\cdot), w \rangle_{\mathbb{R}^p} = \left(\int_{\tau}^t M(\sigma) u(\sigma) d\sigma \right)^T w = \int_{\tau}^t u(\sigma)^T M(\sigma)^T w d\sigma = \langle u(\cdot), M(\cdot)^T w \rangle_{\mathcal{U}} = \langle u(\cdot), \mathcal{A}^* w \rangle_{\mathcal{U}}$$

Quindi $\mathcal{A}^* w = M(\cdot)^T w$.

■

Operatore aggiunto di R_t

$$\begin{aligned} R_t^* : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathcal{U} \\ x &\mapsto u(\sigma) = B^T e^{A^T(t-\sigma)} x, \quad \sigma \in [0, t] \end{aligned}$$

Dato che la dimensione di $\text{Im} \{R_t\}$ è finita, $\text{Im} \{R_t\} = \text{Im} \{R_t R_t^*\}$

Definition 8.24 (Gramiano di raggiungibilità). L'operatore $\mathcal{W}_t \triangleq R_t R_t^*$ è detto Gramiano di raggiungibilità

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_t : \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{X} \\ x &\mapsto \left\{ \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} u(\tau) d\tau \right\} x \end{aligned}$$

Lemma 8.25. Il sottospazio raggiungibile al tempo t è l'immagine della matrice simmetrica $\mathcal{W}_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Theorem 8.26. Il sottospazio raggiungibile al tempo t è l'immagine della matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B].$$

Proof. Proprietà dell'operatore aggiunto

$$\begin{aligned} \text{Im} \{R_t\} &= \ker R_t^{*\perp} \\ \text{Im} \{\mathcal{R}\} &= \ker \mathcal{R}^{T\perp} \end{aligned}$$

da cui dimostrare

$$\text{Im } \{\mathcal{R}\} = \text{Im } \{R_t\}$$

equivale a dimostrare che

$$\ker \mathcal{R}^{T\perp} = \ker R_t^{*\perp}$$

cioè

$$\ker \mathcal{R}^T = \ker R_t^*$$

Catena di equivalenze

$$\begin{aligned} x &\in \ker R_t^* \\ 0 &= B^T e^{A^T(t-\sigma)} x, \quad \sigma \in [0, t] \\ 0 &= B^T \sum_{i=0}^{+\infty} (A^T)^i \frac{(t-\sigma)^i}{i!} x, \quad \sigma \in [0, t] \\ 0 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(t-\sigma)^i}{i!} B^T (A^T)^i x, \quad \sigma \in [0, t] \\ 0 &= B^T (A^T)^i x, \quad i = 0, 1, \dots, +\infty \\ 0 &= {}^{(CH-th)} B^T (A^T)^i x, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 &= \begin{bmatrix} B^T \\ BA^T \\ \dots \\ B(A^T)^{n-1} \end{bmatrix} x. \\ x &\in \ker \begin{bmatrix} B^T \\ BA^T \\ \dots \\ B(A^T)^{n-1} \end{bmatrix} \\ x &\in \ker \mathcal{R}^T. \end{aligned}$$

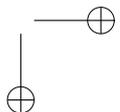
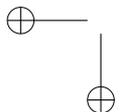
Theorem 8.27 (Teorema di Cayley Hamilton). *Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con determinante $\Delta_A(s) = \det\{sI - A\}$. Allora vale:*

$$\Delta_A(A) = 0.$$

□

Corollary 8.28. *Il sottospazio raggiungibile non dipende dalla lunghezza dell'intervallo $[0, t)$.*

Proposition 8.29 (Condizione di raggiungibilità). *Sono equivalenti:*



- (i) il sistema continuo Σ è raggiungibile
- (ii) $\text{Im}\{\mathcal{R}\} = \mathcal{X}$,
- (iii) $\ker \mathcal{R}^T = \{0\}$,
- (iv) $B^T e^{A^T t} x = 0, \forall t \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$ (indipendenza lineare delle righe della matrice $B^T e^{A^T t}$ o $e^{A^T t} B$)

Theorem 8.30. *In un sistema continuo il sottospazio di controllabile non dipende dall'intervallo in cui agisce il controllo e coincide con quello di raggiungibile.*

Proof. Assume that □

8.6 Controllo dei sistemi continui

Problema: trovare $u(\cdot)$, che porti il sistema da $x(0)$ a $x(t)$

CNES: $x(t) - e^{At}x(0)$ raggiungibile

$$x(t) - e^{At}x(0) \in \mathcal{X}^R.$$

Stati raggiungibili all'istante t a partire da $x(0)$

$$e^{At}x(0) + \mathcal{X}^R$$

$(\mathcal{X}/\mathcal{X}^R)$

Determinare $u(\cdot)$

$$x(t) - e^{At}x(0) = R_t u(\cdot)$$

Sistema omogeneo associato

$$0 = R_t u(\cdot)$$

Soluzione particolare

$$\mathcal{W}_t \eta = x(t) - e^{At}x(0)$$

con

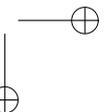
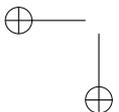
$$u(\cdot) = R_t^* \eta, \quad u(\sigma) = B^T e^{A^T(t-\sigma)} \eta, \sigma \in [0, t]$$

Nel caso di sistema raggiungibile, \mathcal{W}_t è invertibile.

8.7 Forma standard di raggiungibilità

$\dim\{\mathcal{X}^R\} = \rho < n$

$\exists T$ tale che



$$\begin{aligned}\bar{A} &= T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \\ \bar{B} &= T^{-1}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= CT = [\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2]\end{aligned}$$

Proposition 8.31. *Il sottosistema $\Sigma_1 = \{\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1\}$ di dimensione ρ è raggiungibile.*

Definition 8.32 (Sottosistema raggiungibile). *Il sottosistema $\Sigma_1 = \{\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1\}$ è il sottosistema raggiungibile e descrive integralmente la dinamica del sistema $\bar{\Sigma}$ quando $\bar{x}(0) \in \bar{\mathcal{X}}^R$, i.e. $\bar{x}_2(0) = 0$.*

Definition 8.33 (Sottosistema non raggiungibile). *Il sottosistema $\Sigma_2 = \{\bar{A}_{22}, 0, \bar{C}_2\}$ è il sottosistema non raggiungibile e la sua dinamica dipende solo da $\bar{x}_2(0)$.*

Theorem 8.34. *Le matrici di trasferimento dei sistemi Σ , $\bar{\Sigma}$ e Σ_1 coincidono.*

Proof. Assume that \square

\bar{A}_{11} rappresenta la restrizione di A al sottospazio A -invariante \mathcal{X}^R mentre \bar{A}_{22} rappresenta la trasformazione lineare indotta da F sul quoziente $\mathcal{X}/\mathcal{X}^R$.

Theorem 8.35 (Criterio PBH (Popov, Belevich e Hautus)). *Il sistema $\Sigma = \{A, B, C\}$ è raggiungibile se e solo se la matrice*

$$[A - pI|B] \tag{8.1}$$

ha rango pieno $\forall p \in \mathbb{C}$.

Proof. Assume that \square

Proposition 8.36 (Struttura di Jordan). *Sia dato il sistema $\Sigma = \{A, B, C\}$ con A in forma canonica di Jordan e B partizionata in modo conforme ai miniblocchi di Jordan. Σ è raggiungibile se e solo se per ciascun autovalore λ_i di A le ultime righe dei blocchi di B corrispondenti ai miniblocchi associati a λ_i sono linearmente indipendenti.*

Proof. Assume that \square

Proposition 8.37. *Sia dato il sistema $\Sigma = \{A, B, C\}$ non completamente raggiungibile. Gli autovalori di \bar{A}_{22} relativa al sottosistema non raggiungibile sono tutti e soli i valori di p in corrispondenza ai quali la matrice $[A - pI|B]$ non ha rango pieno.*

Proof. Assume that \square

8.8 Retroazione dallo stato

Ipotesi: $x(t)$ accessibile

$$u(t) = Kx(t) + v(t) \tag{8.2}$$

$$\Sigma_K : \begin{cases} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

Theorem 8.38 (Invarianza del sottospazio raggiungibile). *I sottospazi di raggiungibilità di Σ e Σ_K coincidono per ogni $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$. In particolare Σ_K è raggiungibile se e solo se Σ è raggiungibile.*

Proof. Assume that \square

Theorem 8.39 (Invarianza degli autovalori del sottospazio non raggiungibile). *Sia $\Sigma = \{A, B, C\}$ in forma standard di raggiungibilità. Allora anche Σ_K è in forma standard di raggiungibilità con la stessa A_{22} .*

Proof. Assume that \square

definizioni: relazione di equivalenza, classe di equivalenza, classi quoziente, invarianti per l'equivalenza algebrica.

8.9 Forma canonica di controllo per sistemi SI

Definition 8.40 (Forma canonica di controllo). *Dato un sistema SI $\Sigma = \{A, b, C\}$, si chiama forma canonica di controllo*

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \cdots & -d_{n-2} & -d_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Remark Forma canonica di Markov

Definition 8.41 (Forma canonica di Markov). Dato un sistema SI $\Sigma = \{A, b, C\}$, si chiama forma canonica di Markov

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \cdots & -d_{n-2} & -d_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b_M = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix}$$

$$C_M = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

dove i coefficienti di Markov m_i sono definiti come (p.34 RP)

$$\begin{aligned} m_1 &= \\ m_2 &= \\ &\vdots \\ m_n &= \end{aligned}$$

Theorem 8.42 (Forma canonica di controllo). Il sistema SI $\Sigma = \{A, b, C\}$ è raggiungibile se e solo se è algebricamente equivalente a un sistema $\Sigma = \{A_c, b_c, C_c\}$ in forma canonica di controllo.

Proof. Assume that \square

$$T = \mathcal{R} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_{n-1} & 1 \\ d_2 & d_3 & \cdots & 1 & 0 \\ d_3 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}$$

$$K_c = [k_0 \quad k_1 \quad \cdots \quad k_{n-1}]$$

$$\begin{aligned} u(t) &= K_c x_c(t) + v(t) \\ K_c T^{-1} T x_c(t) + v(t) \\ K x(t) + v(t) \end{aligned}$$

Theorem 8.43 (Allocazione degli autovalori per sistemi SI). *Dato il sistema $SI \Sigma = \{A, b, C\}$ raggiungibile di dimensione n . Per ogni polinomio monico $p(s)$ di grado n , esiste una matrice $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tale che il polinomio caratteristico di $A + bK$ è $p(s)$.*

Proof. Assume that \square

$$C_c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

SISO

$$W(s) = \frac{H_c \text{adj}(sI - A_c) g_c}{\det(sI - A_c)} \frac{\beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_{n-1} s^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \cdots + \alpha_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (8.3)$$

$$W_{K_c}(s) = \frac{H_c \text{adj}(sI - A_c - g_c K_c) g_c}{\det(sI - A_c - g_c K_c)} \frac{\beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_{n-1} s^{n-1}}{(\alpha_0 - k_0) + (\alpha_1 - k_1) s + \cdots + (\alpha_{n-1} - k_{n-1}) s^{n-1} + s^n} \quad (8.4)$$

Formula di Mayne-Murdoch (p. 245 FM)

Definition 8.44 (Matrice ciclica). *La matrice A è ciclica se esiste un vettore v tale che*

$$\{v, Av, \dots, A^{n-1}v\} \quad (8.5)$$

sono linearmente indipendenti.

Proposition 8.45. *Sono equivalenti:*

- (i) A è ciclica,
- (ii) $\exists b$ tale che (A, b) è raggiungibile,
- (iii) la forma di Jordan di A ha un solo miniblocco per ogni autovalore,
- (iv) $\Delta_A = \Psi_A$,
- (v) A ha solo un polinomio invariante Ψ_1 .

8.10 Lemma di Heymann

1. reazione della stato in modo da renderlo raggiungibile da una sola componente di v .
2. tecnica del paragrafo precedente.

Theorem 8.46 (Lemma di Heymann). *Dato il sistema $\Sigma = \{A, B, C\}$ con (A, B) raggiungibile e b_i colonna non nulla di B . Allora esiste una matrice $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $(A + BM_i, b_i)$ è raggiungibile.*

Proof. Assume that \square

$$K = M_i + \bar{K}$$

Theorem 8.47. *Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema $\Sigma = \{A, B, C\}$ sia raggiungibile è che al variare di K siano allocabili arbitrariamente gli autovalori di $A + BK$.*

Proof. Assume that \square

Osservazione: la raggiungibilità di (A, b) implica quella di $(A + bK, b)$ e quindi la ciclicità di $A + bK$. La matrice $A + bK$ ha così un solo polinomio invariante che coincide con quello con il polinomio minimo e caratteristico e che può essere reso arbitrario.

8.11 Teorema di Rosenbrock e Invarianti di controllo

Definition 8.48 (Invarianti di controllo). *Let*

Proposition 8.49 (Invarianza rispetto all'equivalenza algebrica e retroazione dallo stato). *Gli invarianti di controllo sono invarianti sia rispetto all'equivalenza algebrica che alla reazione dallo stato.*

Definition 8.50 (Polinomi invarianti). *Let*

Theorem 8.51 (Teorema di Rosenbrock). *Sia*

Proof. Assume that \square

8.12 Forma canonica di controllo per sistemi MI

La riduzione mediante reazione ad un sistema raggiungibile con un solo ingresso comporta che la matrice $A + BK$ che risolve il problema dell'allocazione, risulta sempre ciclica e quindi dotata di un solo polinomio invariante.

8.13 Stabilizzabilità

Definition 8.52 (Dead-beat controller). Una matrice K per cui $A + BK$ ha tutti nulli gli autovalori è detta *Dead-beat controller*.

- $\exists BDC \Leftrightarrow (A, B)$ è controllabile
- $\exists BDC \Leftarrow (A, B)$ è raggiungibile

Theorem 8.53. Sia $\Sigma = \{A, B, C\}$ un sistema discreto. Sono equivalenti:

- Σ è controllabile,
- il sottosistema non raggiungibile ha autovalori nulli,
- $\exists BDC$,
- la matrice $[zI - A|B]$ ha rango pieno per ogni z complesso, eccetto $z = 0$.

Proof. Assume that \square

Proposition 8.54. Sia $\Sigma = \{A, B, C\}$ un sistema discreto. Sono equivalenti:

- Σ è a memoria finita,
- $\exists m$ tale che $\Psi_A = s^m$,
- $\Delta_A = s^n$, dove $n = \dim A$,
- gli autovalori di A sono tutti nulli,
- A è nilpotente ($F^n = 0$).

Proof. Assume that \square

8.14 Approccio geometrico

8.14.1 Sistemi lineari continui

Theorem 8.55 (). Dato il sistema continuo tempo-variante, valgono:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^+(t_0, t_1, 0) &= \text{Im} \{P\}(t_0, t_1) \\ \mathcal{R}^-(t_0, t_1, 0) &= \Phi^{-1}(t_1, t_0) \text{Im} \{P\}(t_0, t_1) = \Phi(t_0, t_1) \text{Im} \{P\}(t_0, t_1) \end{aligned}$$

dove $P(t_0, t_1)$ denota la matrice simmetrica semidefinita positiva:

$$P(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1, \tau) d\tau.$$

Proof. p. 112 BM \square

completely controllable and completely reachable in $[t_0, t_1]$ iff $P(t_0, t_1)$ is non-singulare (strictly p.d.)

Theorem 8.56 (). Dato il sistema continuo tempo-variante, valgono:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^-(t_0, t_1, 0, 0) &= \ker Q(t_0, t_1) \\ \mathcal{Q}^+(t_0, t_1, 0, 0) &= \Phi(t_1, t_0) \ker Q(t_0, t_1) \end{aligned}$$

dove $Q(t_0, t_1)$ denota la matrice simmetrica semidefinita positiva:

$$P(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau.$$

Proof. p. 116 BM \square

LTI

Theorem 8.57. Dato il sistema CLTI. Il sottoinsieme raggiungibile dall'origine nell'intervallo $[0, t_1]$ si può esprimere come

$$\mathcal{R}_{t_1}^+(0) = \min \mathcal{J}(A, \mathcal{B})$$

dove $\min \mathcal{J}(A, \mathcal{B})$ è il più piccolo sottospazio A -invariante contenente $\mathcal{B} = \text{Im} \{B\}$.

Theorem 8.58. Dato il sistema CLTI. Il sottoinsieme controllabile all'origine coincide con il sottoinsieme raggiungibile dall'origine nell'intervallo $[0, t_1]$: $\mathcal{R}_{t_1}^-(0) = \mathcal{R}_{t_1}^+(0)$

$$\mathcal{R} \triangleq \min \mathcal{J}(A, \mathcal{B}) = \mathcal{R}_{t_1}^+(0) = \mathcal{R}_{t_1}^-(0) = \mathcal{W}_{t_1}^+(0) = \mathcal{W}_{t_1}^-(0)$$

Denote by $\mathcal{Q}_{t_1}^-(u(\cdot), y(\cdot))$ and $\mathcal{Q}_{t_1}^+(u(\cdot), y(\cdot))$ the sets of all initial and final states compatible with input function $u(\cdot)$ and output function $y(\cdot)$ in $[0, t_1]$, also called the unobservable set and the unreconstructable set in $[0, t_1]$ with respect to the given input and output functions.

Theorem 8.59. Dato il sistema CLTI. Il sottoinsieme non osservabile con ingresso nullo nell'intervallo $[0, t_1]$ si può esprimere come

$$\mathcal{Q}_{t_1}^-(0) = \max \mathcal{J}(A, \mathcal{C})$$

dove $\max \mathcal{J}(A, \mathcal{B})$ è il più grande sottospazio A -invariante contenuto in $\mathcal{C} = \ker C$.

The zero-input unreconstructable set in $[0, t_1]$ is equal to the zero-input unobservable set $\mathcal{Q}_{t_1}^+(0, 0) = \mathcal{Q}_{t_1}^-(0, 0)$

$$\mathcal{Q} \triangleq \max \mathcal{J}(A, \mathcal{C})$$

unobservability subspace.

8.14.2 Sistemi lineari discreti

Theorem 8.60 (). Dato il sistema discreto tempo-variante, valgono:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^+(t_0, t_1, 0) &= \text{Im} \{P\}(t_0, t_1) \\ \mathcal{R}^-(t_0, t_1, 0) &= \Phi^{-1}(t_1, t_0) \text{Im} \{P\}(t_0, t_1) \end{aligned}$$

dove $P(t_0, t_1)$ denota la matrice simmetrica semidefinita positiva:

$$P(t_0, t_1) = \sum_{k=t_0}^{t_1-1} \Phi(t_1, k+1) B(k) B^T(k) \Phi^T(t_1, k+1)$$

$$u(k) = B^T(k) \Phi^T(t_1, k+1) P^+(t_0, t_1) x_2, \quad k \in [t_0, t_1 - 1]$$

con $x_2 = x_1 - \Phi(t_0, t_1) x_0$

completely controllable and completely reachable in $[t_0, t_1]$ iff $P(t_0, t_1)$ is non-singolare (strictly p.d.)

Theorem 8.61 (). Dato il sistema discreto tempo-variante, valgono:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^-(t_0, t_1, 0, 0) &= \ker Q(t_0, t_1) \\ \mathcal{Q}^+(t_0, t_1, 0, 0) &= \Phi(t_1, t_0) \ker Q(t_0, t_1) \end{aligned}$$

dove $Q(t_0, t_1)$ denota la matrice simmetrica semidefinita positiva:

$$P(t_0, t_1) = \sum_{k=t_0}^{t_1} \Phi^T(k, t_0) C^T(k) C(k) \Phi(k, t_0).$$

Proof. p. 116 BM \square

$$\begin{aligned} x_0 &= Q^+(t_0, t_1) \sum_{k=t_0}^{t_1} \Phi^T(k, t_0) C^T(k) y_0(k) \\ y_0(k) &= y(k) - y_f(k) \end{aligned}$$

LTI

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \mathcal{R}^+ \triangleq \min \mathcal{J}(A, \mathcal{B}) \\ \mathcal{R}^- &\triangleq A^{-n} \min \mathcal{J}(A, \mathcal{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \mathcal{Q}^-(0, 0) \triangleq \max \mathcal{J}(A, \mathcal{C}) \\ \mathcal{Q}^+(0, 0) &\triangleq A^n \max \mathcal{J}(A, \mathcal{C}) \end{aligned}$$

unobservability, unreconstructable subspace.

Algorithm 8.1. the minimal A-invariant containing $\text{Im}\{B\}$.

Il sottospazio $\min \mathcal{J}(A, \mathcal{B})$ coincide con l'ultimo termine della sequenza

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \mathcal{B} \\ \mathcal{Z}_i &= \mathcal{B} + A\mathcal{Z}_{i-1} \end{aligned}$$

per $i = 1, \dots, k$ dove il valore di k è determinato dalla condizione $\mathcal{Z}_{k+1} = \mathcal{Z}_k$

Corollary 3.4.1 Pair (A, B) is stabilizable if and only if $\mathcal{R} := \min \mathcal{J}(A, B)$ is externally stable.

Dualità

Algorithm 8.2. the maximal A-invariant contained $\ker B$.

Il sottospazio $\max \mathcal{J}(A, \mathcal{C})$ coincide con l'ultimo termine della sequenza

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \mathcal{C} \\ \mathcal{Z}_i &= \mathcal{C} \cap A^{-1}\mathcal{Z}_{i-1} \end{aligned}$$

per $i = 1, \dots, k$ dove il valore di k è determinato dalla condizione $\mathcal{Z}_{k+1} = \mathcal{Z}_k$

Corollary 3.4.2 Pair (A, C) is detectable if and only if $\mathcal{Q} := \max \mathcal{J}(A, C)$ is internally stable.

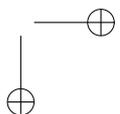
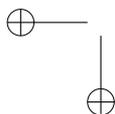
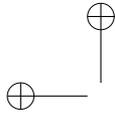
1. $\min \mathcal{J}(A, B) = \min \mathcal{J}(A + BF, B)$ (state feedback does not influence controllability); 2. $\max \mathcal{J}(A, C) = \max \mathcal{J}(A + GC, C)$ (output injection does not influence observability).

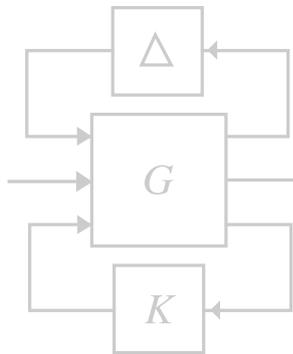
On the other hand, state feedback can influence observability and output injection can influence controllability

p. 145 Chen

cccccccccccccccccccc

There are four methods that can be used to determine if a system is reachable or not:

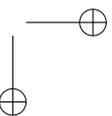
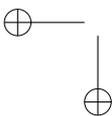
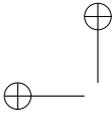


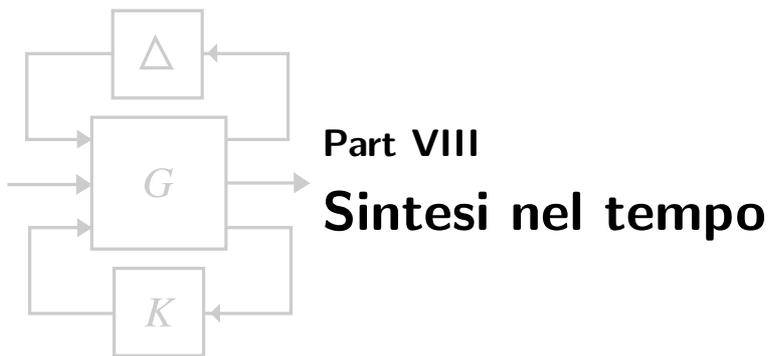


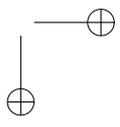
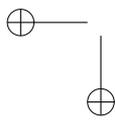
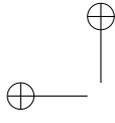
Chapter 9

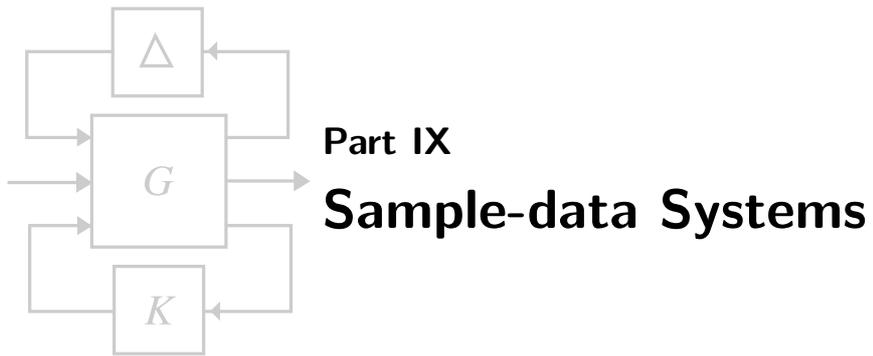
Osservabilità e Stima dello stato

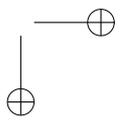
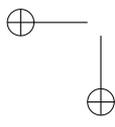
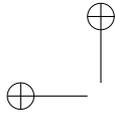
We have nothing to fear but fear itself.
—Franklin D. Roosevelt

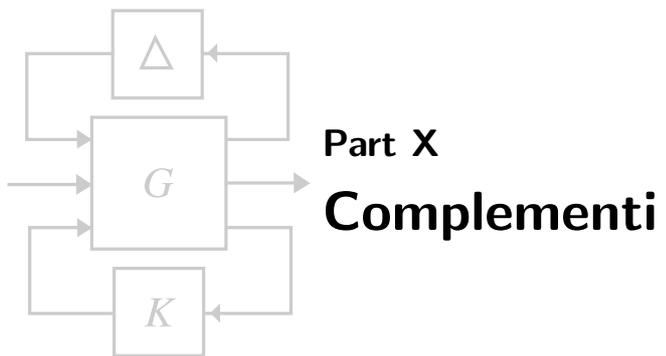


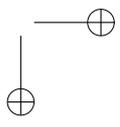
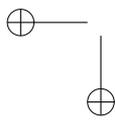
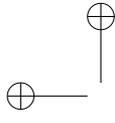












Bibliography

- [1] G. H. GOLUB AND C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations*, Second ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1989.

Index

Controllo Feedforward, 90
Controllore PID, 78
Controllori PID a tempo discreto, 90

Filtro Notch, 90

Iterative Feedback Tuning, 89

Predittore di Smith, 90
Principio del Modello Interno, 90

Sample
 file, 7, 29, 57, 59, 61, 77, 95, 139,
 159
Schema anti wind-up, 90

Taratura di Cohen-Coon, 89
Taratura di Ziegler-Nichols
 in anello aperto, 89
 in anello chiuso, 88