$$W_{1,2} = \frac{G_3 G_2}{1 - G_3 G_2} = \frac{\dfrac{2}{s+4}}{1 - \dfrac{2}{s+4}} = \frac{2}{s+2}.$$

Una volta determinata la matrice di trasferimento è anche possibile determinare la risposta forzata che consegue ad un ingresso assegnato mediante le trasformate di Laplace.

Esempio 7.13 Per il sistema studiato nell'Esempio 7.12 si desidera determinare l'uscita forzata che consegue all'applicazione dell'ingresso

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{-1}(t) \\ e^{-2t}\delta_{-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Le trasformate di Laplace delle due componenti del segnale in ingresso valgono:

$$U_1(s) = \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s} \qquad \text{e} \qquad U_2(s) = \mathcal{L}[e^{-2t}\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s+2}.$$

La matrice di trasferimento è stata determinata nell'Esempio 7.12 e vale

$$\boldsymbol{W}(s) = \begin{bmatrix} W_{1,1}(s) & W_{1,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Dunque la trasformata della risposta forzata vale

$$\begin{aligned} Y(s) &= \boldsymbol{W}(s)\boldsymbol{U}(s) = W_{1,1}(s)U_1(s) + W_{1,2}(s)U_2(s) \\ &= \frac{3}{s(s+1)(s+2)} + \frac{2}{(s+2)^2} = \frac{1.5}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1.5}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}, \end{aligned}$$

e antitrasformando

$$y(t) = \left(1.5 - 3e^{-t} + 1.5e^{-t} + 2te^{-2t}\right)\delta_{-1}(t).$$

7.2.3 Algebra degli schemi a blocchi [*]

Una tecnica alternativa a quella presentata nel paragrafo precedente per il calcolo della funzione di trasferimento di sistemi interconnessi si basa sulle regole dell'*algebra degli schemi a blocchi*. Tali regole sono basate sulla determinazione di *schemi a blocchi equivalenti* a quello di partenza, ossia schemi a blocchi che hanno le stesse grandezze di ingresso e di uscita, ma diverse grandezze intermedie.

Tali regole sono riassunte schematicamente nelle Fig. 7.16 e 7.17. In particolare, in Fig. 7.16 sono riportati i vari casi possibili che hanno origine dallo spostamento di un blocco moltiplicatore rispetto ad un altro moltiplicatore (caso a), rispetto ad un sommatore (casi b-c) e rispetto ad un punto di diramazione (d-e). I più

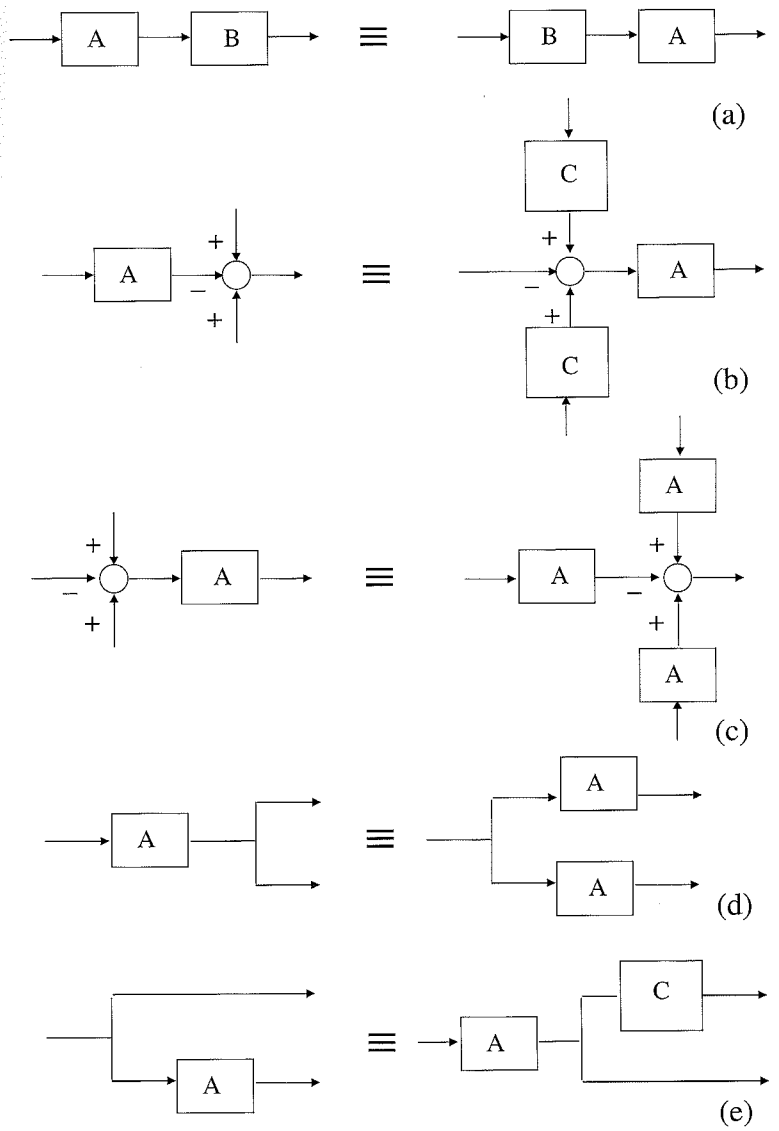

Fig. 7.16. Schemi a blocchi equivalenti che hanno origine dallo spostamento di un blocco moltiplicatore

rappresentativi casi possibili che hanno invece origine dallo spostamento di un nodo sommatore sono riportati in Fig. 7.17.

Costruendo successivamente una opportuna serie di schemi a blocchi equivalenti che siano rispettosi delle regole schematicamente riassunte nelle Fig. 7.16 e 7.17, e usando le regole di semplificazione dei collegamenti elementari, è facile de-

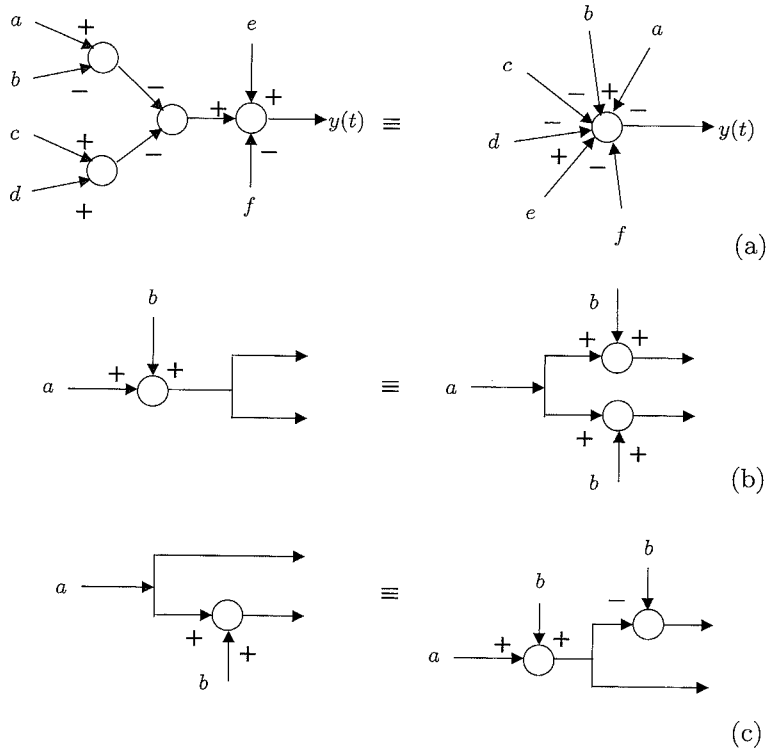

Fig. 7.17. Schemi a blocchi equivalenti che hanno origine dallo spostamento di un nodo sommatore

terminare la funzione di trasferimento del sistema complessivo a partire da quelle dei componenti.

Esempio 7.14 Si consideri il sistema SISO rappresentato in Fig. 7.18.a. Applicando le regole di equivalenza sopra esposte è facile costruire gli schemi a blocchi equivalenti riportati nella stessa Fig. 7.18 e determinare quindi la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$ mostrata in Fig. 7.18.d. Con semplici passaggi algebrici tale funzione può anche essere posta nella forma più semplice

$$W(s) = \frac{(G_1G_2 + G_3)G_4G_5}{1 + G_5H_1 - (1 - H_2)G_2G_4G_5}.$$ ◇

Nel caso di sistemi MIMO, con la stessa tecnica può determinarsi la singola funzione di trasferimento $W_{i,j}(s)$ tra l'ingresso $u_j(t)$ e l'uscita $y_i(t)$: occorre in tal caso supporre che tutti gli ingressi $u_k(t)$ per $k \neq j$ siano nulli, riconducendosi al caso SISO. Il seguente esempio chiarirà come si può procedere in tal senso.

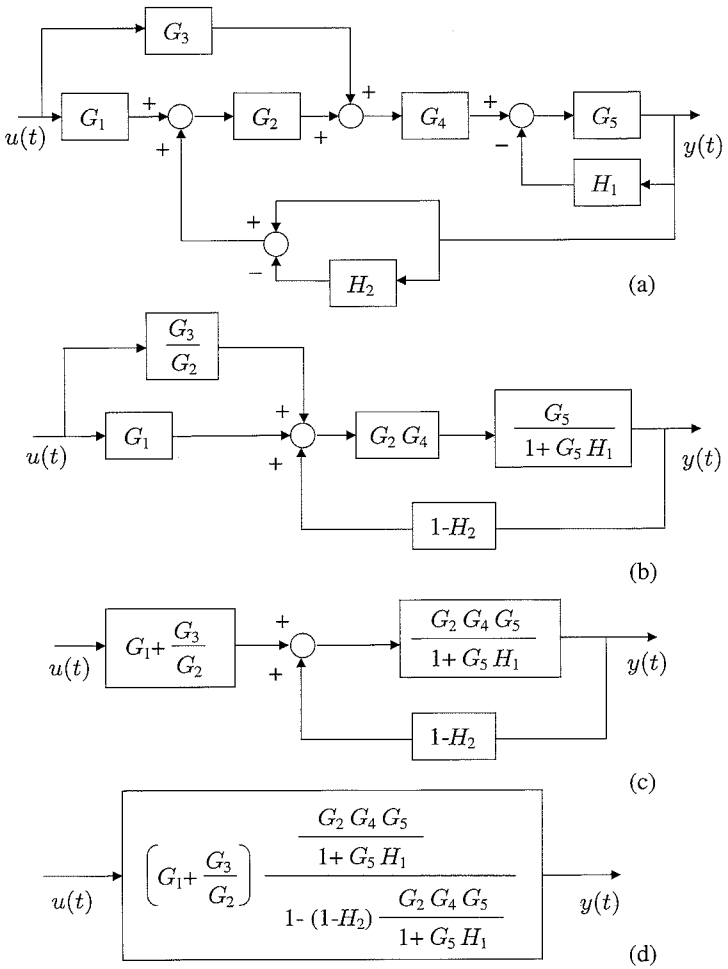

Fig. 7.18. Schemi a blocchi equivalenti nell'Esempio 7.14

Esempio 7.15 Si consideri il sistema MIMO con due ingressi e una uscita in Fig. 7.14 già studiato nell'Esempio 7.12 dove

$$Y(s) = \boldsymbol{W}(s)\boldsymbol{U}(s) = W_{11}(s)U_1(s) + W_{12}(s)U_2(s).$$

Si desidera determinare la matrice di trasferimento di tale sistema mediante l'applicazione delle regole dell'algebra dei blocchi.

Posto $u_2(t) = 0$, lo schema in Fig. 7.14 si riduce allo schema SISO in Fig. 7.19.a e con semplici trasformazioni si ottiene il sistema in Fig. 7.19.c. Dunque

$$W_{1,1}(s) = \frac{G_1G_3}{1 - G_3G_2} = \frac{3}{(s+1)(s+2)}.$$

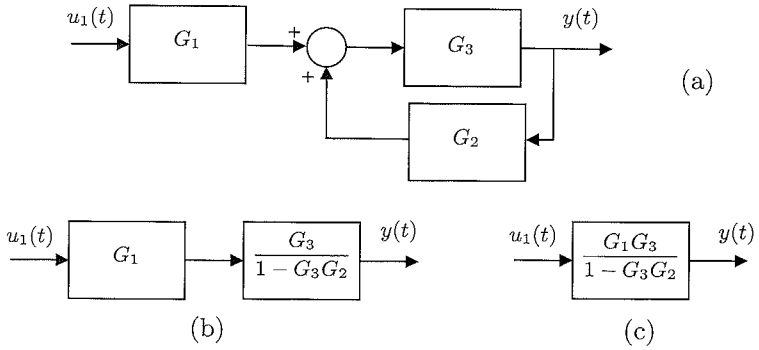

Fig. 7.19. Calcolo della funzione di trasferimento $W_{1,1}$ in Esempio 7.12

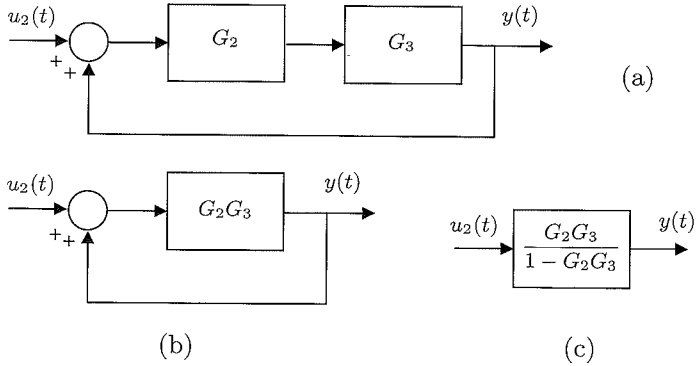

Fig. 7.20. Calcolo della funzione di trasferimento $W_{1,2}$ in Esempio 7.12

Viceversa, posto $u_1(t) = 0$, lo schema in Fig. 7.14 si riduce allo schema SISO in Fig. 7.20.a e con semplici trasformazioni si ottiene il sistema in Fig. 7.20.c. Dunque

$$W_{1,2}(s) = \frac{G_2G_3}{1 - G_2G_3} = \frac{2}{s+2}.$$

Tali valori coincidono, come atteso, con quelli determinati per altra strada nell'Esempio 7.12. ◇

Esercizi

Esercizio 7.1 Il sistema massa-molla studiato nel Capitolo 2 (cfr. Esempio 2.14) è descritto dal modello ingresso-uscita:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u(t).$$

Si determini una rappresentazione in VS di tale sistema e se ne tracci il corrispondente schema circuitale. Si verifichi se tale rappresentazione coincide con quella data nell'Esempio 2.14.

Esercizio 7.2 Si determini una rappresentazione in VS del sistema descritto nell'Esempio 7.5 e se ne tracci il corrispondente schema circuitale.

Esercizio 7.3 Si determini una rappresentazione in VS e se ne tracci il corrispondente schema circuitale per i seguenti sistemi del primo ordine.

(a) Integratore: $\dot{y}(t) = u(t)$.
(b) Sistema strettamente proprio: $a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t)$.
(c) Sistema non strettamente proprio: $a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$.

Esercizio 7.4 Si consideri una trasformazione di similitudine in cui la generica componente $z_i(t)$ del nuovo vettore di stato è legato alla componente $x_i(t)$ del vettore di stato originario dalla relazione $z_i(t) = (a_n/b_0)x_i(t)$.

Si determini la matrice di similitudine tale che $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$. Si dimostri che attraverso tale trasformazione la rappresentazione (7.5) può essere ricondotta alla forma canonica di controllo data nell'eq. (D.5) dell'Appendice D in cui il coefficiente non nullo del vettore $\boldsymbol{B}$ vale 1. In particolare si determini la mattrice della realizzazione della nuova rappresentazione in funzione dei coefficienti a_i e b_0 del modello ingresso-uscita.

Esercizio 7.5 Si consideri una trasformazione di similitudine in cui la generica componente $z_i(t)$ del nuovo vettore di stato è legato alla componente $x_i(t)$ del vettore di stato originario dalla relazione $z_i(t) = a_nx_i(t)$.

Si determini la matrice di similitudine tale che $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$. Si dimostri che attraverso tale trasformazione le rappresentazioni (7.8) e (7.9) possono essere ricondotte alla forma canonica di controllo data nell'eq. (D.5) dell'Appendice D in cui il coefficiente non nullo del vettore $\boldsymbol{B}$ vale 1. In particolare si determini la matrice della realizzazione delle due nuove rappresentazioni in funzione dei coefficienti a_i e b_i del modello ingresso-uscita.

Esercizio 7.6 Si determini la matrice di similitudine che permette di passare dalla rappresentazione (7.8) alla rappresentazione determinata dalla funzione `tf2ss.m` di MATLAB. Si tracci lo schema circuitale della rappresentazione determinata da MATLAB e lo si confronti con lo schema in Fig. 7.5.

Esercizio 7.7 Questo esercizio mostra che l'*effetto di carico* in un circuito elettrico viola una ipotesi fondamentale che è stata assunta per lo studio dei sistemi interconnessi: *il comportamento di ciascun componente interconnesso coincide con il comportamento del componente isolato.*

Il circuito in Fig. 7.21.a è un partitore di tensione composto da due resistori R.

(a) Si dimostri che la funzione di trasferimento tra tensione di ingresso $u(t)$ e tensione di uscita $y(t)$ del partitore vale $G(s) = 1/2$.