

Soluzione

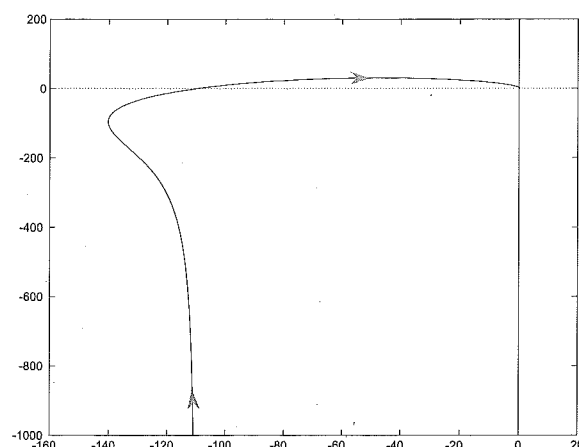


Figura 5.29a: Diagramma di Nyquist corrispondente all'Esercizio 5.3.6.

Il comportamento in corrispondenza all'origine dell'ultimo tratto del diagramma di Nyquist è illustrato nella seguente figura.

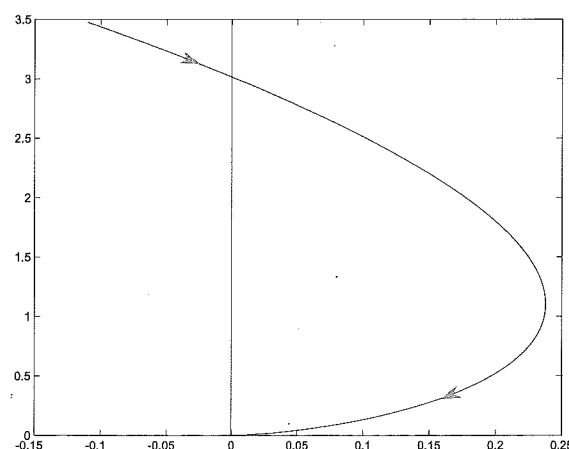


Figura 5.29b: Dettaglio del diagramma di Nyquist corrispondente all'Esercizio 5.3.6.

Capitolo 6

Caratteristiche transitorie ed a regime della risposta al gradino

Nei precedenti capitoli abbiamo rivolto la nostra attenzione principalmente allo studio della stabilità, requisito imprescindibile di ogni sistema dinamico. Si può facilmente intuire, tuttavia, come la stabilità non possa rappresentare l'unico obiettivo da perseguire. Occorre definire, almeno qualitativamente e possibilmente anche quantitativamente, alcuni parametri che risultino sufficientemente significativi ai fini della valutazione delle prestazioni di un sistema dinamico.

La definizione e valutazione del concetto di "bontà" di un sistema sono lo scopo principale di questo capitolo. Come vedremo, faremo riferimento ad un insieme di proprietà, quali la prontezza di risposta e di adattamento, o la capacità di risentire poco di fenomeni quali variazioni del comportamento dell'impianto da controllare e disturbi esterni di entità imprevedibile, elementi indesiderati ma inevitabili nella vita reale.

In questo contesto prenderemo in considerazione esclusivamente funzioni di trasferimento razionali strettamente proprie e BIBO stabili, che indicheremo con il simbolo $W(s)$, soddisfacenti il vincolo $W(0) \neq 0$.

Il fatto che $W(s)$ sia strettamente propria è una proprietà che, da un lato, è sempre verificata nei sistemi reali, dall'altro permette di escludere l'insorgere di alcune complicazioni che si manifesterebbero, nella trattazione del presente capitolo, in assenza di tale ipotesi.

La BIBO stabilità è necessaria sia perché requisito essenziale di qualunque sistema dinamico¹, sia perché, in sua assenza, non avrebbero senso i concetti di risposta transitoria e di risposta a regime al gradino unitario in ingresso, le cui proprietà ci apprestiamo ad analizzare.

¹In realtà un "buon" sistema dinamico deve essere asintoticamente stabile e quindi BIBO stabile. Le prestazioni del sistema non devono infatti degenerare in presenza di qualsivoglia condizioni iniziali. Tuttavia, poiché in questo capitolo limiteremo l'analisi alla sola risposta forzata, l'ipotesi di stabilità BIBO sarà sufficiente ai nostri scopi.

L'interesse per il comportamento del sistema a regime permanente trova diverse motivazioni. Una, in particolare, è rappresentata dalla soluzione dei cosiddetti problemi di **regolazione**, che analizzeremo con maggior dettaglio nel seguito. Obiettivo tipico dei problemi di regolazione è quello di portare l'uscita (dopo una fase transitoria iniziale) ad un desiderato valore (costante), impostato sollecitando il sistema con un opportuno ingresso, a sua volta costante. Poiché impostare un valore costante in ingresso (a partire da un certo istante in poi) significa applicare un opportuno gradino, è immediato rendersi conto del ruolo fondamentale giocato dall'analisi della risposta al gradino.

Tipicamente l'uscita assume un valore a regime proporzionale al valore costante impostato in ingresso. Se, infatti, l'ingresso costante applicato al sistema è $u(t) = u_0 \delta_{-1}(t)$, il valore a regime dell'uscita è pari a $W(0)u_0$. Da ciò consegue la necessità di avere $W(0) \neq 0$, perché altrimenti non sarebbe possibile alcuna regolazione dell'uscita, se non al valore nullo.

Val la pena, infine, di sottolineare che il problema della regolazione viene affrontato alla presenza di effetti "perturbativi" di varia natura, quali la presenza di disturbi esterni, la conoscenza non esatta del modello matematico dell'impianto, le variazioni di alcuni parametri ambientali, eccetera. Questo problema verrà preso in esame nel paragrafo 6.5.

6.1 Parametri della risposta al gradino e della risposta in frequenza

In questo paragrafo ci proponiamo di introdurre alcuni parametri descrittivi che risultano indicativi del comportamento del sistema. Tali parametri sono ottenuti o dall'analisi della **risposta al gradino** del sistema (cioè la risposta forzata in corrispondenza al gradino unitario in ingresso) o dall'analisi della **risposta in frequenza** del sistema (ovvero la funzione di trasferimento valutata sull'asse immaginario). Come vedremo, queste due descrizioni, seppur molto diverse, conducono ad informazioni tra loro strettamente correlate e per molti aspetti equivalenti.

Se $W(s)$ è una funzione razionale strettamente propria, la corrispondente risposta impulsiva $w(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (nulla per $t < 0$), è priva di componenti impulsive (si

²A tale risultato, su cui torneremo tra breve, si può giungere per diverse strade. Se applichiamo, ad esempio, i risultati dell'analisi di regime permanente al caso specifico di segnale fasoriale $u(t) = u_0 e^{j\omega t} \delta_{-1}(t)$, con $\omega = 0$, otteniamo $y_{rp}(t) = W(0)u_0 \delta_{-1}(t)$, da cui il risultato. Alternativamente possiamo ricorrere al teorema del valore finale. La stabilità BIBO, infatti, assicura l'esistenza del limite per $t \rightarrow +\infty$ della risposta al gradino $u_0 \delta_{-1}(t)$ (in quanto segnale di ingresso limitato) e pertanto tale limite può essere calcolato come

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[\frac{W(s)u_0}{s} \right],$$

giacché $\frac{W(s)u_0}{s}$ è la trasformata di Laplace della risposta al gradino di ampiezza u_0 .

veda il paragrafo 2.5), e pertanto la risposta forzata al gradino unitario in ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$, nel seguito indicata con il simbolo $w_{-1}(t)$, i.e.

$$w_{-1}(t) = (w * \delta_{-1})(t) = \int_0^t w(\tau) \delta_{-1}(t - \tau) d\tau = \int_0^t w(\tau) d\tau, \quad t \geq 0,$$

è una funzione continua³ che soddisfa le condizioni

$$\begin{aligned} w_{-1}(0) &= 0, \\ w_{-1}(+\infty) &= \int_0^{+\infty} w(\tau) d\tau = W(j\omega)|_{\omega=0} = W(0) \neq 0. \end{aligned}$$

Ha senso, quindi, definire i seguenti parametri che caratterizzano il comportamento della risposta al gradino nel dominio del tempo⁴:

$$\begin{aligned} t_r &= \text{tempo di salita (rise-time),} \\ t_s &= \text{tempo di assestamento (settling-time),} \\ s &= \text{sovraelongazione (overshoot).} \end{aligned}$$

Il **tempo di salita** (tipicamente al 10% o all'1%) è il tempo necessario affinché l'uscita entri (per la prima volta) in un fissato intorno del valore finale $w_{-1}(+\infty)$ (ovvero raggiunga i valori $0.9w_{-1}(+\infty)$ o $0.99w_{-1}(+\infty)$ rispettivamente nei casi di tempo di salita al 10% ed all'1%). Pur essendo la scelta dell'1% certamente più indicativa, nel seguito assumeremo sempre, salvo avviso contrario, il tempo di salita al 10%, allo scopo di rendere più semplice l'analisi numerica di alcuni esempi, nonché l'interpretazione di alcune figure. Pertanto t_r viene definito matematicamente come segue:

$$t_r := \min\{t \geq 0 : |w_{-1}(t) - w_{-1}(+\infty)| \leq 0.1|w_{-1}(+\infty)|\}.$$

Il **tempo di assestamento** (ancora una volta al 10% o all'1%, e anche in questo caso faremo riferimento al tempo di assestamento al 10%) è il tempo necessario affinché l'uscita si assesti definitivamente in un intorno del valore finale $w_{-1}(+\infty)$ (tra $0.9 w_{-1}(+\infty)$ e $1.1 w_{-1}(+\infty)$, nel caso di tempo di assestamento al 10%). Ciò equivale a dire che

$$t_s := \min\{t \geq 0 : \forall \tau \geq t, |w_{-1}(\tau) - w_{-1}(+\infty)| \leq 0.1|w_{-1}(+\infty)|\}.$$

Infine, la **sovraelongazione** è definita come

$$s := \left(\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \frac{w_{-1}(t) - w_{-1}(+\infty)}{w_{-1}(+\infty)} \cdot 100 \right) \%.$$

³Questa proprietà verrebbe a mancare nell'eventualità in cui la $W(s)$ fosse propria ma non strettamente propria, rendendo talora impossibile la definizione dei parametri oggetto di questo paragrafo.

⁴Usualmente tali parametri sono in letteratura definiti in modo leggermente diverso. Per i nostri scopi riteniamo sufficiente introdurre una "versione semplificata" di tali parametri temporali.

Essa rappresenta, nel caso in cui $W(0)$ sia positivo, il massimo scostamento positivo che la $w_{-1}(t)$ presenta, nella sua evoluzione temporale, rispetto al valore finale $w_{-1}(+\infty)$. Tale scostamento viene espresso in termini percentuali con riferimento al valore finale stesso. Nel caso, invece, in cui $W(0)$ sia negativo, il significato della sovraelongazione è analogo ma fa riferimento al massimo sostamento negativo che la $w_{-1}(t)$ presenta rispetto al valore (negativo) $w_{-1}(+\infty)$. Il fatto di ricorrere, nella definizione di s , al *sup* invece che al *max*, è dovuto al fatto che talvolta la sovraelongazione può essere nulla (tipicamente in corrispondenza di andamenti monotoni della risposta al gradino). In tal caso il punto di massimo non è al finito, per cui $s = 0$ risulta in realtà un estremo superiore e non un massimo.

I precedenti parametri sono utili per una descrizione qualitativa della dinamica del sistema nel dominio del tempo. Infatti t_r esprime quanto prontamente il sistema reagisce alle sollecitazioni in ingresso, mentre t_s il tempo necessario al sistema per "assestarsi" attorno al valore di regime.

È possibile fornire una caratterizzazione del comportamento del sistema anche nel dominio della frequenza, definendo alcuni parametri la cui utilità è legata, essenzialmente, alla loro più semplice computabilità ed al fatto che, come vedremo, essi sono strettamente collegati ai parametri temporali appena definiti. Tali parametri, che fanno riferimento alla risposta in frequenza del sistema $W(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}_+$, sono i seguenti:

$$\begin{aligned} B_p &= \text{banda passante (a 3 dB),} \\ \omega_r &= \text{pulsazione di risonanza,} \\ M_{rel} &= \text{picco di risonanza relativo.} \end{aligned}$$

La **banda passante (a 3 dB)** B_p ⁵ individua l'intervallo di pulsazioni $[0, B_p]$ in cui

$$|W(j\omega)|_{dB} \geq |W(0)|_{dB} - 3dB, \quad (6.1)$$

dove con la notazione $|A|_{dB}$ intendiamo (si veda il Capitolo 5) il modulo della grandezza complessa A , espresso in dB (cioè $20 \log |A|$). Equivalentemente, tenuto conto del fatto che 3 dB corrispondono, approssimativamente, a un fattore $1/\sqrt{2}$, la banda a 3 dB rappresenta l'estremo superiore dell'intervallo di pulsazioni (non negative) all'interno del quale si ha

$$|W(j\omega)| \geq \frac{|W(0)|}{\sqrt{2}}.$$

⁵La banda passante a 3 dB viene spesso definita in modo leggermente diverso, sostituendo la (6.1) con una coppia di vincoli simmetrici ovvero

$$|W(0)|_{dB} + 3dB \geq |W(j\omega)|_{dB} \geq |W(0)|_{dB} - 3dB.$$

La definizione qui adottata risulta più semplice ma, al contempo, più efficace dal punto di vista operativo. L'assenza di un limite superiore su $|W(j\omega)|_{dB}$ corrisponde, in pratica, a definire la banda come intervallo di pulsazioni in cui il sistema *non attenua troppo*.

Si noti che la definizione di banda a 3 dB è ben posta in quanto per ipotesi $W(0)$ è una quantità finita (per la BIBO stabilità) e non nulla. Inoltre, la scelta di adottare proprio 3 dB nella definizione della banda passante non è casuale, ma giustificata dal fatto che lo scostamento tra il diagramma di Bode effettivo e quello asintotico in corrispondenza alla pulsazione di taglio, per sistemi del primo ordine, è proprio pari a 3 dB. In tal modo la banda passante di un sistema del primo ordine viene a coincidere proprio con il valore assoluto dell'unico polo del sistema (si veda a tal proposito il successivo Esempio 6.2.1).

La **pulsazione di risonanza**, ammesso che essa sia presente ed unica⁶, è quella pulsazione $\omega_r > 0$ in corrispondenza alla quale il modulo di $W(j\omega)$ assume il valore massimo, ovvero

$$|W(j\omega_r)| = \max_{\omega > 0} |W(j\omega)|.$$

Il **picco di risonanza relativo** M_{rel} rappresenta il rapporto (espresso tipicamente in dB) tra il modulo della risposta in frequenza alla pulsazione ω_r e $|W(0)|$, il guadagno in bassa frequenza, ovvero:

$$M_{rel} := \left[\frac{|W(j\omega_r)|}{|W(0)|} \right]_{dB}.$$

È immediato verificare che

$$\begin{aligned} M_{rel} &= 20 \log \left(\frac{|W(j\omega_r)|}{|W(0)|} \right) = 20 \log |W(j\omega_r)| - 20 \log |W(0)| \\ &= |W(j\omega_r)|_{dB} - |W(0)|_{dB}. \end{aligned}$$

6.2 Tempo di salita e banda passante

Fornire un formulario che permetta di desumere dalla funzione di trasferimento del sistema il valore dei parametri prima introdotti oltre a risultare impossibile non appare nemmeno particolarmente utile. Vale invece la pena analizzare l'andamento della risposta al gradino e del diagramma di Bode dell'ampiezza (e conseguentemente valutarne i parametri descrittivi) per una famiglia di sistemi particolarmente semplici, ma sufficientemente paradigmatici.

Esempio 6.2.1 [Sistema del primo ordine] Consideriamo il sistema del primo ordine descritto dalla funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{K}{s + p},$$

⁶Nell'ipotesi $W(0) \neq 0$, e quindi di un sistema che agisca come *filtro passa-basso*, parliamo di pulsazione di risonanza per risposte in frequenza il cui andamento non sia monotono decrescente in $[0, +\infty)$ e che presentino un unico punto di massimo globale.

dove K e p sono numeri reali positivi. In corrispondenza al gradino unitario in ingresso, la cui trasformata di Laplace è $U(s) = \frac{1}{s}$, otteniamo come uscita in evoluzione forzata il segnale risposta al gradino, $w_{-1}(t)$, avente trasformata

$$W_{-1}(s) = \frac{W(s)}{s}.$$

Sviluppando in frazioni parziali $W_{-1}(s)$:

$$W_{-1}(s) = \frac{K}{p} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+p} \right] = W(0) \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+p} \right],$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $W(0) = \frac{K}{p}$, giungiamo alla seguente espressione della risposta al gradino:

$$w_{-1}(t) = W(0)[1 - e^{-pt}]\delta_{-1}(t).$$

Si noti che il valore a regime dell'uscita, $w_{-1}(+\infty)$, è pari a $W(0)$, come sottolineato in precedenza. Il tempo di salita (al 10%), t_r , si ottiene dalla soluzione dell'equazione⁷

$$w_{-1}(t_r) = 0.9w_{-1}(+\infty) = 0.9W(0),$$

ovvero, in questo specifico esempio,

$$1 - e^{-pt_r} = 0.9.$$

Si ottiene, in tal modo,

$$t_r = \frac{1}{p} \ln \left(\frac{1}{0.1} \right) = \frac{\ln(10)}{p} = \frac{H}{p}, \quad (6.2)$$

dove $H \approx 2.3$. Inoltre, in virtù della monotonicità della risposta al gradino, la sovraelongazione è assente ($s = 0$) ed il tempo di assestamento coincide, pertanto, con t_r .

La risposta in frequenza del sistema

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega + p},$$

ha modulo

$$|W(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 + p^2}},$$

e pertanto, imponendo

$$|W(jB_p)| = \frac{W(0)}{\sqrt{2}} = \frac{K}{\sqrt{2}p},$$

⁷In generale, tale equazione ammette più soluzioni e il tempo di salita rappresenta, tra tutte le soluzioni possibili, quella minima. Tuttavia, in questo specifico esempio, l'andamento della risposta al gradino è di tipo monotono per cui la soluzione è necessariamente unica.

si trova $B_p = p$, mentre ω_r è assente (come pure il picco di risonanza relativo) dal momento che $|W(j\omega)|$ ha un andamento monotono decrescente.

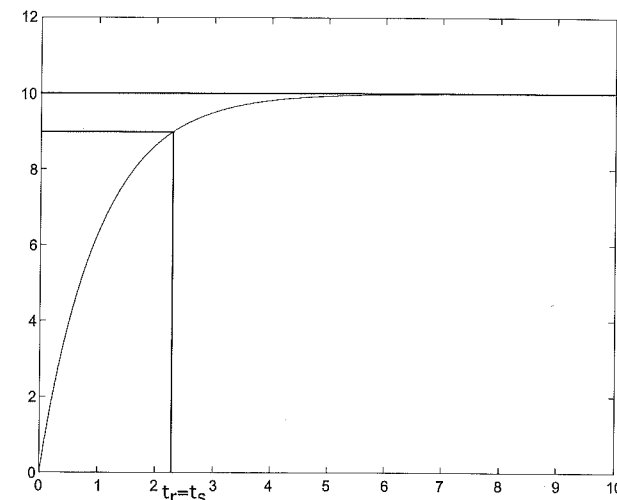


Figura 6.1a: Andamento di $w_{-1}(t)$ per $W(0) = 10$ e $p = 1$.

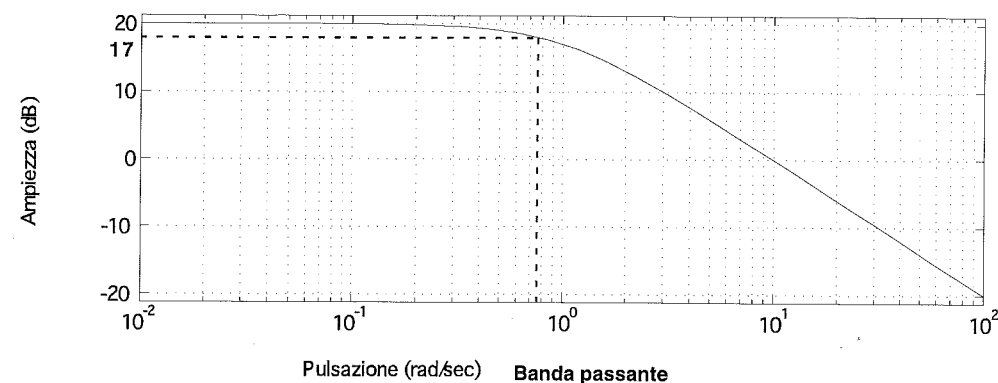


Figura 6.1b: Andamento di $|W(j\omega)|_{dB}$ per $W(0) = 10$ e $p = 1$.

Dalla (6.2) consegue la relazione fondamentale, valida per una funzione di trasferimento del primo ordine,

$$B_p \cdot t_r = H, \quad (6.3)$$

che indica l'esistenza di un vincolo di proporzionalità inversa tra banda passante e tempo di salita. ♣

La (6.3) ha validità "abbastanza generale", nel senso che essa si estende ad un'ampia classe di sistemi, a condizione di introdurre piccole modifiche alla costante H . Analizzeremo, mediante alcuni esempi illustrativi, la validità di tale proprietà empirica e le modifiche che, talora, vanno apportate a tale relazione. Per il momento ci accontentiamo di sottolineare come, in virtù del legame di proporzionalità inversa

che lega tra loro tempo di salita e banda passante, affinché il sistema risponda *rapidamente* alle sollecitazioni in ingresso è conveniente che la banda passante sia la più ampia possibile, anche se ciò può portare a degli inconvenienti, come vedremo nel seguito analizzando i sistemi ad anello chiuso. Per tale ragione, nella pratica, si dovrà spesso adottare un compromesso tra le contrastanti esigenze che portano da un lato a ricercare una banda passante non troppo ampia e dall'altro a ricercare una banda passante la più ampia possibile.

Esempio 6.2.2 [Sistema con due poli reali] Siano z, p_1 e p_2 numeri reali positivi soddisfacenti i vincoli $0 < p_1 < z < p_2$ e sia

$$W(s) = \frac{1 + \frac{s}{z}}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right) \left(1 + \frac{s}{p_2}\right)}.$$

In Figura 6.2 sono indicate due diverse situazioni possibili per $|W(j\omega)|$: la prima corrisponde al caso in cui $z \gg p_1$, la seconda al caso in cui $z \approx p_1$.

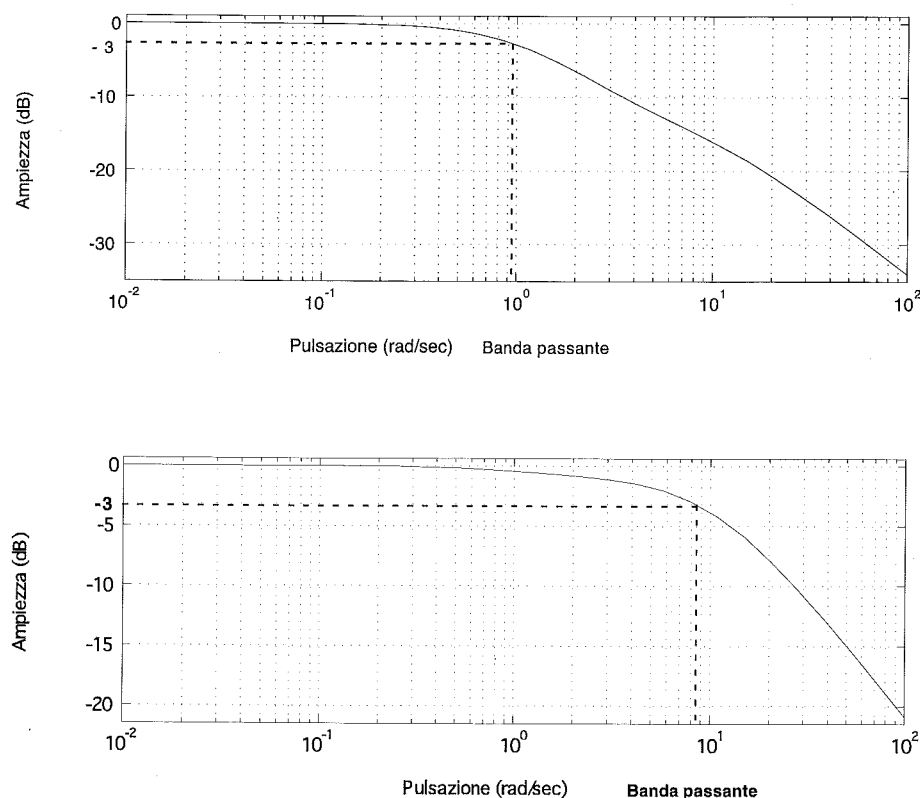


Figura 6.2: Diagrammi di $|W(j\omega)|_{dB}$ per $p_1 = 1, p_2 = 10$ e $z = 5$ (sopra), per $p_1 = 1, p_2 = 10$ e $z = 1.1$ (sotto).

È evidente che, nel primo caso, la banda passante è praticamente la stessa che si avrebbe in assenza dello zero $-z$ e del polo in alta frequenza $-p_2$, e quindi $B_p \approx p_1$, mentre nel secondo caso la “quasi-cancellazione” tra polo $-p_1$ e zero $-z$ rende $B_p \approx p_2$, cioè molto maggiore di quella determinata nel primo caso.

Per valutare la risposta al gradino del sistema operiamo nel dominio delle trasformate di Laplace. Si trova

$$W_{-1}(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + p_1} \cdot \frac{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{z}}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} - \frac{1}{s + p_2} \cdot \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}},$$

e, una volta posto

$$\lambda := \frac{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{z}}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}},$$

dove $0 < \lambda < 1$, come conseguenza delle ipotesi su z, p_1 e p_2 , $W_{-1}(s)$ può essere riscritta nella forma

$$W_{-1}(s) = \frac{1}{s} - \lambda \frac{1}{s + p_1} - (1 - \lambda) \frac{1}{s + p_2},$$

da cui segue

$$w_{-1}(t) = [1 - \lambda e^{-p_1 t} - (1 - \lambda) e^{-p_2 t}] \delta_{-1}(t).$$

È evidente come nel caso $z \gg p_1$ valga $\lambda \approx 1$, mentre il caso $z \approx p_1$ corrisponda a $\lambda \approx 0$. Se $z \gg p_1$, la risposta al gradino può quindi essere descritta, in modo approssimato, come segue:

$$w_{-1}(t) \approx (1 - e^{-p_1 t}) \delta_{-1}(t).$$

Pertanto è il polo a cui corrisponde il modo più “lento” (il cosiddetto “polo dominante”, ovvero $-p_1$) a determinare in pratica il tempo di salita, che risulta quasi lo stesso che si avrebbe per un sistema del primo ordine caratterizzato dal polo $-p_1$.

Viceversa, se $z \approx p_1$

$$w_{-1}(t) \approx (1 - e^{-p_2 t}) \delta_{-1}(t)$$

ed il tempo di salita coincide con quello determinato da $-p_2$. Nella successiva Figura 6.3 sono illustrati gli andamenti di $w_{-1}(t)$ corrispondenti alle due situazioni considerate in Figura 6.2, che corrispondono rispettivamente a $\lambda \approx 0.9$ e $\lambda \approx 0.1$.

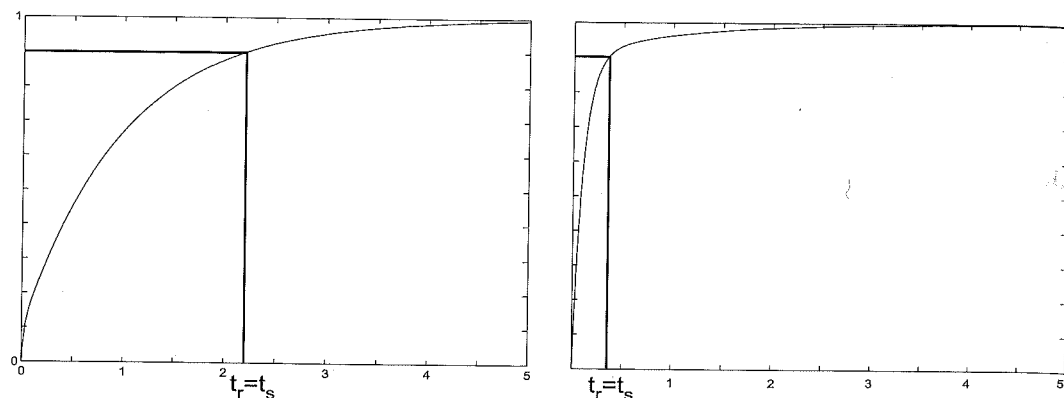


Figura 6.3: Andamenti di $w_{-1}(t)$ per $p_1 = 1, p_2 = 10, z = 5$ (sinistra) e $z = 1.1$ (destra).

La determinazione del tempo di salita t_r avviene, ancora una volta, mediante la risoluzione dell'equazione

$$\lambda e^{-p_1 t_r} + (1 - \lambda) e^{-p_2 t_r} = 0.1 \quad (6.4)$$

(di cui, in generale, è possibile trovare la soluzione solo per via numerica), mentre la banda passante (a 3 dB) B_p viene determinata risolvendo rispetto ad ω l'equazione

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ovvero

$$\frac{1 + \frac{\omega^2}{z^2}}{(1 + \frac{\omega^2}{p_1^2})(1 + \frac{\omega^2}{p_2^2})} = \frac{1}{2}. \quad (6.5)$$

È facile verificare che in entrambi i casi illustrati in Figura 6.3 ($z = 5$ e $z = 1.1$) la condizione (6.3), che lega tra loro tempo di salita e banda passante, è verificata con ottima approssimazione.

Assumendo p_1 e p_2 fissati, si potrebbe studiare per via analitica il variare della costante H nella (6.3) al variare di z nell'intervallo (p_1, p_2) . Ciò sarebbe oltremodo oneroso e porterebbe a scostamenti non lievissimi del valore di H rispetto a quello del caso del sistema del primo ordine, soltanto per valori di z prossimi, ma non troppo, a p_1 . ♣

Le (6.4) e (6.5) dimostrano come il calcolo esatto sia di t_r che di B_p sia tutt'altro che semplice, anche in presenza di $W(s)$ di ordine basso, e chiarisce quindi l'importanza di disporre di legami semplici, seppur approssimati, tra i due parametri, dal momento che la valutazione approssimata di B_p è immediata dall'osservazione del diagramma di Bode, mentre per la valutazione del tempo di salita non disponiamo

di strumenti altrettanto validi. Sapere che i due parametri sono inversamente proporzionali è quindi importante, ma è anche rilevante capire quanto la costante di proporzionalità possa variare, individuando da un lato situazioni fortemente critiche (si veda il prossimo esempio) e dall'altro quali sono le situazioni, molto comuni nella pratica, in cui invece la costante di proporzionalità assume valori in un intervallo molto ristretto.

Volendo estrapolare una regola generale dal caso ora analizzato, possiamo dire che la (6.3) vale con ottima approssimazione solo nel caso in cui il polo dominante sia "sufficientemente lontano" dagli altri zeri e/o poli, o qualora il polo dominante sia coinvolto in un fenomeno di cancellazione (o "quasi-cancellazione") zero-polo, ed il polo successivo, che assume in tal caso a ruolo di polo dominante effettivo, sia sufficientemente lontano dagli altri zeri e/o poli.

Esistono, tuttavia, situazioni in cui la (6.3) è disattesa in maniera evidente. Ciò accade, in particolare, quando il sistema, seppur BIBO stabile, presenta qualche zero a parte reale positiva. In tal caso gli andamenti transitori divengono abbastanza complessi e possono stravolgere le nostre aspettative sui legami tra B_p e t_r . Questa situazione viene illustrata nel seguente esempio.

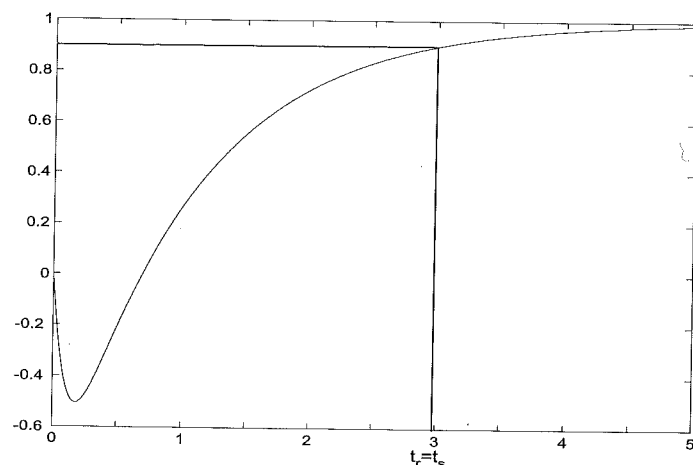
Esempio 6.2.3 [Sistema con due poli reali ed uno zero instabile] Sia

$$W(s) = \frac{1-s}{(1+s)\left(1+\frac{s}{p}\right)},$$

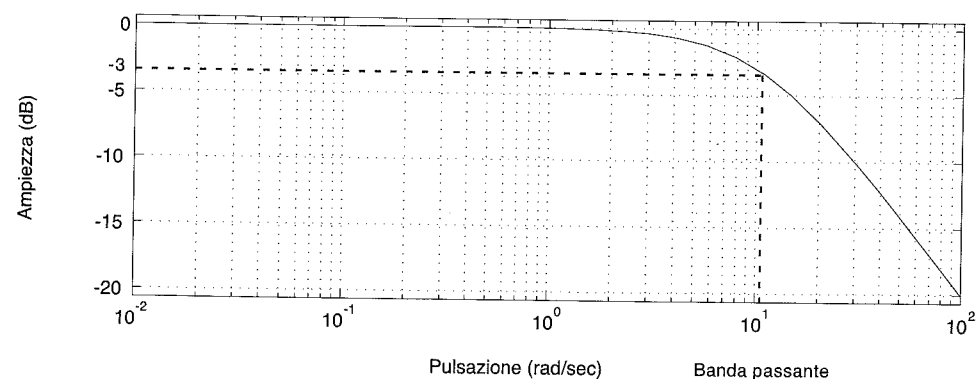
con $p \gg 1$. Lo sviluppo in frazioni parziali di $W_{-1}(s) = \frac{W(s)}{s}$ e la sua successiva antitrasformazione di Laplace conducono facilmente a

$$w_{-1}(t) \approx (1 - 2e^{-t} + e^{-pt})\delta_{-1}(t).$$

Un semplice studio di funzione evidenzia l'andamento per $w_{-1}(t)$ (nel caso in cui $p = 10$) illustrato in Figura 6.4. Tale andamento manifesta una sostanziosa **sottoelungazione** (undershoot) iniziale, dopodiché il sistema reagisce salendo con un andamento esponenziale la cui costante di tempo è quella relativa al polo in -1 . Ne consegue che $t_r \approx 3$, il medesimo tempo di salita che si otterrebbe per un sistema del primo ordine (si veda la (6.2)) il cui polo sia collocato circa in -0.77 . Il sistema manifesta quindi un leggero "rallentamento" rispetto alla velocità di risposta che ci si aspetterebbe in virtù del polo in -1 e ciò trova spiegazione nella maggior escursione (da -0.5 a 0.9) che l'uscita si trova costretta a compiere come conseguenza dell'undershoot iniziale.

Figura 6.4: Andamento di $w_{-1}(t)$ per $p = 10$.

È comunque sempre il polo dominante in -1 , seppur con effetto moderatamente rallentato, a determinare essenzialmente il tempo di salita, dal momento che l'esponeziale relativo all'altro polo esaurisce i suoi effetti dopo i primi decimi di secondo. In effetti il tempo di salita risente pochissimo del valore del polo $p \gg 1$.

Figura 6.5: Banda passante per la $W(s)$ dell'Esempio 6.2.3, con $p = 10$.

Se consideriamo la banda passante, invece (si veda, in tal senso, la Figura 6.5), scopriamo che essa risulta p volte più grande del previsto, cioè coincide con quella che si otterrebbe nel caso di un sistema del primo ordine con polo in $-p$. La ragione di questo comportamento è evidente: pur non essendoci cancellazioni effettive zero-polo, dal punto di vista del diagramma di Bode del modulo di $W(j\omega)$ il polo negativo e lo zero positivo si posizionano sullo stesso punto dell'asse delle ascisse, compensando i loro effetti e mantenendo il modulo di $W(j\omega)$ costante fino al suc-

cessivo polo in $-p$, e quindi si comportano come se ci fosse stata una cancellazione zero-polo. Tale cancellazione apparente zero-polo non ha invece una corrispondente contropartita nel dominio del tempo⁸ e ciò spiega il vistoso disattendimento della (6.3), tanto più evidente quanto più p è grande. ♣

Fortunatamente, la situazione descritta nel precedente esempio è molto rara: la presenza di zeri positivi è già di per sé un'evenienza non frequente nei casi pratici ed inoltre l'anomalia nel legame tra banda passante e tempo di salita del precedente esempio richiede anche che lo zero positivo sia collocato (nel diagramma di Bode) nelle vicinanze di un polo negativo, altrimenti il fenomeno ora descritto non si manifesterebbe. È importante quindi conoscere le insidie dei legami tra tempo di salita e banda passante, ma anche rendersi conto che nei casi pratici esse non si manifestano quasi mai.

6.3 Tempo di assestamento e picco di risonanza relativo

Scopo di questo paragrafo è evidenziare come esista una stretta correlazione tra i parametri t_s ed s da una parte ed i parametri M_{rel} e ω_r dall'altra, anche se tali legami sono per lo più qualitativi e non riconducibili a formule semplici di validità generale (quali quella appena evidenziata tra tempo di salita e banda passante). Conviene pertanto esplorare tali relazioni analizzando un esempio sufficientemente significativo.

Esempio 6.3.1 [Sistema del secondo ordine] Consideriamo un sistema del secondo ordine BIBO stabile e supponiamo che la sua funzione di trasferimento $W(s)$ presenti una coppia di poli complessi coniugati (a parte reale negativa), i.e. $\sigma \pm j\omega$ con $\sigma < 0$, ed uno zero reale negativo. Non c'è perdita di generalità nel supporre che $W(s)$ assuma la seguente forma

$$W(s) = \frac{1 + \frac{s}{h\omega_n}}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}},$$

dove $\omega_n := \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} > 0$, $\xi := -\sigma/\omega_n$ (e quindi soddisfa il vincolo $0 < \xi < 1$) e la costante h è reale e positiva (condizione che assicura che lo zero di $W(s)$ sia reale negativo). Notiamo che h tendente a $+\infty$ simula il caso limite di un sistema del secondo ordine la cui funzione di trasferimento è priva di zeri. Se assumiamo, inoltre, che ω_n rimanga costante, al variare di ξ nell'intervallo $(0, 1)$ i poli, che possono essere descritti nella forma

$$p_1 = (-\xi + j\sqrt{1-\xi^2})\omega_n, \quad p_2 = (-\xi - j\sqrt{1-\xi^2})\omega_n,$$

⁸Val la pena di evidenziare che gli effetti dell'apparente cancellazione si riscontrano anche nel dominio della frequenza, ma unicamente nell'andamento della fase, non rilevante ai fini della definizione di banda passante.

si spostano su una semicirconferenza centrata nell'origine, di raggio ω_n e collocata interamente nel semipiano $\text{Re}(s) < 0$.

Il valore del parametro h determina (nel diagramma di Bode) la collocazione del punto di spezzamento dello zero rispetto al punto di spezzamento ω_n della coppia complessa coniugata di poli. Infatti, a seconda che h sia maggiore o minore di 1, lo zero si trova collocato rispettivamente a destra o a sinistra di ω_n . Nel caso particolare in cui $h = 1$, i due punti di spezzamento coincidono.

Sia $w_{-1}(t)$ la risposta al gradino unitario. Sviluppando in frazioni parziali $W_{-1}(s) = \frac{W(s)}{s}$ ed antitrasformando, si ottiene, dopo alcuni calcoli laboriosi

$$w_{-1}(t) = \left\{ 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t) + \frac{\xi - \frac{1}{h}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t) \right] \right\} \delta_{-1}(t) =$$

$$=: \delta_{-1}(t) - y_{tr}(t). \quad (6.6)$$

Il termine transitorio oscillante $y_{tr}(t)$ rende conto della sovraelongazione e del tempo di assestamento. Ricordando (si veda a tal proposito la (2.13)) che un'espressione del tipo $A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t)$ si può sempre riscrivere nella forma $C \cos(\alpha t + \phi)$, dove $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ e ϕ è tale per cui $\cos \phi = A/C$ e $\sin \phi = -B/C$, ne consegue che

$$y_{tr}(t) = \bar{y}_{tr}(t) \cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \phi),$$

dove

$$\bar{y}_{tr}(t) := \sqrt{\frac{1 - \frac{2\xi}{h} + \frac{1}{h^2}}{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}$$

è una funzione a valori positivi monotona decrescente e ϕ è un angolo opportuno. La funzione $y_{tr}(t)$ oscilla quindi tra $\pm \bar{y}_{tr}(t)$, funzioni che rappresentano l'*inviluppo* del termine oscillante ad ampiezza variabile. Ne consegue che, in prima approssimazione, è ragionevole pensare che la risposta al gradino $w_{-1}(t)$ si assesti definitivamente all'interno della fascia

$$0.9w_{-1}(+\infty) \leq w_{-1}(t) \leq 1.1w_{-1}(+\infty),$$

ovvero da un certo istante in poi valga

$$-0.1 \leq y_{tr}(t) \leq 0.1,$$

non appena si verifica, ad un certo istante, la condizione

$$\bar{y}_{tr}(t) = 0.1$$

Una stima approssimata del tempo di assestamento si ottiene, in definitiva, risolvendo l'equazione, nell'indeterminata t_s ,

$$\bar{y}_{tr}(t_s) = \sqrt{\frac{1 - \frac{2\xi}{h} + \frac{1}{h^2}}{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_s} = 0.1,$$

la cui soluzione è

$$t_s \approx \frac{1}{2\xi\omega_n} \cdot \ln \left[\frac{100(1 - \frac{2\xi}{h} + \frac{1}{h^2})}{1 - \xi^2} \right]. \quad (6.7)$$

Nel caso particolare in cui la funzione $W(s)$ sia priva di zeri ($h \rightarrow +\infty$) si ottiene

$$t_s \approx \frac{1}{2\xi\omega_n} \cdot \ln \left(\frac{100}{1 - \xi^2} \right),$$

mentre per $\xi \rightarrow 0^+$ si ha

$$t_s \approx \frac{1}{2\xi\omega_n} \cdot \ln \left[100 \left(1 + \frac{1}{h^2} \right) \right].$$

Ai fini della determinazione del tempo di assestamento, il sistema si comporta come se i poli effettivi fossero sostituiti da poli reali (poli dominanti effettivi) di valore $-\xi\omega_n$, per cui l'effetto di ξ è quello di *rallentare* l'assestamento, rispetto al caso del primo ordine, dove esso coincide con il tempo di salita ed è strettamente correlato al polo dominante. La sovraelongazione s assume, per ξ tendente a zero, valori addirittura superiori al 100%, dal momento che per $\xi \rightarrow 0^+$, il termine di inviluppo $\bar{y}_{tr}(t)$ tende alla funzione costante $\sqrt{1 + \frac{1}{h^2}}$. Per tale ragione il valore massimo assunto dalla $w_{-1}(t)$ è all'incirca $1 + \sqrt{1 + \frac{1}{h^2}}$ e, dunque,

$$s \approx \sqrt{1 + \frac{1}{h^2}} \cdot 100\% > 100\%.$$

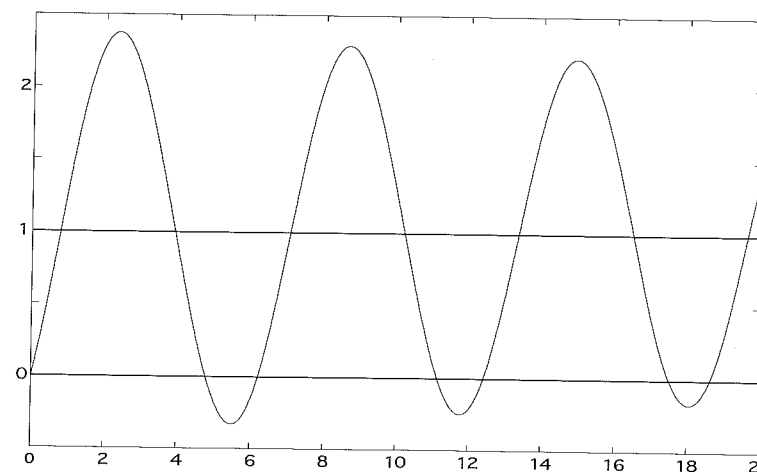


Figura 6.6: Risposta al gradino per $\omega_n = 1$, $\xi = 0.01$ e $h = 1$.

Infine, il tempo di salita può essere valutato approssimativamente cercando il primo istante t_r in cui $w_{-1}(t_r) = 1$, ovvero il più piccolo istante temporale in

cui $y_{tr}(t) = 0$. Ciò corrisponde a determinare la più piccola soluzione positiva t_r dell'equazione

$$\cos(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t_r + \phi) = 0,$$

e quindi a risolvere

$$\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t_r + \phi = \frac{\pi}{2}.$$

La scelta di imporre l'uguaglianza di $y_{tr}(t_r) = 0$, invece di $y_{tr}(t_r) = 0.1$, è ovviamente legata alla maggior semplicità dei calcoli che ne derivano, ma conduce, naturalmente, ad una stima per eccesso di t_r . Si trova, allora, esplicitando l'espressione di ϕ :

$$t_r \approx \begin{cases} \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\frac{1}{h} - \xi}\right), & \text{se } \xi < \frac{1}{h}, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n}, & \text{se } \xi = \frac{1}{h}, \\ \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \left[\pi - \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi - \frac{1}{h}}\right) \right], & \text{se } \xi > \frac{1}{h}. \end{cases} \quad (6.8)$$

Per quel che riguarda l'analisi nel dominio della frequenza, invece, uno studio dell'andamento di $|W(j\omega)|$ al variare di $\omega \geq 0$ evidenzia come

- per $\xi \geq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4h^2}}$ il modulo della risposta in frequenza presenta un andamento monotono decrescente e quindi non c'è risonanza. Si noti che, in assenza di zero, ovvero per $h \rightarrow +\infty$, la disuguaglianza $\xi \geq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4h^2}}$ diventa la ben nota condizione $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- per $0 < \xi < \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4h^2}}$, invece, compare una pulsazione ed un corrispondente picco di risonanza relativo di valori

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{\sqrt{(h^2 + 1)^2 - 4\xi^2 h^2} - h^2}, \quad (6.9)$$

$$M_{rel} = -10 \log[2h^2(\sqrt{(h^2 + 1)^2 - 4\xi^2 h^2} + 2\xi^2 - 1 - h^2)]. \quad (6.10)$$

In assenza di zero ($h \rightarrow +\infty$), tali formule si semplificano in

$$\begin{aligned} \omega_r &= \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \\ M_{rel} &= -10 \log[4\xi^2(1 - \xi^2)]. \end{aligned}$$

Infine la valutazione della banda passante richiede la soluzione della seguente equazione nell'incognita B_p

$$|W(jB_p)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |W(0)|,$$

che, dopo alcuni semplici calcoli, conduce a

$$\left(\frac{B_p}{\omega_n}\right)^4 - 2\left(1 + \frac{1}{h^2} - 2\xi^2\right) \left(\frac{B_p}{\omega_n}\right)^2 - 1 = 0,$$

la cui unica soluzione reale e positiva è

$$B_p = \omega_n \sqrt{\sqrt{(1 + \frac{1}{h^2} - 2\xi^2)^2 + 1} + (1 + \frac{1}{h^2} - 2\xi^2)}. \quad (6.11)$$

Le formule fin qui derivate in completa generalità (per ξ e h arbitrari) dimostrano la complessità della valutazione dei parametri di interesse (sia temporali che frequenziali) anche nel caso di sistemi relativamente semplici (del secondo ordine). Estrapolare legami tra le varie grandezze diventa quindi un compito improbo. Conviene iniziare scartando a priori situazioni prive di interesse pratico: poiché siamo interessati ad avere "buoni" transitori, con un tempo di assestamento (e conseguentemente un picco di risonanza relativo, se presente) non troppo elevato, i casi di interesse sono solo quelli in cui ξ non sia troppo piccolo. Focalizziamo allora la nostra attenzione su due situazioni particolarmente significative.

Caso 1: Assenza di zero ($h \rightarrow +\infty$) e $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

In questo caso (si veda il paragrafo 5.1.5) il picco di risonanza relativo è assente ($M_{rel} = 0$ dB). La (6.6), valutata per tali valori di h e ξ , fornisce l'espressione della risposta al gradino

$$\begin{aligned} w_{-1}(t) &= \left\{ 1 - e^{-\frac{\omega_n t}{\sqrt{2}}} \left[\cos\left(\frac{\omega_n t}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{\omega_n t}{\sqrt{2}}\right) \right] \right\} \delta_{-1}(t) \\ &= \left[1 - \sqrt{2} e^{-\frac{\omega_n t}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\omega_n t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

Il tempo di salita e di assestamento e la banda passante si ottengono particolarizzando le (6.8), (6.7) e (6.11) con gli attuali valori di h e ξ . Si ottiene così

$$t_r \approx \frac{3\sqrt{2}\pi}{4} \frac{1}{\omega_n} \approx \frac{3.33}{\omega_n}, \quad t_s \approx \frac{1}{2 \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_n} \cdot \ln \left[\frac{100}{1 - \frac{1}{2}} \right] \approx \frac{3.75}{\omega_n}, \quad B_p = \omega_n.$$

Confrontando tali valori con quelli di un sistema del primo ordine con un polo in $-\omega_n$, si scopre come questo sistema del secondo ordine, pur avendo la stessa banda passante, sia leggermente "più lento", sia dal punto di vista dell'assestamento che del tempo di salita. La (6.3) vale ora con $H \approx 3.33$ (in realtà, la stima del tempo di salita effettuata per eccesso porta ad un valore inferiore di H).

La sovraelongazione s si può valutare cercando il primo punto di massimo relativo della funzione $w_{-1}(t)$. Ciò equivale a determinare la più piccola soluzione $\bar{t} > 0$ dell'equazione $\frac{dw_{-1}}{dt}(\bar{t}) = 0$. Si trova così l'identità

$$\sin\left(\frac{\omega_n \bar{t}}{\sqrt{2}}\right) = 0,$$

da cui segue

$$\bar{t} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\omega_n} \approx \frac{4.44}{\omega_n}$$

e pertanto

$$w_{-1}(\bar{t}) = 1 + e^{-\pi} \approx 1.043.$$

Ciò significa che

$$s = \frac{w_{-1}(\bar{t}) - w_{-1}(+\infty)}{w_{-1}(+\infty)} 100\% \approx \frac{1.043 - 1}{1} 100\% \approx 4.3\%,$$

che rappresenta una sovraelongazione di entità veramente trascurabile.

Nella Figura 6.7a la risposta al gradino del sistema che stiamo esaminando nel caso $\omega_n = 1$ viene raffrontata con quella di un sistema del primo ordine con polo in $p = -1$. In Figura 6.7b viene proposto l'analogo confronto per i rispettivi diagrammi di Bode delle ampiezze (che presentano il medesimo punto di spezzamento).

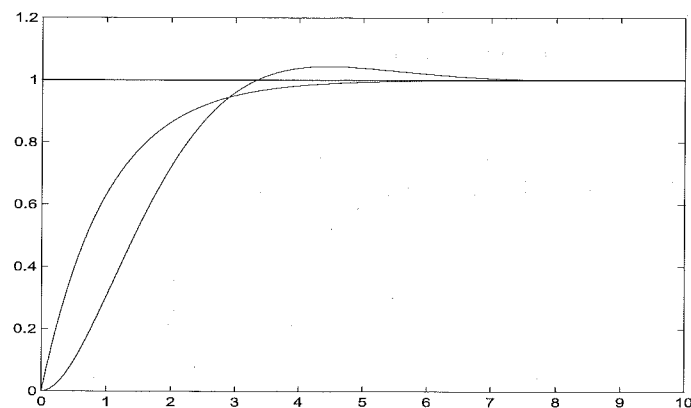


Figura 6.7a: Confronto, nel dominio del tempo, del Caso 1 con un sistema del primo ordine ($\omega_n = 1, p = -1$).

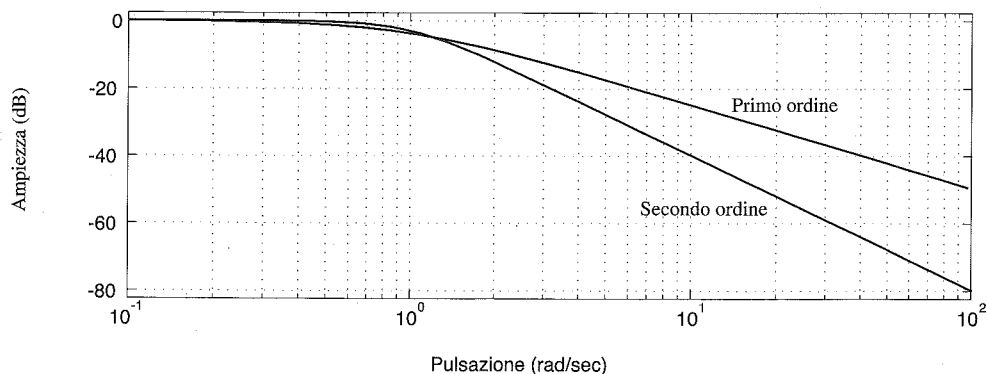


Figura 6.7b: Confronto, nel dominio della frequenza, del Caso 1 con un sistema del primo ordine ($\omega_n = 1, p = -1$).

Caso 2: Zero “sovrapposto” alla coppia di poli complessi coniugati (ovvero di modulo pari a ω_n , corrispondente al caso $h = 1$) e $\xi = \frac{1}{2}$.

Nelle ipotesi in cui ci siamo messi si ha

$$W(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_n}}{1 + \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad (6.12)$$

e le (6.9), (6.10) e (6.11) forniscono

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\sqrt{3} - 1} \omega_n \approx 0.86 \omega_n, \\ M_{rel} &= -10 \log(2\sqrt{3} - 3) \text{ dB} \approx 3.33 \text{ dB}, \\ B_p &= \sqrt{\frac{\sqrt{13} + 3}{2}} \omega_n \approx 1.82 \omega_n. \end{aligned}$$

La (6.6), valutata per $h = 1$ e $\xi = 1/2$, fornisce l'espressione della risposta al gradino

$$\begin{aligned} w_{-1}(t) &= \left\{ 1 - e^{-\frac{\omega_n t}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_n t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_n t\right) \right] \right\} \delta_{-1}(t) \\ &= \left[1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\omega_n t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_n t + \frac{\pi}{6}\right) \right] \delta_{-1}(t) \\ &=: \delta_{-1}(t) - y_{tr}(t). \end{aligned}$$

Dalla (6.8) è possibile ricavare, ancora una volta, una stima per eccesso del tempo di salita

$$t_r \approx \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{1}{\omega_n} \approx \frac{1.21}{\omega_n},$$

che risulta all'incirca pari alla metà del tempo di salita di un sistema del primo ordine con polo in $-\omega_n$. Il tempo di assestamento t_s si ottiene dalla (6.7) che fornisce

$$t_s = \ln\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) \frac{2}{\omega_n} \approx \frac{4.9}{\omega_n}.$$

Tale tempo è all'incirca doppio rispetto al tempo di assestamento per un sistema del primo ordine (si ricorda che per i sistemi del primo ordine tempo di salita e di assestamento coincidono) caratterizzato da un polo in $-\omega_n$.

Infine, per determinare la sovraelongazione, si cerca il primo istante $\bar{t} > 0$ per cui risulta $\frac{dw_{-1}}{dt}(\bar{t}) = 0$. Si trova, così,

$$\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_n \bar{t} - \frac{\pi}{6}\right) = 0,$$

da cui segue

$$\bar{t} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{1}{\omega_n} \approx \frac{2.42}{\omega_n}.$$

Pertanto il valore massimo della $w_{-1}(t)$ è

$$w_{-1}(\bar{t}) = 1 + e^{-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}} \approx 1.3$$

e corrisponde ad una sovraelongazione

$$s = \frac{w_{-1}(\bar{t}) - w_{-1}(+\infty)}{w_{-1}(+\infty)} 100\% \approx \frac{1.3 - 1}{1} 100\% \approx 30\%.$$

Quindi la presenza di una sovraelongazione, che di per sé può rappresentare un inconveniente, ha come contropartita una riduzione del tempo di salita. Ciò si evince anche dal fatto che la banda passante, come già osservato, è aumentata. In effetti il prodotto $B_p t_r$ vale all'incirca 2.2, praticamente lo stesso valore assunto dai sistemi del primo ordine.

Nella Figura 6.8a la risposta al gradino del sistema che stiamo esaminando nel caso $\omega_n = 1$ viene raffrontata con quella di un sistema del primo ordine con polo in $p = -1$. In Figura 6.8b viene proposto l'analogo confronto per i rispettivi diagrammi di Bode delle ampiezze.

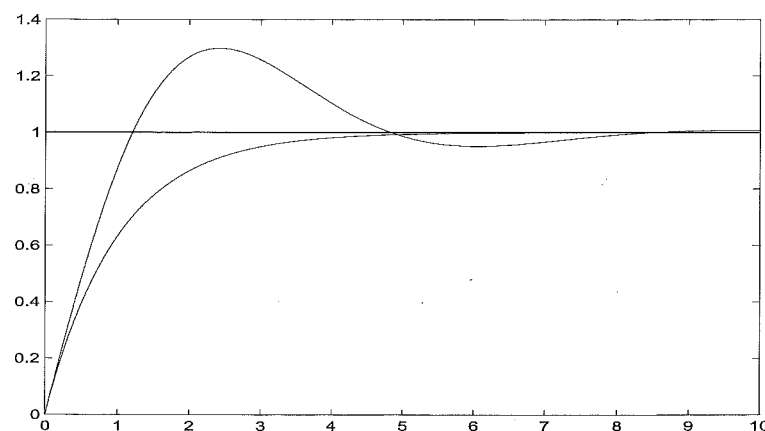


Figura 6.8a: Confronto, nel dominio del tempo, del Caso 2 con un sistema del primo ordine ($\omega_n = 1, p = -1$).

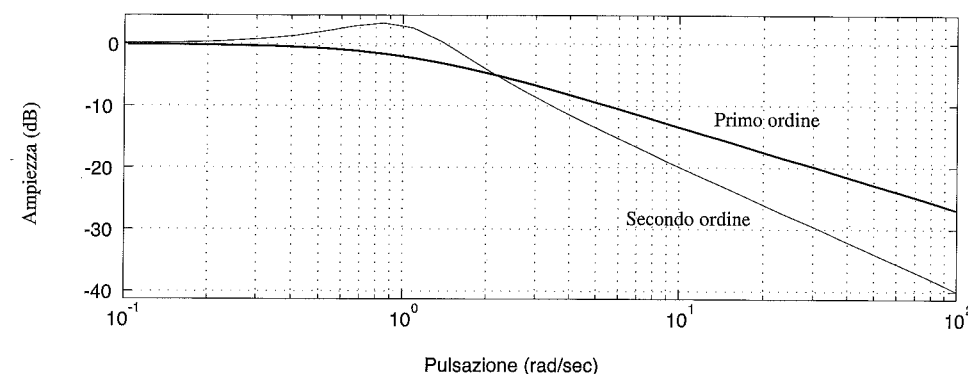


Figura 6.8b: Confronto, nel dominio della frequenza, del Caso 2 con un sistema del primo ordine ($\omega_n = 1, p = 1$).

Un tal genere di risposta viene talvolta preferita a quella del corrispondente sistema del primo ordine: l'aumento del tempo di assestamento, necessario alla stabilizzazione al valore di regime, è infatti compensato da una maggior rapidità di risposta, fatto che rappresenta un ottimo compromesso tra tempi di salita e di assestamento. ♣

Va evidenziato come nel caso di sistemi con poli complessi coniugati emerga, a differenza di quanto accadeva nel caso di poli reali, un ulteriore legame tra picco di risonanza relativo e tempo di assestamento, legame non altrettanto semplice quanto quello esistente tra tempo di salita e banda passante, ma comunque "monotono", nel senso che picco di risonanza relativo e tempo di assestamento crescono entrambi al diminuire di ξ (e tendono entrambi all'infinito per $\xi \rightarrow 0^+$). Ne consegue che specifiche che richiedano tempi di assestamento inferiori ad una data quantità possono comunque essere riformulate in termini di un picco di risonanza relativo non troppo elevato.

Ovviamente, rimangono valide anche per poli complessi le considerazioni effettuate nell'Esempio 6.2.2 a proposito del fatto che il legame tra B_p e t_r risente della presenza di eventuali poli e/o zeri nelle immediate vicinanze di ω_n (con riferimento al diagramma di Bode).

L'analisi degli esempi (del secondo ordine) appena condotta ha portato a formule di una certa complessità. Tali formule sono state necessarie per comprendere a fondo la dipendenza dei singoli parametri (temporali e frequenziali) dal valore di poli e zeri, ma non rivestono particolare importanza nella teoria dei Controlli Automatici. Ben più importanti sono le considerazioni, qualitative ed approssimate, ma valide nella maggior parte dei casi pratici, che possiamo sviluppare a partire dalle formule stesse. In primo luogo, sistemi con piccolo fattore di smorzamento sono, al pari dei sistemi instabili, totalmente insoddisfacenti dal punto di vista del controllo e quindi è opportuno assumere ξ non molto piccolo (in pratica, $1/2 \leq \xi < 1$ è un intervallo

ragionevole). In queste ipotesi non solo tempo di salita e di assestamento esibiscono un legame con la banda passante non molto diverso da quello riscontrato per i sistemi del primo ordine, ma anche per picco di risonanza e tempo di assestamento sarebbe possibile evidenziare un legame semplice.

In secondo luogo, è importante sottolineare come i parametri temporali ora introdotti diventeranno delle *specifiche di progetto* piuttosto che delle proprietà intrinseche del sistema in esame. D'altra parte, dai precedenti esempi sappiamo che requisiti nel dominio del tempo possono essere tradotti in requisiti nel dominio della frequenza, facilmente verificabili dall'osservazione dei diagrammi di Bode. Di conseguenza, per ottenere sistemi *rapidi* dovremo incrementare la banda passante (se necessario) e analogamente per garantire buone risposte transitorie (piccola - o assente - sovraelongazione e rapidi tempi di assestamento) sarà necessario escludere la presenza di poli complessi con fattore di smorzamento troppo piccolo.

6.4 Tipo di un sistema

Finora ci siamo preoccupati soltanto dei fenomeni transitori presenti nella risposta al gradino, ma altrettanta importanza riveste il comportamento a regime del sistema. Abbiamo già introdotto il concetto di regolazione ed evidenziato come nella regolazione un requisito fondamentale sia il poter garantire un legame proporzionale fisso tra il valore costante dell'ingresso ed il valore della corrispondente uscita a regime. In particolare, spesso si desidera che, a regime, il segnale d'uscita coincida con il segnale costante applicato in ingresso.

Se $W(s)$ è strettamente propria, BIBO stabile e con $W(0) \neq 0$, il valore a regime dell'uscita in corrispondenza ad un gradino unitario in ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$ è $W(0)$. Pertanto la regolazione perfetta (con ciò intendendo che l'uscita, a regime, assuma il medesimo valore dell'ingresso, concetto altresì riformulato richiedendo che l'errore a regime tra ingresso ed uscita sia nullo) si ha se e solo se $W(0) = 1$. In altri termini, il sistema regola l'uscita al valore impostato in ingresso (con errore nullo) (i.e., insegue perfettamente ogni segnale a gradino) se e solo se $W(0) = 1$.

Il concetto di regolazione come "inseguimento di un segnale costante" può essere naturalmente esteso. Possiamo, infatti, analizzare la possibilità di inseguire, con errore a regime nullo o meno, un generico segnale canonico (si veda il paragrafo 2.1), ovvero un segnale causale di tipo polinomiale descritto da $\delta_{-(k+1)}(t) = \frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)$, $k \in \mathbb{N}$. Giungiamo in tal modo alla seguente definizione.

Definizione 6.4.1 Sia dato un sistema SISO, lineare, tempo-invariante, causale e BIBO stabile, a tempo continuo, la cui funzione di trasferimento $W(s) \in \mathbb{R}(s)$ sia strettamente propria e soddisfi $W(0) \neq 0$. Diciamo che tale sistema è **di tipo k** se esso insegue con errore di regime permanente costante ma non nullo il segnale canonico $\delta_{-(k+1)}(t) = \frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)$. In altri termini, se indichiamo con $w_{-(k+1)}(t)$ la risposta (forzata) del sistema al segnale di ingresso $u(t) = \delta_{-(k+1)}(t)$, il sistema è di

tipo k se

$$e_{rp}^{(k+1)} := \lim_{t \rightarrow +\infty} [\delta_{-(k+1)}(t) - w_{-(k+1)}(t)]$$

esiste finito ed è un numero (reale) non nullo.

Come vedremo tra breve, la definizione è ben posta, nel senso che per ciascun sistema esiste ed è unico l'indice $k \in \mathbb{Z}_+$ per il quale la precedente condizione è verificata. Per valori di $i < k$, infatti, il sistema sarà in grado di inseguire perfettamente il segnale canonico $\frac{t^i}{i!} \delta_{-1}(t)$, con ciò intendendo che il corrispondente $e_{rp}^{(i+1)}$ sarà nullo, mentre per $i > k$ avremo $e_{rp}^{(i+1)}$ di valore infinito.

In base alle considerazioni fatte in precedenza sulla capacità di inseguire il gradino unitario, è chiaro che il sistema è **di tipo 0**, ovvero insegue con errore di regime permanente costante e non nullo il gradino unitario, se e solo se $W(0) \neq 1$ e in tal caso

$$e_{rp}^{(1)} := \lim_{t \rightarrow +\infty} [\delta_{-1}(t) - w_{-1}(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\delta_{-1}(t) - W(0)\delta_{-1}(t)] = 1 - W(0).$$

Viceversa, se $W(0) = 1$ il sistema insegue il gradino con errore di regime permanente nullo e pertanto, come vedremo, risulterà **di tipo 1** o superiore.

Consideriamo ora il problema dell'inseguimento della **rampa lineare**. Vogliamo caratterizzare i sistemi di tipo 1, ovvero in grado di inseguire con errore di regime permanente costante e non nullo la rampa e vogliamo dimostrare che i sistemi di tipo 0 inseguono la rampa con un errore a regime infinito. In corrispondenza a $u(t) = \delta_{-2}(t) = t \delta_{-1}(t)$ si trova $U(s) = 1/s^2$, e pertanto

$$W_{-2}(s) = W(s) \frac{1}{s^2} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + C(s), \quad (6.13)$$

dove

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 W_{-2}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = W(0), \\ B &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[W_{-2}(s) - \frac{W(0)}{s^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{W(s)}{s^2} - \frac{W(0)}{s^2} \right] = W^{(1)}(0) \end{aligned}$$

e $C(s)$ è, nell'ipotesi di BIBO stabilità, una funzione razionale (strettamente propria) i cui poli sono tutti contenuti nel semipiano $\text{Re}(s) < 0$. Pertanto $C(s)$ corrisponde ad un segnale $c(t)$ tendente a zero per t tendente all'infinito e il sistema risponde, a regime, alla rampa lineare unitaria in ingresso con il segnale

$$w_{-2}(t) \approx (W(0)t + W^{(1)}(0)) \delta_{-1}(t).$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned} e_{rp}^{(2)} &:= \lim_{t \rightarrow +\infty} [\delta_{-2}(t) - w_{-2}(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \{t\delta_{-1}(t) - [W(0)t + W^{(1)}(0)]\delta_{-1}(t)\} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [1 - W(0)]t - W^{(1)}(0) \end{aligned}$$

e pertanto:

- se $W(0) \neq 1$ (il sistema è di tipo 0), $e_{rp}^{(2)}$ tende a infinito;
- se $W(0) = 1$ ma $W^{(1)}(0) \neq 0$, allora il sistema insegue con errore di regime permanente costante ma non nullo $e_{rp}^{(2)} = -W^{(1)}(0)$ la rampa lineare (e quindi si tratta di un sistema di tipo 1, che esibisce errore nullo a regime nella risposta al gradino);
- se $W(0) = 1$ e $W^{(1)}(0) = 0$ allora il sistema insegue con errore di regime permanente nullo (non solo il gradino, ma anche) la rampa lineare.

Procedendo in questo modo si dimostra in generale che, nelle ipotesi in cui ci siamo messi, un sistema risponde al segnale canonico $\delta_{-(k+1)}(t) = \frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)$ con un segnale del tipo

$$w_{-(k+1)}(t) = W(0)\delta_{-(k+1)}(t) + W^{(1)}(0)\delta_{-k}(t) + \frac{W^{(2)}(0)}{2!}\delta_{-(k-1)}(t) + \dots + \frac{W^{(k)}(0)}{k!}\delta_{-1}(t) + c(t),$$

con $c(t)$ segnale convergente a zero. Pertanto il sistema è di tipo $k \geq 1$ se e solo se

$$W(0) = 1, \quad W^{(1)}(0) = \dots = W^{(k-1)}(0) = 0, \quad \text{ma} \quad W^{(k)}(0) \neq 0.$$

E in tal caso $e_{rp}^{(k+1)} = -\frac{W^{(k)}(0)}{k!}$. Da ciò segue immediatamente quanto affermato in precedenza relativamente al fatto che un sistema di tipo k insegue perfettamente (cioè con errore a regime nullo) i segnali canonici $\delta_{-(i+1)}(t)$ per $i < k$ e insegue con errore divergente i segnali canonici $\delta_{-(i+1)}(t)$ per $i > k$.

L'inseguimento di rampe lineari o, più in generale, di segnali polinomiali, che abbiamo ora analizzato, può essere interpretato come un primo semplice esempio di **asservimento**. Tale concetto verrà richiamato nel prossimo capitolo, ma anticipiamo sin d'ora che l'analisi di tale problema, certamente più complesso di quello della regolazione, esula dagli scopi di questo libro.

In Figura 6.9 è illustrata la risposta alla rampa del sistema caratterizzato dalla funzione di trasferimento (6.12), che è di tipo 2, per $\omega_n = 1$.

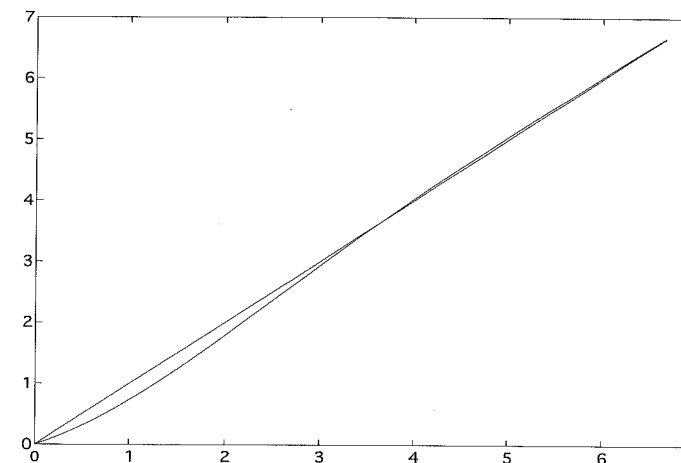


Figura 6.9: Risposta alla rampa lineare di un tipico sistema di tipo 2.

6.5 Sensibilità alle variazioni parametriche

Per concludere il capitolo, accenniamo brevemente ad un altro elemento importante per valutare le prestazioni di un sistema BIBO stabile: la cosiddetta **sensibilità alle variazioni parametriche**. Nella pratica, la funzione $W(s)$ è spesso nota in modo incerto o può modificare la sua espressione per effetto di variazioni delle condizioni operative. Si può tener conto di entrambi gli effetti semplicemente immaginando che $W(s)$ dipenda da un parametro (eventualmente vettoriale) α . In tal modo il processo potrà essere descritto mediante una $W(s, \alpha)$, dove α varia in un insieme ammissibile I , ed un valore particolare del parametro, $\alpha_0 \in I$, corrisponderà alla situazione *nominale*. Avremo, pertanto, un impianto nominale $W_0(s) := W(s, \alpha_0)$, appartenente ad una famiglia di processi $\{W(s, \alpha), \alpha \in I\}$.

Un possibile esempio è rappresentato dal caso, già considerato in precedenza, in cui il guadagno della $W(s)$ risulti variabile ed essa risulti descritta, pertanto, dall'espressione

$$W(s) = \frac{\alpha}{s+1}.$$

Un'altra situazione possibile è quella in cui il sistema sia del primo o secondo ordine ma la collocazione di un suo polo non sia completamente nota, nel qual caso $W(s)$ diventa, ad esempio e rispettivamente,

$$W(s) = \frac{10}{s+\alpha} \quad \text{oppure} \quad W(s) = \frac{10}{(1+s)(1+\alpha s)}.$$

In quest'ultimo caso, se $\alpha_0 = 0$, il sistema nominale è un sistema del primo ordine, ma nella realtà l'impianto presenta due poli. Questa situazione è piuttosto frequente, dal momento che, in fase di modellizzazione, spesso si trascurano "poli ad alta

frequenza". Ciò può causare spiacevoli sorprese, come sarà chiarito studiando la retroazione.

Per capire cosa intendiamo con il termine *sensibilità della risposta in frequenza* alle variazioni del parametro α , supponiamo che il parametro α in $W(j\omega, \alpha)$ subisca una piccola variazione, passando al valore $\alpha + \Delta\alpha$. Si ha allora

$$W(j\omega, \alpha + \Delta\alpha) \approx W(j\omega, \alpha) + \frac{\partial W(j\omega, \alpha)}{\partial \alpha} \cdot \Delta\alpha = W(j\omega, \alpha)(1 + S\Delta\alpha),$$

dove

$$S = S(j\omega, \alpha) := \frac{\partial W(j\omega, \alpha)}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{W(j\omega, \alpha)}$$

è la cosiddetta **funzione di sensitività relativa** che esprime, per una fissata pulsazione ω , in che misura $W(j\omega, \alpha)$ risenta (in senso relativo, cioè in percentuale) delle variazioni del parametro α . Chiaramente si vorrebbe aver a che fare con sistemi le cui prestazioni siano il più possibile costanti nel tempo e ciò si può tradurre nel requisito di avere una funzione di sensitività relativa che assuma valori molto piccoli (in modulo) e al limite nulli (nella situazione ideale).

Concludiamo il capitolo con alcune considerazioni:

- Il requisito precedentemente discusso di *avere una funzione di sensitività piccola* è un po' vago, dal momento che la sensitività dipende (in genere fortemente) dalla frequenza e quindi tale requisito va di norma accompagnato dalla specifica dell'intervallo (o intervalli) di frequenze in cui è desiderabile una bassa sensitività. Considerazioni sul regime transitorio e sul regime permanente ci permettono di determinare in quali bande di frequenze sia necessaria una sensitività piccola.

Ad esempio, poiché il comportamento a regime dipende dal tipo del sistema, cioè dal comportamento di $W(j\omega)$ alla frequenza nulla (o meglio, in un piccolissimo intorno di $\omega = 0$), per garantire che le specifiche sul tipo vengano rispettate anche in presenza di piccole variazioni parametriche è necessario garantire bassa (e, possibilmente, nulla) sensitività alla pulsazione $\omega = 0$. In particolare, se vogliamo errore nullo al gradino, è indispensabile che per il processo nominale risulti $W(0) = 1$. In generale, la variazione di alcuni parametri potrebbe non rendere più soddisfatta tale condizione, inconveniente che non si verificherebbe se (e solo se) la sensitività fosse esattamente nulla per $\omega = 0$.

Anche per il comportamento transitorio possiamo fare considerazioni analoghe: se vogliamo mantenere pressoché invariati tempo di salita, di assestamento e sovraelongazione, pur in presenza di variazioni dei parametri, è sufficiente verificare che banda passante e picco di risonanza siano poco sensibili alle variazioni dei parametri stessi e tali parametri dipendono dall'andamento di $W(j\omega)$ in un'opportuna *banda di frequenze* (cioè in un intervallo del tipo $\omega \in [0, \bar{\omega}]$, con

$\bar{\omega}$ non troppo superiore alla banda passante nominale del sistema). In definitiva, è evidente che se la funzione sensitività assume valori piccoli - o nulli - in *bassa frequenza*, cioè in un opportuno intervallo di frequenze con estremo inferiore l'origine, con particolare riguardo alla frequenza nulla, molti dei problemi pratici relativi alle prestazioni a regime ed in transitorio vengono risolti. Il comportamento della funzione sensitività alle alte frequenze in quest'ambito non è molto rilevante, ma, come vedremo, avrà la sua importanza per garantire la stabilità del sistema retroazionati, che saranno analizzati nel seguito.

- Ancora una volta, val la pena di evidenziare come finora abbiamo affrontato le diverse problematiche nell'ottica della pura *analisi*: una volta assegnata la funzione $W(s, \alpha)$, ne abbiamo semplicemente valutato la funzione sensitività e abbiamo verificato se essa è *buona* oppure no. Tuttavia, nell'ambito della *sintesi* dei sistemi di controllo, a fianco di specifiche di progetto quali tipo, banda passante, ecc. si potrebbe imporre anche qualche requisito sulla funzione sensitività, che, come vedremo, viene modificata, rispetto a quella originaria, dal sistema di controllo progettato. In generale, tutti i parametri analizzati in questo capitolo possono essere modificati mediante controllo in retroazione. Una volta compreso quali proprietà dovrebbero avere banda passante, funzione di sensitività, ecc., perché il sistema si comporti *bene*, sotto vari punti di vista, il progetto del controllore non può prescindere da queste esigenze e deve garantire che i parametri del sistema complessivo abbiano tali proprietà, indipendentemente dall'espressione della funzione di trasferimento $W(s)$ originaria.