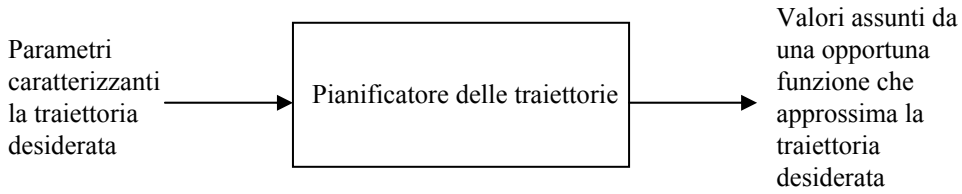
PIANIFICAZIONE DELLE TRAIETTORIE

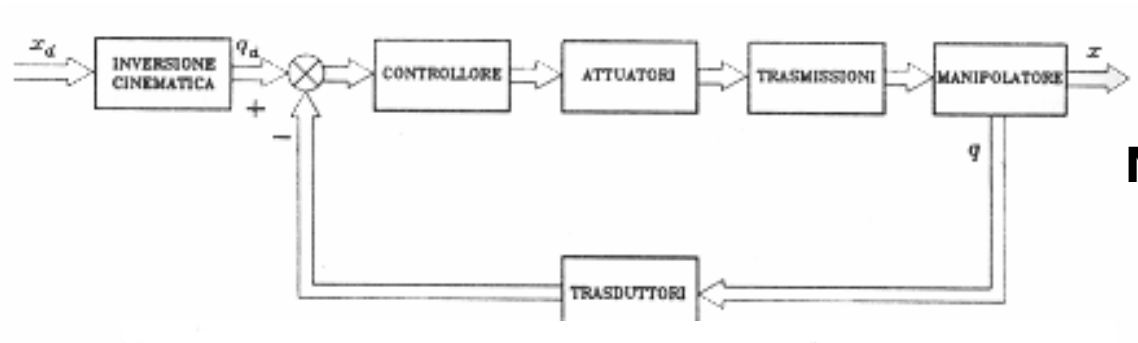
Paolo Fiorini
Dipartimento di Informatica
Università degli Studi di Verona

Introduzione

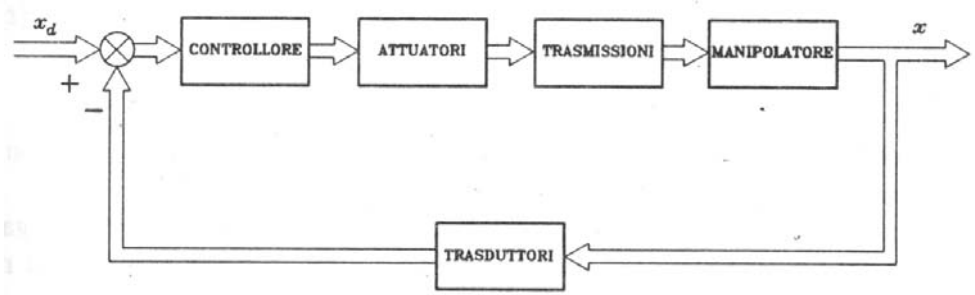
L'obiettivo della pianificazione di traiettorie è quello di *generare gli ingressi di riferimento per il sistema di controllo del moto* che assicura l'esecuzione da parte del manipolatore delle traiettorie pianificate.

Controllo della Traiettoria





Nello spazio dei giunti



Nello spazio operativo

Definizione del Problema

Si richiede che il robot sia in grado di muoversi *da una postura iniziale ad una postura finale* assegnata.

La transizione deve essere caratterizzata da leggi di moto che richiedono agli attuatori di esplicare forze generalizzate ai giunti che rispettino vincoli di ampiezza e che non vadano ad eccitare *modi di risonanza* meccanica.

Nasce pertanto l'esigenza di disporre di algoritmi che generino traiettorie di riferimento a c*urvatura regolare*.

Nomenclatura

- *Percorso:* luogo dei punti dello spazio dei giunti, o dello spazio operativo, che il manipolatore deve descrivere nell'esecuzione del movimento assegnato (è quindi solo una descrizione di tipo geometrico).
- *Traiettoria:* percorso su cui sia specificata la legge oraria di moto, assegnando ad esempio velocità e/o accelerazioni in ogni suo punto.

La Pianificazione

- Definizione del percorso
- Vincoli del percorso
- Vincoli del manipolatore

→

- Punti estremi
- Eventuali punti intermedi
- Primitive geometriche delle linee di collegamento
- Tempo complessivo di esecuzione
- Vincoli massime velocità e accelerazioni

La definizione del percorso può essere eseguita nello *spazio dei giunti o* nello *spazio operativo.* Tuttavia, poiché l'azione di controllo sul manipolatore viene esplicata a livello dei giunti, dalla sequenza di variabili nello spazio operativo si ricostruisce la sequenza corrispondente di variabili nello spazio dei giunti mediante gli algoritmi di inversione cinematica

La Pianificazione

Definizione della pianificazione di un movimento

- viene assegnato nello spazio operativo
- si specificano locazione iniziale e finale dell'organo terminale
- si indicano eventuali locazioni intermedie
- si fissano i tempi di percorrenza di alcuni percorsi geometrici

Se si vuole pianificare una traiettoria *nello spazio dei giunti* bisogna ricavare i valori delle variabili di giunto corrispondenti

Si ricorre in tal caso ad algoritmi per l'inversione cinematica.

Caratteristiche Richieste

Le traiettorie generate dall'algoritmo di pianificazione devono avere determinate caratteristiche:

- traiettorie *poco onerose* dal punto di vista computazionale
- le posizioni e le velocità dei giunti siano devono essere *funzioni continue del tempo* (può essere di interessante/utile imporre anche la continuità sulle accelerazioni);
- devono essere *minimizzati effetti indesiderati*, quali ad esempio traiettorie a curvatura non regolare per l'interpolaziene di punti che individuano un percorso.

Moto Punto-Punto

Il manipolatore deve muoversi da una configurazione iniziale ad una finale in un tempo t_f

Condizioni:

- non ci interssa la traiettoria dell'organo terminale
- la traiettoria deve essere ottimizzata
- per semplicità si considera un singolo giunto q la cui variabile di giunto è espressa in funzione del tempo dall'equazione $q(t)$

Scelta dell'Indice di Qualità

Si consideri quanto segue:

- Siano q_i e q_f le posizioni iniziali e finali del giunto
- Sia t_f il tempo di esecuzione
- Sia τ la coppia generata dal motore
- Sia ω la velocità del giunto

Si può scegliere di imporre la minima dissipazione di energia

Scelta dell'Indice di Qualità

Si deve calcolare la soluzione dell'equazione differenziale

$$I\dot{\omega} = \tau$$

Che soddisfi la condizione:

$$\int_0^{t_f} \omega(t)dt = q_f - q_i$$

E che minimizzi l'indice di qualità:

$$\int_0^{t_f} \tau^2(t)dt$$

E' dimostrabile che la soluzione risulta del tipo

$$\omega(t) = at^2 + bt + c$$

NB Semplicistico. Non considera ad esempio il momento di inerzia legato alla configurazione corrente del giunto

Polinomio Cubico

In base a quanto visto si può scegliere di descrivere la *legge di moto* in base ad un polinomio cubico

$$q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$
$$\dot{q}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$
$$\ddot{q}(t) = 6a_3 t + 2a_2$$

Disponiamo di 4 coefficienti quindi possiamo specificare 4 condizioni: $q_i, q_f, \dot{q}_i, \dot{q}_f$

Polinomio Cubico

Sostituendo i valori nei polinomi considerati si ottiene:

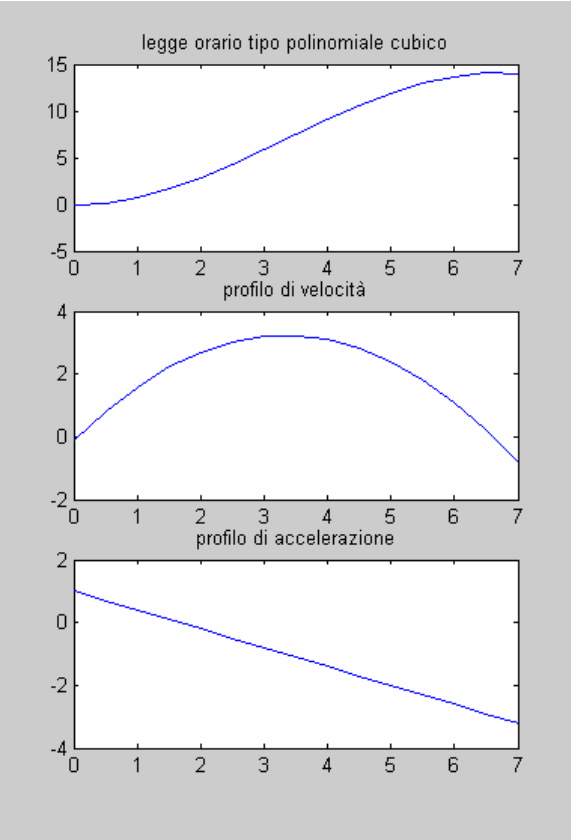
$$a_0 = q_i$$

$$a_1 = \dot{q}_i$$

$$a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_1 t_f + a_0 = q_f$$

$$3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1 = \dot{q}_f$$

Esempio



Condizioni iniziali:

$$q_i = 0$$

$$q_f = \pi$$

$$t_f = 1$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_f = 0$$

Profilo Trapezoidale

Un approccio alternativo con leggi orarie di tipo ***polinomiale misto*** viene adottato di frequente nella pratica industriale

Un *profilo di velocità trapezoidale* impone una accelerazione costante nella fase di partenza, una velocità di crociera, e una decelerazione costante nella fase di arrivo.

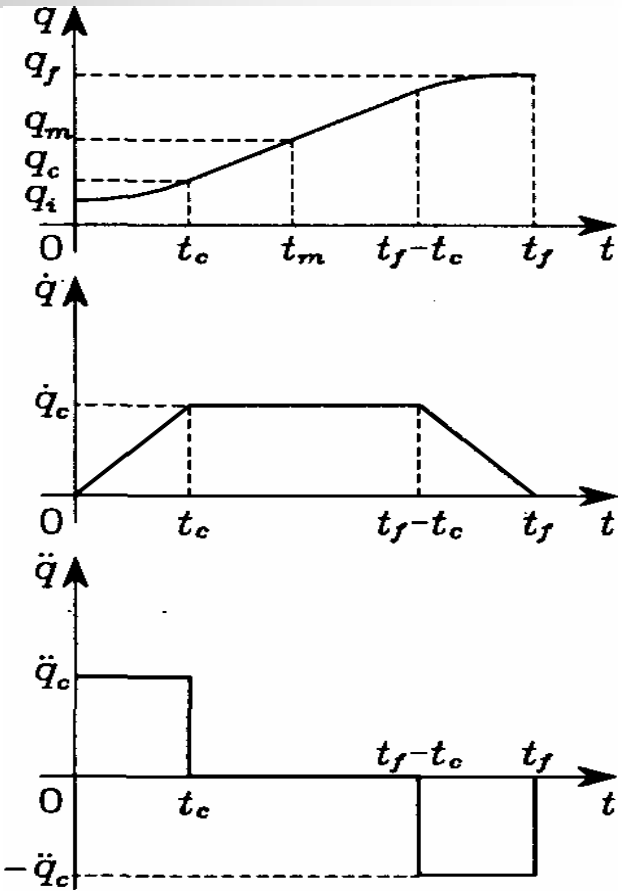
La traiettoria che ne risulta è costituita da un tratto lineare raccordato con due tratti parabolici nell'intorno delle posizioni iniziale e finale.

Profilo Trapezoidale

Ipotesi:

- velocità iniziale e finale nulle
- i tratti ad accelerazione costante abbiano durata uguale

Questo tipo di scelta comporta una simmetria della traiettoria rispetto al punto medio q_m e al tempo medio t_m



Profilo Trapezoidale

La traiettoria deve soddisfare dei vincoli per assicurare che la transizione da q_i , a q_f avvenga in un tempo t_f. La velocità alla fine del tratto parabolico deve eguagliare la velocità (costante) del tratto lineare, cioè

$$\ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c}$$

Quindi:

$$q_c = q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^2$$

Da cui, combinando le precedenti:

$$\ddot{q}_c t_c^2 - \ddot{q}_c t_f t_c + q_f - q_i = 0$$

Profilo Trapezoidale

Noti t_f, q_i e q_f è possibile ricavare la soluzione:

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}}$$

Col vincolo:

$$|\ddot{q}_c| \geq \frac{4|q_f - q_i|}{t_f^2}$$

In definitiva:

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2 & 0 \leq t \leq t_c \\ q_i + \ddot{q}_c t_c (t - t_c/2) & t_c < t \leq t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2}\ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c < t \leq t_f. \end{cases}$$

Profilo Trapezoidale

Assegnare l'accelerazione nel tratto parabolico non costituisce l'unico modo per individuare traiettorie in velocità a profilo trapezoidale. Oltre a q_i, q_f, t_f, si può specificare la velocità di crociera q_c che è soggetta al vincolo

$$\frac{|q_f - q_i|}{t_f} < |\dot{q}_c| \leq \frac{2|q_f - q_i|}{t_f}.$$

da $\dot{q}_c = \ddot{q}_c t_c$

$$t_c = \frac{q_i - q_f + \dot{q}_c t_f}{\dot{q}_c}$$

Quindi:

$$\ddot{q}_c = \frac{\dot{q}_c^2}{q_i - q_f + \dot{q}_c t_f}$$

Moto su Percorso Assegnato

In numerose applicazioni per descrivere il percorso si ricorre alla *specificazione di un numero di punti maggiore* di due.

Per operazioni complesse può essere conveniente assegnare una *sequenza di punti*, in modo da garantire un controllo maggiore delle traiettorie percorse.

I punti sono *assegnati in maniera più fitta* in quei tratti in cui il percorso deve *evitare ostacoli* o si prevede che abbia una *forte curvatura*.

Si affronta il problema di generazione della traiettoria quando siano specificati N punti, detti *punti di percorso*.

Per ogni variabile di giunto si hanno N vincoli e quindi si può pensare di usare un polinomio di grado $N-1$.

Interpolazione Polinomiale

Teorema *Dati $n+1$ nodi distinti $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ed i corrispondenti valori da interpolare $y_0, y_1, \ldots, y_n$, esiste ed è unico il polinomio interpolante $p_n(x)$ di grado al più n. Inoltre tale polinomio è indipendente dalla numerazione delle coppie (x_i, y_i).*

Il polinomio interpolatore è:

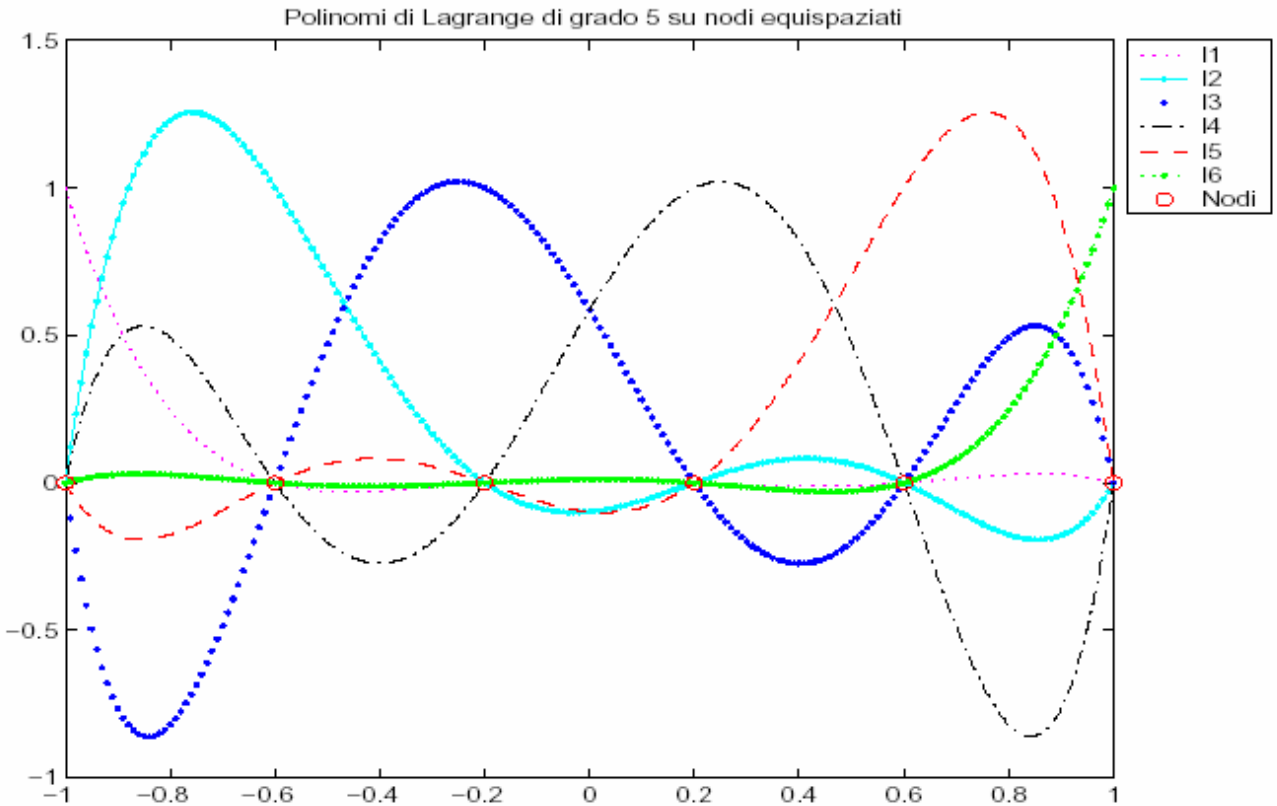
$$p^L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, \ell_i(x) = y_0 \, \ell_0(x) + y_1 \, \ell_1(x) + \ldots + y_n \, \ell_n(x)$$

Dove gli $\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$

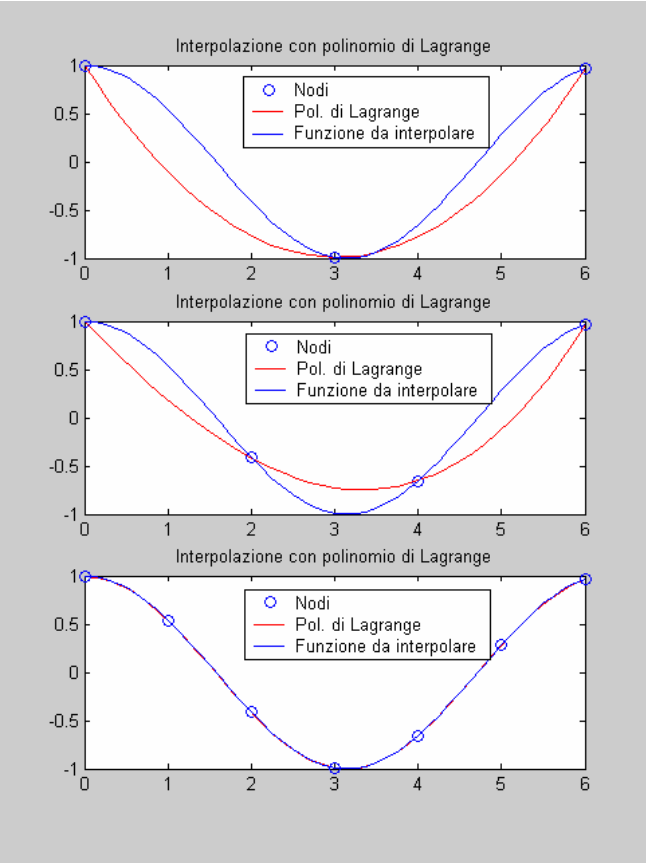
sono i polinomi elementari di Lagrange e sono tali che:

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Polinomi di Lagrange



Interpolazione di Lagrange



Svantaggi dei Polinomi

Abbiamo detto che per ogni variabile di giunto si hanno N vincoli e quindi si può pensare di usare un polinomio di grado $N-1$

Questa scelta tuttavia presenta molti *svantaggi*:

- non è possibile assegnare velocità iniziale e finale
- al crescere del grado del polinomio aumenta il suo carattere oscillatorio
- l'accuratezza numerica con cui può essere calcolato un polinomio peggiora all'aumentare del suo grado
- una volta impostato il sistema di equazioni dei vincoli, risulta oneroso risolverlo
- i coefficienti del polinomio dipendono da tutti i punti assegnati: se si vuole cambiare uno dei punti di percorso si deve ricalcolare il tutto.

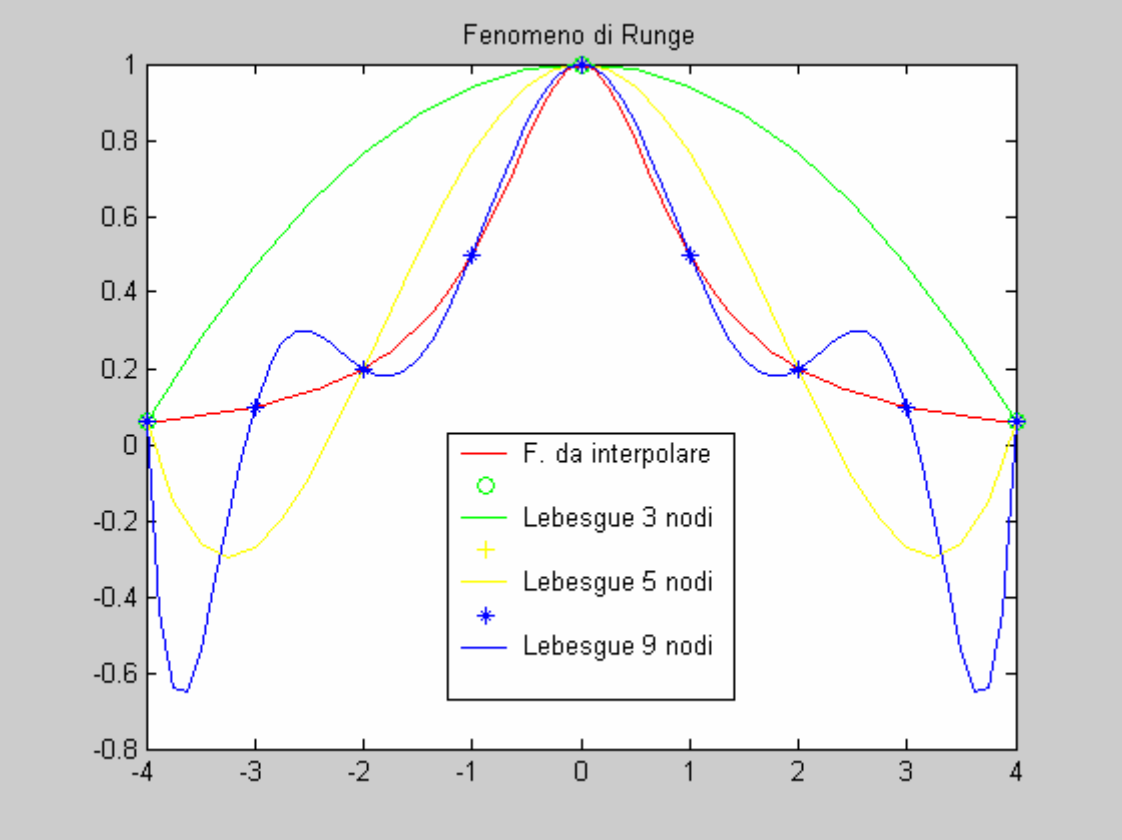
Svantaggi dei Polinomi

A differenza di quanto ci si possa aspettare, quando si interpola con il metodo di Lagrange, non sempre aumentare il numero di nodi migliora il grado dell'approssimazione. Aumentare il numero dei nodi significa aumentare il grado del polinomio interpolatore, il che significa accentuare il carattere oscillatorio della funzione.

Inoltre, l'interpolazione dipende dalla scelta dei nodi: non sempre la scelta di nodi equispaziati è favorevole (anzi!).

E' possibile dimostrare che esistono tecniche di scelta dei nodi che, a parità di numero, migliorano il grado di approssimazione della funzione interpolante.

Svantaggi dei Polinomi



Errata Corrige: sostituire Lagrange al posto di Lebesgue nella figura

Interpolazione a Tratti

Questi problemi possono essere superati se invece di considerare un solo polinomio interpolatore di grado elevato, si fa ricorso a un *insieme opportuno di polinomi interpolatori* di grado più basso uniti tra di loro nei punti assegnati lungo il percorso.

Per quanto esposto in precedenza, il polinomio interpolatore di grado più basso che può essere preso in considerazione è il *polinomio cubico*, in quanto esso consente di imporre la continuità della velocità nei punti di percorso.

Interpolazione a Tratti

Facciamo riferimento ad una singola variabile di giunto

Individuiamo una funzione $q(t)$ costituita da una sequenza di polinomi cubici $\Pi_k(t)$ con $k=1,\ldots,N-1$, continua insieme alla sua derivata prima

$q(t)$ assuma valori q_k per $t = t_k$ $(k = 1,\ldots, N)$ con $q_1 = q_i$, $t=0$ e $q_n = q_f$, $t_n = t_f$

q_k rappresentano i punti di percorso che caratterizzano la traiettoria desiderata per $t = t_k$

Interpolazione a Tratti

Si possono presentare diverse situazioni:

- i valori di *q(t)* in corrispondenza dei punti di percorso sono imposti arbitrariamente
- i valori di *q(t)* in corrispondenza dei punti di percorso sono assegnati in base ad un opportuno criterio
- l'accelerazione *q(t)* deve essere continua in corrispondenza dei punti di percorso

Per semplificare il problema si possono anche determinare sequenze di polinomi di grado minore di tre che individuano traiettorie che, in istanti di tempo assegnati, passino in prossimità dei punti di percorso imposti.

Vincoli sulle Velocità

Questa soluzione richiede che l'utente sia in grado di specificare, per ogni punto di percorso, la velocità desiderata per ogni variabile di giunto; la soluzione non presenta novità concettuali rispetto a quanto esposto in precedenza.

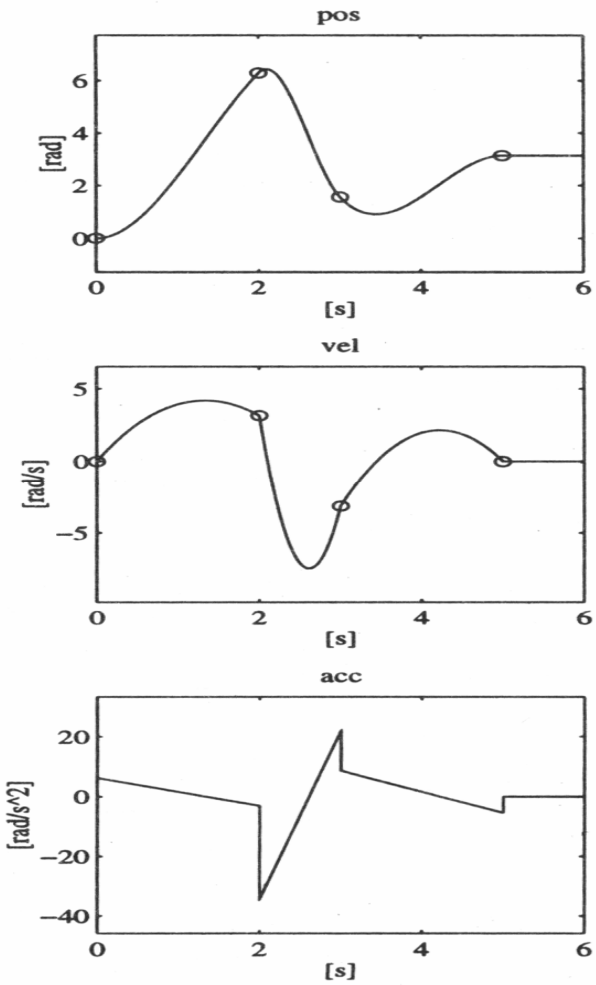
Il sistema di equazioni che consente di calcolare i coefficienti degli N - 1 polinomi cubici che connettono tra di loro gli N punti di percorso è ricavato imponendo le seguenti condizioni sul generico polinomio $\Pi_k(t)$ che raccorda q_k con q_{k+1}, $k = 1,\ldots,N-1$:

Vincoli sulle Velocità

$$\Pi_k(t_k) = q_k$$
$$\Pi_k(t_{k+1}) = q_{k+1}$$
$$\dot{\Pi}_k(t_k) = \dot{q}_k$$
$$\dot{\Pi}_k(t_{k+1}) = \dot{q}_{k+1}.$$

Si ottengono N-1 sistemi di 4 equazioni in 4 incognite. Velocità iniziale e finale sono tipicamente poste a zero, mentre la continuità della stessa nei punti di passaggio viene garantita ponendo: $\dot{\Pi}_k(t_{k+1}) = \dot{\Pi}_{k+1}(t_{k+1})$

Esempio


pos
[rad]
6
4
2
0
0
2
4
6
[s]
vel
[rad/s]
5
0
−5
0
2
4
6
[s]
acc
[rad/s^2]
20
0
−20
−40
0
2
4
6
[s]

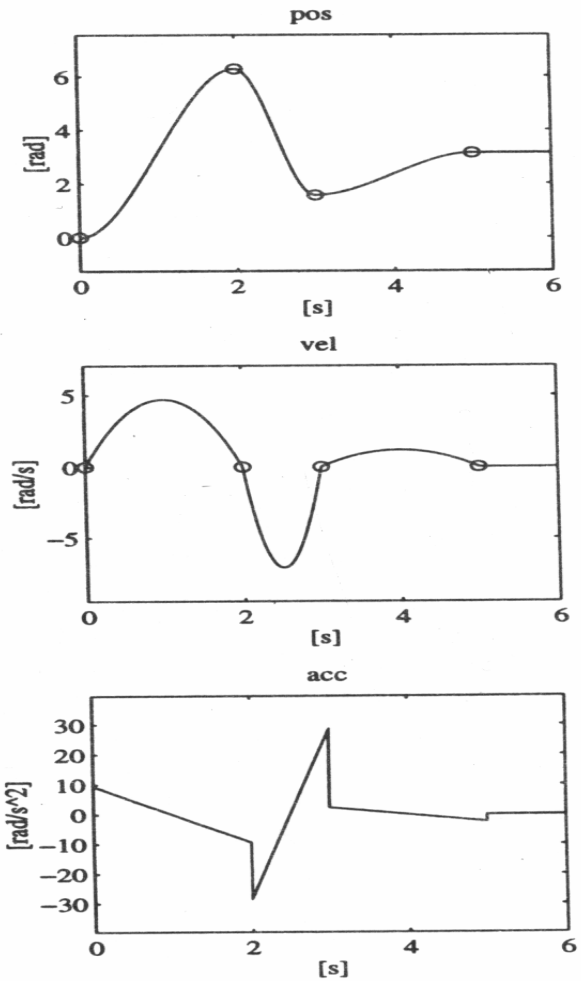
Velocità Calcolate nei Punti di Percorso

In questo caso è necessario individuare la velocità del giunto in corrispondenza del punto di percorso. Se si interpolano i punti di percorso con segmenti rettilinei, è possibile calcolare le velocità nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= 0 \\
\dot{q}_k &= \begin{cases} 0 & \operatorname{sgn}(v_k) \neq \operatorname{sgn}(v_{k+1}) \\ \frac{1}{2}(v_k + v_{k+1}) & \operatorname{sgn}(v_k) = \operatorname{sgn}(v_{k+1}) \end{cases} \\
\dot{q}_N &= 0,
\end{aligned}
$$

dove $v_k = (q_k - q_{k-1})/(t_k - t_{k-1})$

Esempio


pos
[rad]
6
4
2
0
0
2
4
6
[s]
vel
[rad/s]
5
0
−5
0
2
4
6
[s]
acc
[rad/s^2]
30
20
10
0
−10
−20
−30
0
2
4
6
[s]

Interpolazione con le Spline

Le soluzioni appena illustrate non consentono di assicurare la continuità dell'accelerazione nei punti di percorso. Dati N punti, anche l'accelerazione risulta continua se in corrispondenza di ogni t_k si impongono quattro vincoli:

- 2 vincoli di posizione per ognuna delle due cubiche contigue
- 1 vincolo per garantire

  la continuità della velocità
- 1 vincolo per garantire

  la continuità dell'accelerazione

$$\Pi_{k-1}(t_k) = q_k$$
$$\Pi_{k-1}(t_k) = \Pi_k(t_k)$$
$$\dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k)$$
$$\ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k)$$

Interpolazione con Spline Cubiche

Il sistema non è risolvibile essendo costituito da 4(N-2) equazioni, scritte per i punti intermedi e 6 equazioni scritte per i punti estremi dovendo escludere i vincoli $\Pi_o(t_1)=q_i$ e $\Pi_N(t_f)=q_f$ non definiti.

$\dot{\Pi}_0(t_1), \ddot{\Pi}_0(t_1), \dot{\Pi}_N(t_f), \ddot{\Pi}_N(t_f)$ vanno considerati come valori imposti.

→ 4(N-2) equazioni nei 4(N-1) coefficienti incogniti

Si eliminano le equazioni che consento di assegnare ad arbitrio accelerazione iniziale e finale ed usare quindi pol. di 4° grado per il primo e l'ultimo tratto

Si introducono due punti virtuali su cui è possibile imporre vincoli di posizione, velocità e accelerazione, *senza assegnare il valore specifico di posizione* → Determinazione di N+1 polinomi cubici

Interpolazione con Spline Cubiche

Quindi ora abbiamo N+2 istanti di tempo. Indichiamo con t2 e tN+1 i punti virtuali introdotti. Il sistema di equazioni per la determinazione dei polinomi cubici è formato dalle 4(N-2) equazioni scritte per gli N-2 punti intermedi:

$$\begin{aligned} \Pi_{k-1}(t_k) &= q_k \\ \Pi_{k-1}(t_k) &= \Pi_k(t_k) \\ \dot{\Pi}_{k-1}(t_k) &= \dot{\Pi}_k(t_k) \\ \ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) &= \ddot{\Pi}_k(t_k) \end{aligned}$$

k=3,....,N

dalle 6 equazioni scritte per i punti iniziale e finale:

$$\begin{aligned} \Pi_1(t_1) &= q_i \\ \dot{\Pi}_1(t_1) &= \dot{q}_i \\ \ddot{\Pi}_1(t_1) &= \ddot{q}_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{N+1}(t_{N+2}) &= q_f \\ \dot{\Pi}_{N+1}(t_{N+2}) &= \dot{q}_f \\ \ddot{\Pi}_{N+1}(t_{N+2}) &= \ddot{q}_f \end{aligned}$$

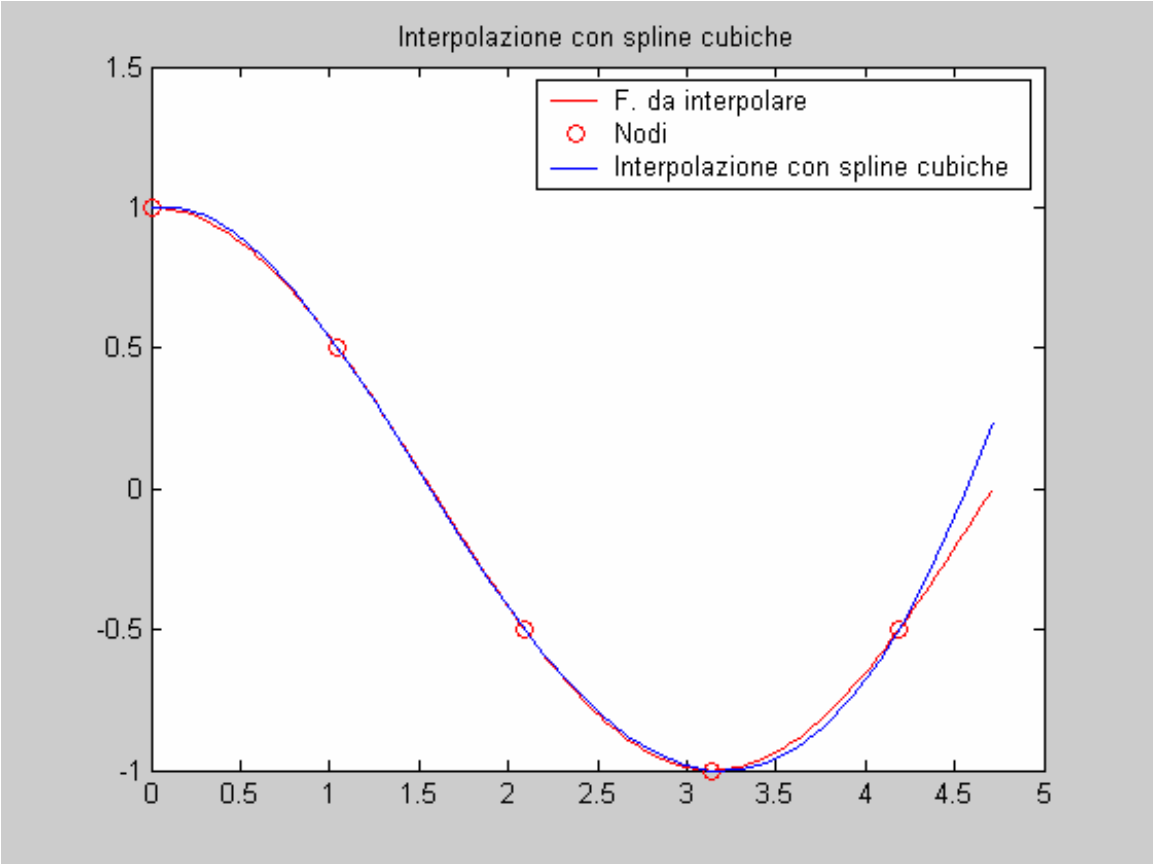
e dalle 6 equazioni scritte per i punti virtuali:

$$\begin{aligned} \Pi_{k-1}(t_k) &= \Pi_k(t_k) \\ \dot{\Pi}_{k-1}(t_k) &= \dot{\Pi}_k(t_k) \\ \ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) &= \ddot{\Pi}_k(t_k) \end{aligned}$$

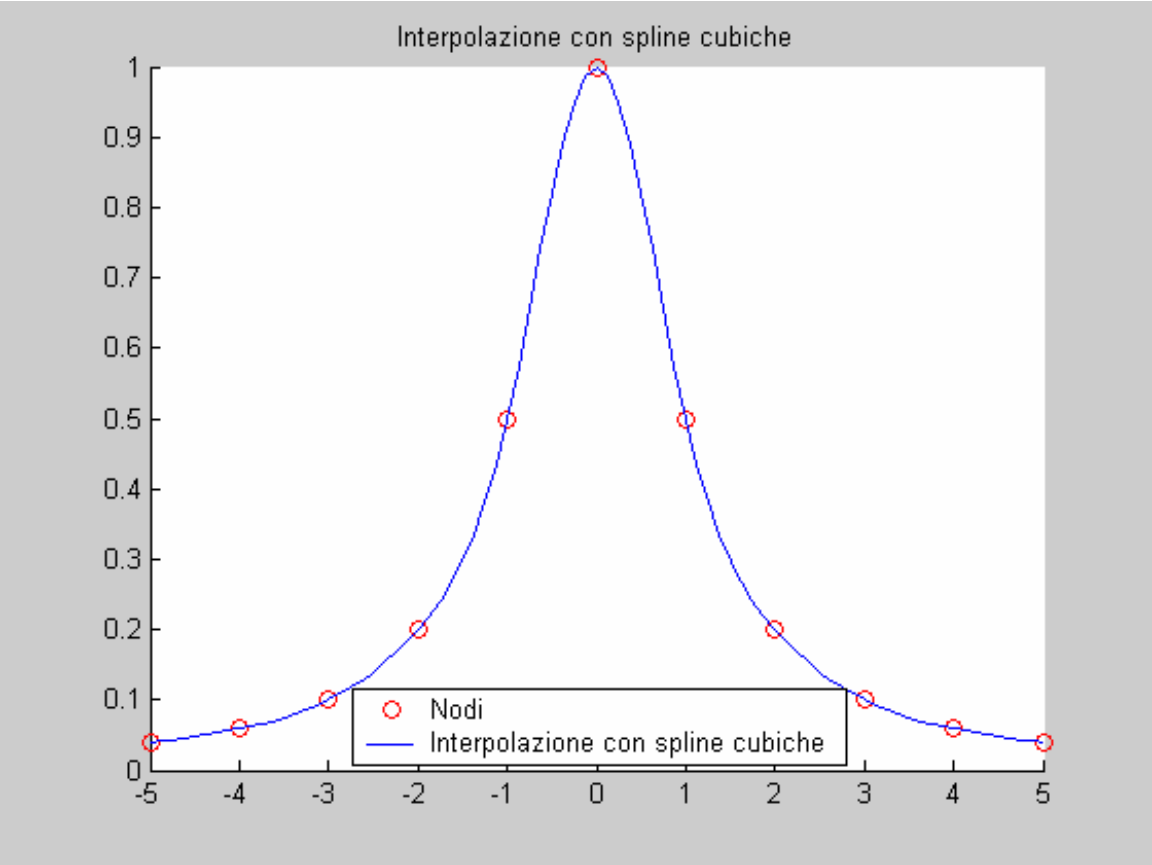
k=2, N+1

Sistema di 4(N+1) equazioni in 4(N+1) coefficienti degli N+1 polinomi cubici

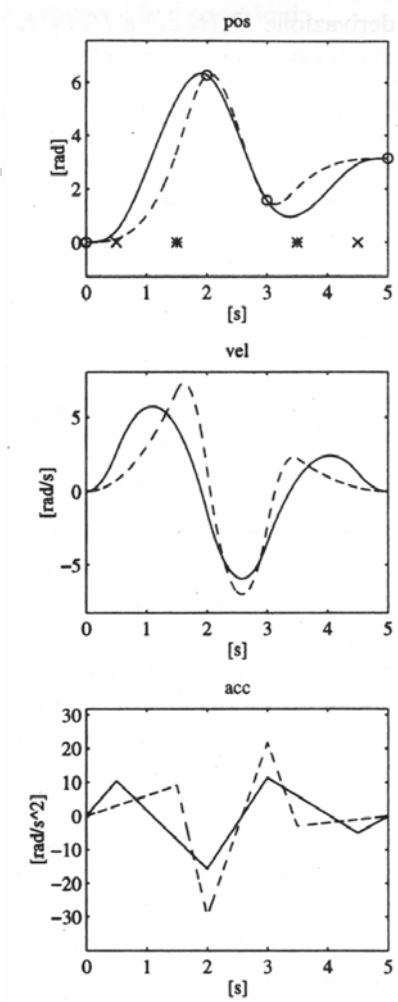
Esempio


Interpolazione con spline cubiche
F. da interpolare
Nodi
Interpolazione con spline cubiche
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Esempio – Eliminazione Fenomeno di Runge



Esempio
Spline Cubiche



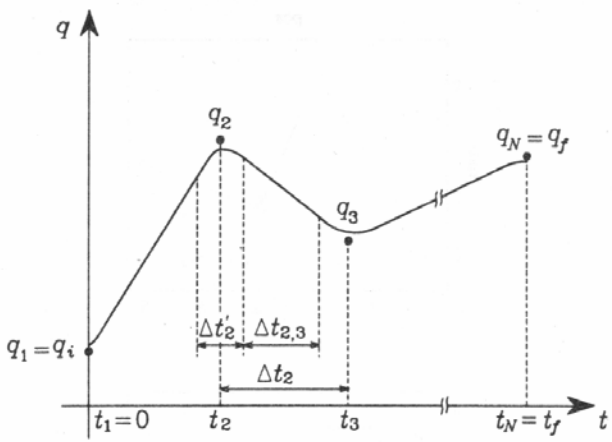
Sequenza di Polinomi Parabolico-Lineari

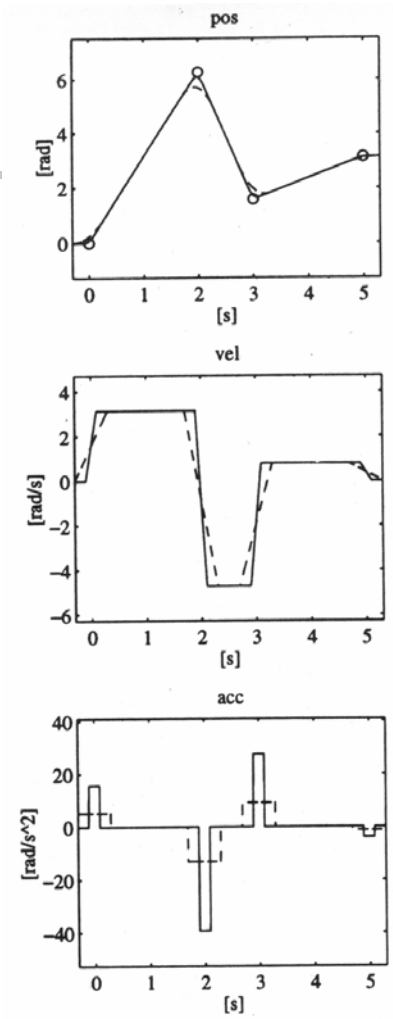
Per semplificare gli algoritmi si può considerare di collegare gli N punti di percorso con funzioni lineari. Per evitare problemi di discontinuità della velocità, il profilo di posizione deve assumere un andamento parabolico nell'intorno dei punti di raccordo. La traiettoria complessiva risulta costituita da una sequenza di polinomi di primo e secondo grado, ammettendo però con questo discontinuità della derivata di ordine due.

Definiamo le grandezze Δt_k, $\Delta t_{k,k+1}$, $\Delta t'_k$ come illustrate in figura. Per i punti non estremi:

$$\dot{q}_{k-1,k} = \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t_{k-1}}$$

$$\ddot{q}_k = \frac{\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}}{\Delta t'_k};$$



e $\dot{q}_{0,1} = \dot{q}_{N,N+1} = 0$

Esempio