CINEMATICA DIFFERENZIALE

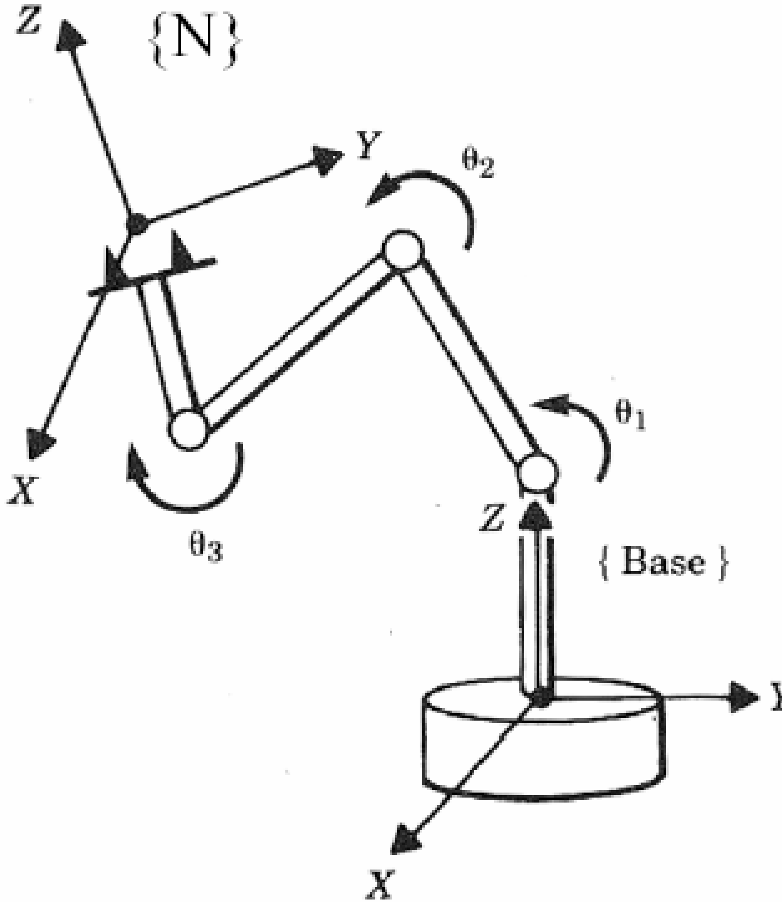
Paolo Fiorini
Dipartimento di Informatica
Università degli Studi di Verona

Introduzione

Cinematica Differenziale

Esprime il legame che intercorre tra le <u>velocità ai giunti</u> e le corrispondenti <u>velocità lineare ed angolare</u> dell'organo terminale per la posa data

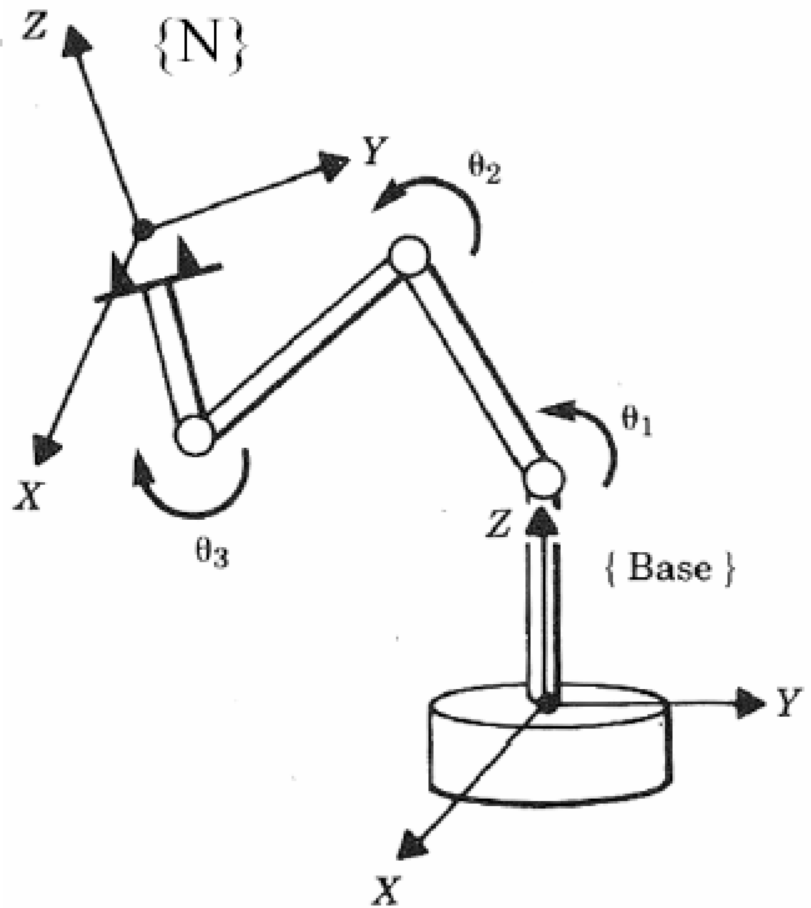
I legami sono espressi da una matrice di trasformazione



Jacobiano

<u>*Jacobiano Geometrico*</u>
Matrice dipendente dalla configurazione (geometria) corrente del manipolatore

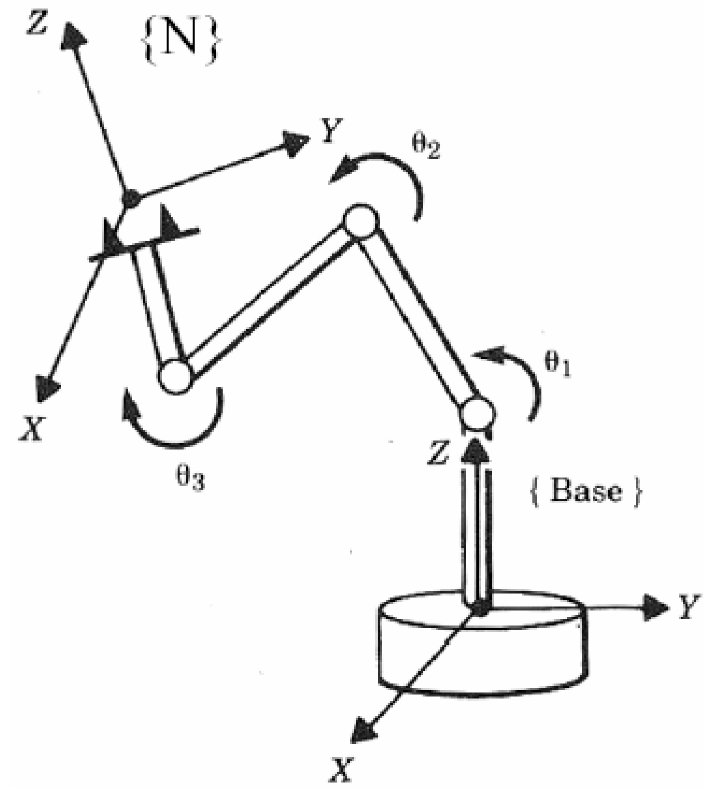
<u>*Jacobiano Analitico*</u>
Sfrutta operazioni di differenziazione in caso in cui la configurazione sia espressa con rappresentazioni minime



Proprietà dello Jacobiano

Strumento di analisi delle caratteristiche del manipolatore:

- Identifica le singolarità
- Analisi della ridondanza
- Calcolo dell'inversione cinematica
- Evidenzia il legame tra forze al polso e coppie ai giunti



Jacobiano Geometrico

Consideriamo l'equazione cinematica diretta nella forma classica

$$T(q) = \begin{bmatrix} R(q) & p(q) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

In cui

$$q = \begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{bmatrix}^T$$

è il vettore delle variabili di giunto

Jacobiano Geometrico

Si vuole esprimere la velocità lineare $\dot{p}$ e la velocità angolare ω del tool in funzione delle velocità $\dot{q}$ ai giunti Quindi:

$$\dot{p} = J_P(q)\dot{q}$$
$$\omega = J_O(q)\dot{q}$$

Dove J_P è la matrice (3xn) del contributo della velocità lineare, mentre J_O è la matrice (3xn per la velocità angolare)

$$J = \begin{bmatrix} J_P \\ J_O \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

Altre Proprietà della Matrice R

Dato che ***R*** rappresenta *posizione e orientazione* dell'organo terminale in funzione dei parametri di giunto, l'analisi della ***velocità*** porta allo studio della *derivata rispetto al tempo della matrice R*

Sia **R** funzione del tempo:

$$R = R(t)$$

Altre Proprietà della Matrice R

Valgono i seguenti passaggi:

$$R(t)R^T(t) = I$$

derivando

$$\dot{R}(t)R^T(t) + R(t)\dot{R}^T(t) = 0$$

posto

$$S(t) = \dot{R}(t)R^T(t)$$

per cui vale la proprietà

$$S(t) + S^T(t) = 0$$

moltiplicando per $R(t)$

$$\dot{R}(t) = S(t)R(t)$$

Questo permette di esprimere la derivata temporale <u>in funzione della matrice stessa</u>

Interpretazione dell'operatore di trasformazione S(t)

Consideriamo quanto segue:

$$p(t) = R(t)p'$$

derivando

$$\dot{p}(t) = \dot{R}(t)p'$$

per la definizione di $\dot{R}(t)$

$$\dot{p}(t) = S(t)R(t)p'$$

detta $\omega(t)$ la velocità angolare

$$\dot{p}(t) = \omega(t) \times R(t)p'$$

L'operatore S(t) ammette la seguente interpretazione fisica: *è l'operatore che descrive il prodotto vettoriale* tra il vettore ω e il vettore R(t)p'

Interpretazione dell'operatore di trasformazione S(t)

Se si considera il vettore di velocità angolare

$$\omega(t) = \lfloor \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z \rfloor$$

La matrice equivalente che descrive il prodotto è data dalla seguente

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio

Consideriamo la matrice di rotazione elementare attorno all'asse *Z* con α funzione del tempo

$$R_z(\alpha(t)) = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo la derivata in funzione di *t*

$$\dot{R}_z(\alpha(t)) = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}s\alpha & -\dot{\alpha}c\alpha & 0 \\ \dot{\alpha}c\alpha & -\dot{\alpha}s\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio

Applicando la defiizione dell'operatore S(t) si ha

$$S(t) = \dot{R}(t)R^T(t) = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}s\alpha & -\dot{\alpha}c\alpha & 0 \\ \dot{\alpha}c\alpha & -\dot{\alpha}s\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 \\ -s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

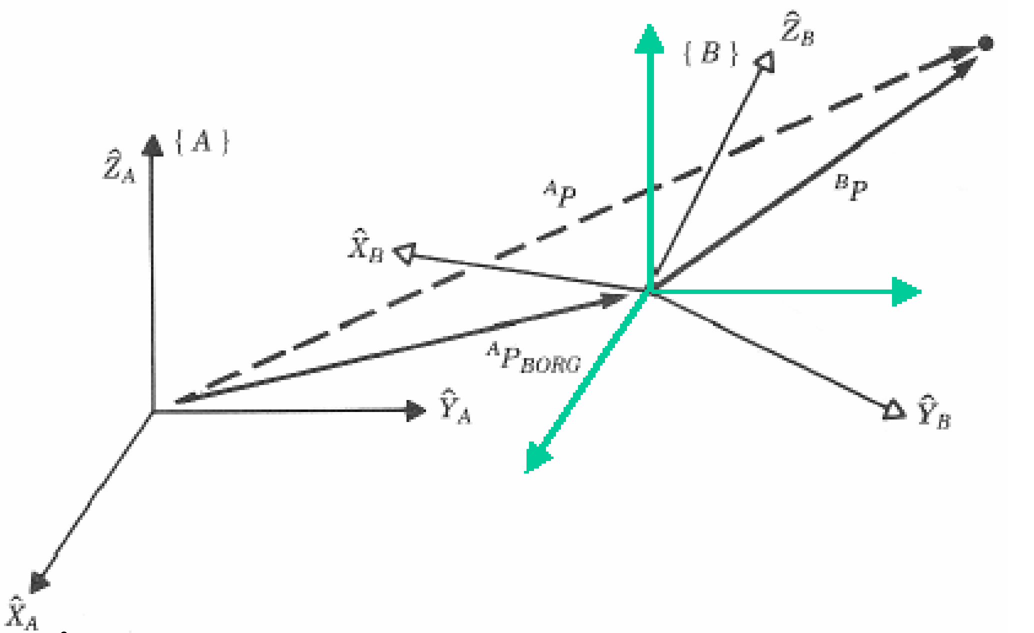
$$= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi $\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\alpha} \end{bmatrix}^T$

Uso dell'operatore S(t)

Si consideri la trasformazione omogenea (non compatta)

$$p^A = p^A_{B\_Orig} + R^A_B p^B$$



La derivata rispetto al tempo diventa

$$\dot{p}^A = \dot{p}^A_{B\_Orig} + R^A_B \dot{p}^B + \dot{R}^A_B p^B$$

Uso dell'operatore S(t)

Applicando ancora la definizione della derivata della matrice di rotazione si ottiene

$$\dot{p}^A = \dot{p}^A_{B\_Orig} + R^A_B \dot{p}^B + \dot{R}^A_B p^B$$

$$\dot{p}^A = \dot{p}^A_{B\_Orig} + R^A_B \dot{p}^B + S(\omega^A_B) R^A_B p^B$$

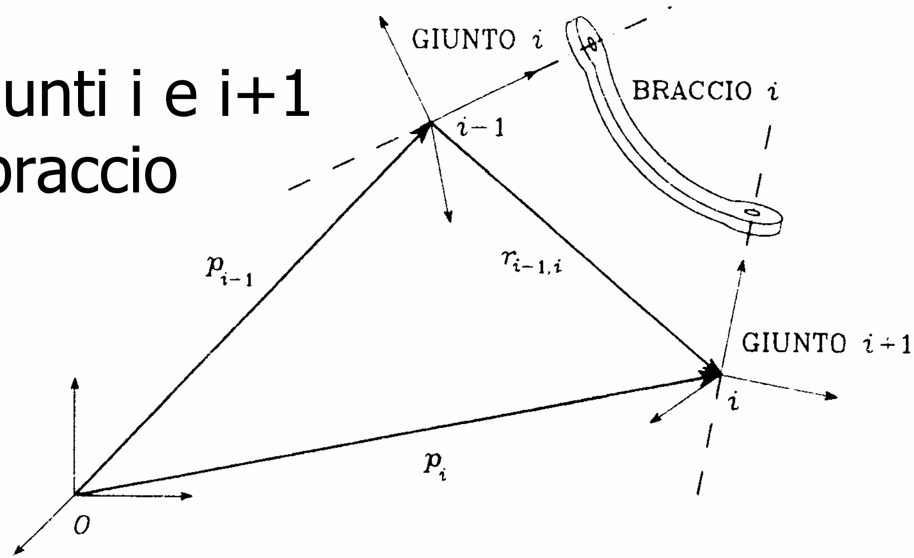
Indicando con r^A_B il vettore $R^A_B p^B$

$$\dot{p}^A = \dot{p}^A_{B\_Orig} + R^A_B \dot{p}^B + \omega^A_B \times r^A_B$$

Velocità di un Braccio

Consideriamo il generico braccio i della catena cinematica del manipolatore

- Il braccio i connette i giunti i e i+1
- La terna i è solidale al braccio
- P_{i-1} e P_i sono i vettori di posizione delle origini dei sistemi



Consideriamo

$$p_i = p_{i-1} + R_{i-1} r_{i-1,i}^{i-1}$$

Velocità di un Braccio

Per quanto già visto si può calcolare la derivata rispetto al tempo ottenendo

$$p_i = p_{i-1} + R_{i-1} r_{i-1,i}^{i-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + R_{i-1} \dot{r}_{i-1,i}^{i-1} + \omega_{i-1} \times R_{i-1} r_{i-1,i}^{i-1}$$

E quindi

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + v_{i-1,i} + \omega_{i-1} \times r_{i-1,i}$$

Che esprime la velocità lineare del braccio *i* in funzione delle velocità lineare ed angolare del braccio *i-1*

Velocità di un Braccio

In considerazione del fatto che vale la relazione

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \omega_{i-1,i}$$

La formula generale

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + v_{i-1,i} + \omega_{i-1} \times r_{i-1,i}$$

Può essere "particolarizzata" a seconda che si tratti di un giunto di tipo prismatico o rotoidale

Velocità - Giunto Prismatico

L'orientamento della terna non varia

$$\omega_{i-1,i} = 0$$

La velocità lineare risulta definita come

$$v_{i-1,i} = \dot{d}_i z_{i-1}$$

Di conseguenza le velocità angolari e lineari diventano

$$\omega_i = \omega_{i-1}$$

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \dot{d}_i z_{i-1} + \omega_i \times r_{i-1,i}$$

Velocità - Giunto Rotoidale

In questo caso abbiamo

$$\omega_{i-1,i} = \dot{\theta}_i z_{i-1}$$

La velocità lineare risulta definita come

$$v_{i-1,i} = \omega_{i-1,i} \times r_{i-1,i}$$

Di conseguenza le velocità angolari e lineari diventano

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \dot{\theta}_i z_{i-1}$$

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \omega_i \times r_{i-1,i}$$

Calcolo dello Jacobiano

Consideriamo l'operatore Jacobiano partizionato secondo vettori colonna (3x1)

$$J = \begin{bmatrix} jP_1 & & jP_n \\ & \cdots & \\ jO_1 & & jO_n \end{bmatrix}$$

E indichiamo con

$\dot{q}_i \, jP_i$ il contributo alla velocità lineare

$\dot{q}_i \, jO_i$ il contributo alla velocità angolare

Calcolo dello Jacobiano

Per quanto visto prima si puo' scrivere

Giunto prismatico

$$\dot{q}_i jP_i = \dot{d}_i z_{i-1} \quad \Rightarrow \quad jP_i = z_{i-1}$$

$$\dot{q}_i jO_i = 0 \quad \Rightarrow \quad jO_i = 0$$

Giunto rotoidale

$$\dot{q}_i jP_i = \omega_{i-1,i} \times r_{i-1,n} = \dot{\theta}_i z_{i-1} \times \left(p - p_{i-1}\right) \quad \Rightarrow \quad jP_i = z_{i-1} \times \left(p - p_{i-1}\right)$$

$$\dot{q}_i jO_i = \dot{\theta}_i z_{i-1} \quad \Rightarrow \quad jO_i = z_{i-1}$$

Calcolo dello Jacobiano

In definitiva

$$\begin{bmatrix} jP_i \\ jO_i \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{per un giunto prismatico} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{per un giunto rotoidale} \end{cases}$$

Dove:

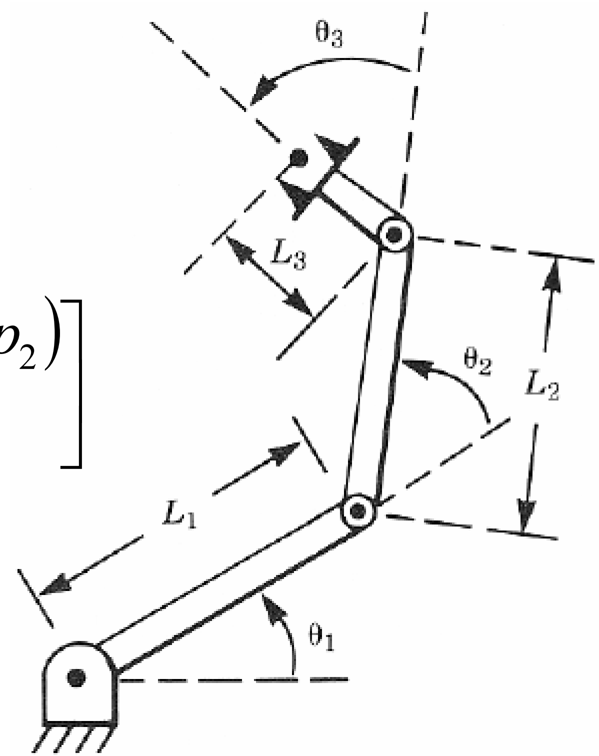
- Z_{i-1} è dato dalla terza colonna della matrice R_{i-1}^{0}
- P è dato dai primi tre elementi della quarta colonna di T_n
- P_{i-1} dai primi tre elementi della quarta colonna di R_{i-1}^{0}

Esempio

Torniamo a considerare il manipolatore planare a tre bracci

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 \times (p - p_2) \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

Applicando le regole di costruzione dello Jacobiano



Esempio

I vettori di posizione dei vari bracci si ottengono dalla composizione delle matrici di trasformazione

$$p_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_3 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mentre i versori degli assi sono dati da

$$z_0 = z_1 = z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esempio

Svolgendo i calcoli, la matrice del Jacobiano risulta essere data dalla seguente

$$J = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} \\ a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -a_3 s_{123} \\ a_3 c_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Esempio

Nota:
Solo tre righe non sono nulle (rango 3 della matrice)

- Le prime due righe caratterizzano le componenti di velocità lineare lungo gli assi X_0 e Y_0

- L'ultima riga rappresenta invece la componente angolare rispetto all'asse Z_0

Avendo solo 3 DOF si possono specificare solo 3 componenti di velocità

Jacobiano Analitico

E’ calcolabile se posizione e orientamento sono espressi tramite rappresentazioni minime (angoli di Eulero ZYZ)

In questo caso è possibile ricavare lo Jacobiano direttamente dalla derivazione della funzione *k* della cinematica diretta

$$x = k(q)$$

Jacobiano Analitico
Rotazione e Traslazione

Velocità di traslazione della terna utensile

=

Derivata rispetto al tempo del vettore di posizione del tool

$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial q}\dot{q} = J_P(q)\dot{q}$$

Jacobiano Analitico Rotazione e Traslazione

Velocità di rotazione della terna utensile

=

Derivata rispetto al tempo della rappresentazione minima (ZYZ) dell'orientazione del tool

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial q}\dot{q} = J_{\phi}(q)\dot{q}$$

Nota: Solitamente non coincide con la controparte dello Jacobiano geometrico

Jacobiano Analitico

Per quanto visto possiamo rappresentare in modo compatto lo Jacobiano analitico

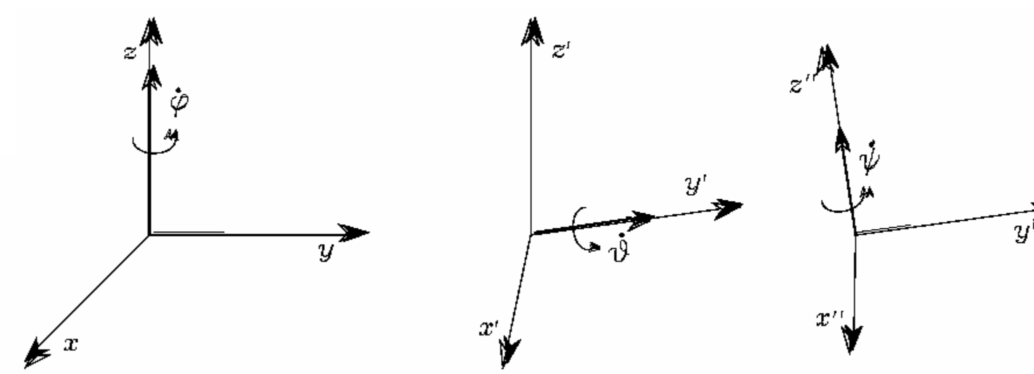
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_\phi(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J_A(q)\dot{q}$$

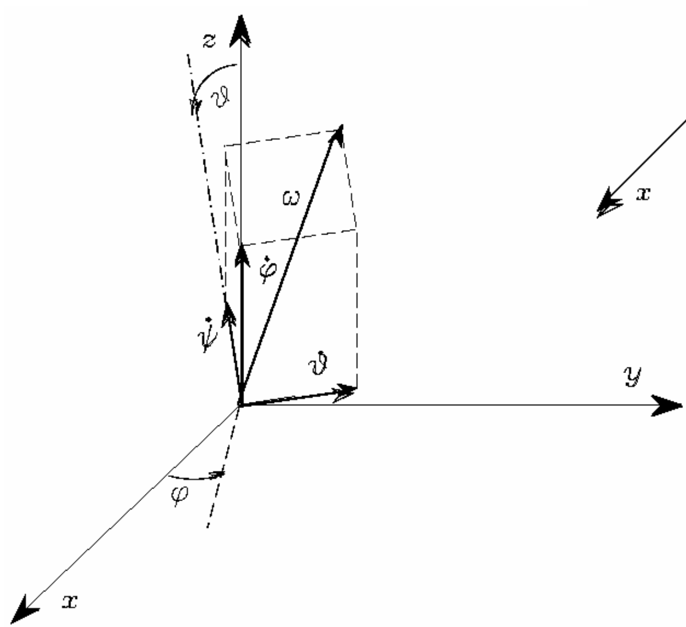
E quindi

$$J_A(q) = \frac{\partial k(q)}{\partial q}$$

Jacobiano Analitico

Velocità di rotazione in terna corrente di Eulero ZYZ





Composizione delle velocità di rotazione in terna di Eulero ZYZ

Relazione Tra ω e ϕ

Se si considerano le velocità riportate in figura per la terna ZYZ si hanno le seguenti

- Per effetto di $\dot{\varphi}$: $\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T = \dot{\varphi}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
- Per effetto di $\dot{\vartheta}$: $\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T = \dot{\vartheta}\begin{bmatrix} -s\varphi & c\varphi & 0 \end{bmatrix}^T$
- Per effetto di $\dot{\psi}$: $\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T = \dot{\psi}\begin{bmatrix} c\varphi s\vartheta & s\varphi s\vartheta & c\vartheta \end{bmatrix}^T$

Relazione Tra ω e ϕ

La relazione che lega le velocità angolari nelle due rappresentazioni è la seguente

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & -s\varphi & c\varphi s\vartheta \\ 0 & c\varphi & s\varphi s\vartheta \\ 1 & 0 & c\vartheta \end{bmatrix} \dot{\phi} = T(\phi)\dot{\phi}$$

Relazione Tra i Due Jacobiani

Una volta definita la trasformazione T(ϕ) si può scrivere

$$v = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\phi) \end{bmatrix} \dot{x} = T_A(\phi)\dot{x}$$

e quindi

$$J = T_A(\phi) J_A$$

Singolarità Cinematiche

Lo Jacobiano definisce una trasformazione tra il vettore delle velocità ai giunti e il vettore delle velocità dell'organo ternimale

$$v = J(q)\dot{q}$$

Lo Jacobiano **è funzione della configurazione *q*** assunta nello spazio dei giunti

I valori di *q* per cui lo Jacobiano **J** diminuisce di rango identificano delle *singolarità cinematiche*

Singolarità Cinematiche

Importanza delle singolarità cinematiche:

- Rappresentano configurazioni per cui si ha perdita di mobilità della struttura
- Per la data configurazione si possono presentare infinite soluzioni per il calcolo della cinematica inversa
- Nell'intorno di una singolarità, velocità minime nello spazio operativo possono portare a velocità elevate nello spazio dei giunti

Singolarità Cinematiche

Classificazione dell singolarità cinematiche:

- Ai confini dello spazio di lavoro

Si presentano nelle configurazioni in cui il manipolatore è completamente esteso o completamente ripiegato su se stesso

Non rappresentano un grosso inconveniente

- All'interno dello spazio di lavoro

Causate solitamente dall'allineamento di qualche asse di giunto

Sono un problema perchè possono interessare traiettorie di lavoro del manipolatore

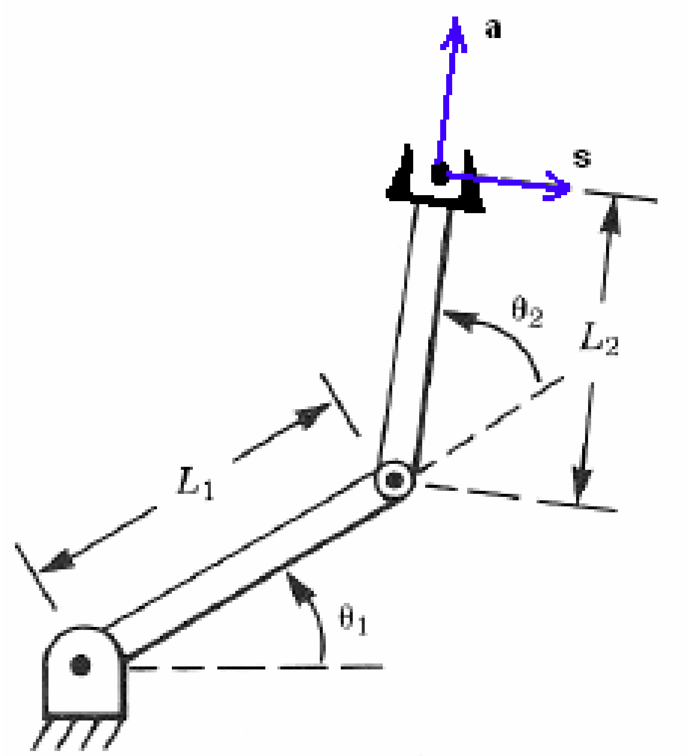
Esempio

Manipolatore planare a due bracci

$$J = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice risulta essere

$$\det(J) = a_1 a_2 s_2$$



Esempio

Nell'ipotesi in cui i bracci del manipolatore non abbiano lunghezza nulla

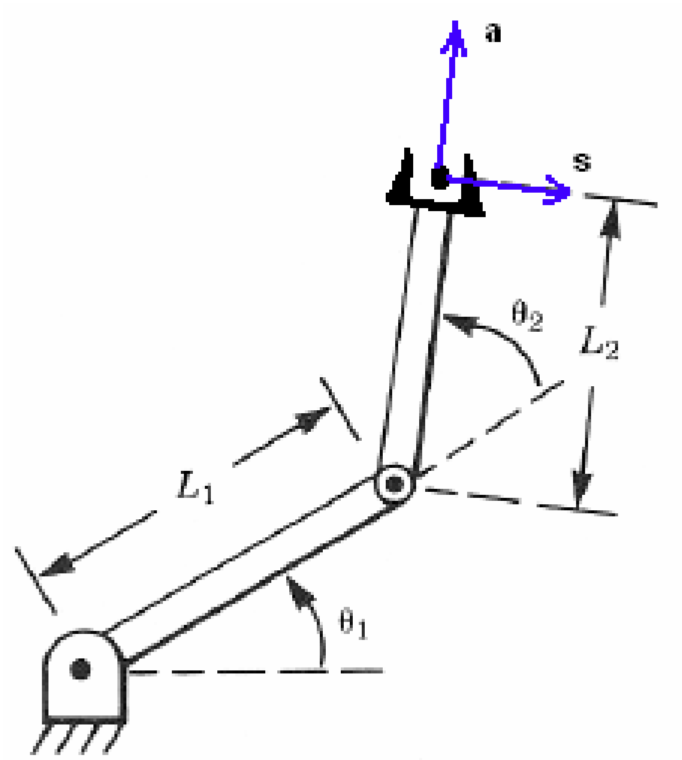
$$a_1, a_2 \neq 0$$

Il determinante si annulla per

$$\vartheta_2 = 0$$

$$\vartheta_2 = \pi$$

Sono le due configurazioni di singolarità



Disaccoppiamento delle Singolarità

Per strutture complesse l'analisi in base al comportamento del determinante non è banale

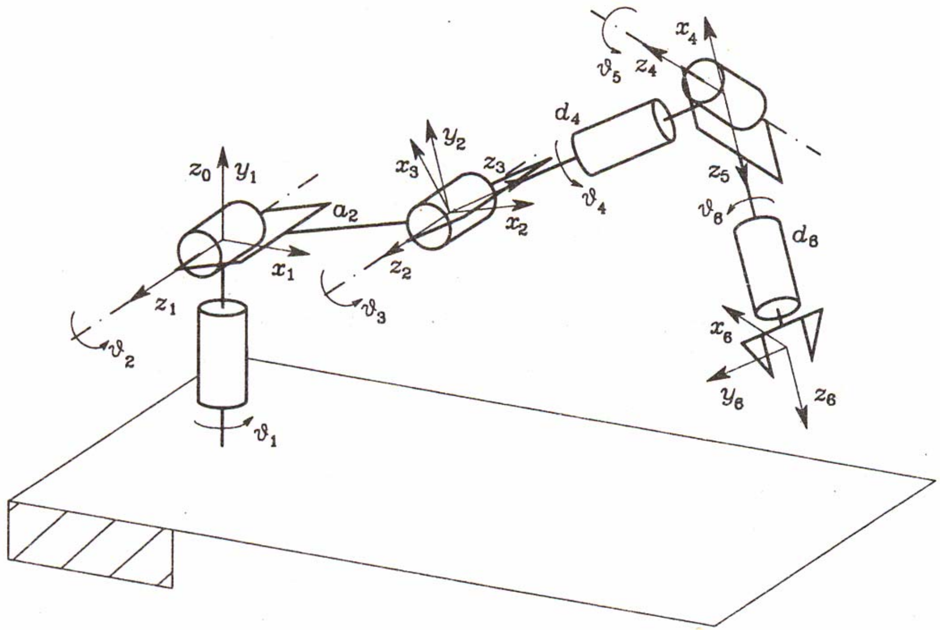
Come per l'inversione cinematica si tende a dividere il problema distinguendo tra:

•Singolarità della struttura portante

•Singolarità del polso

Disaccoppiamento delle Singolarità

Consideriamo il caso del manipolatore antropomorfo con polso sferico



Lo Jacobiano risulta una matrice (6x6)
- 3 colonne per la struttura
- 3 colonne per il polso

Disaccoppiamento delle Singolarità

Partizioniamo la matrice dello Jacobiano

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

Dove

$$J_{12} = \begin{bmatrix} z_3 \times (p - p_3) & z_4 \times (p - p_4) & z_5 \times (p - p_5) \end{bmatrix}$$
$$J_{22} = \begin{bmatrix} z_3 & z_4 & z_5 \end{bmatrix}$$

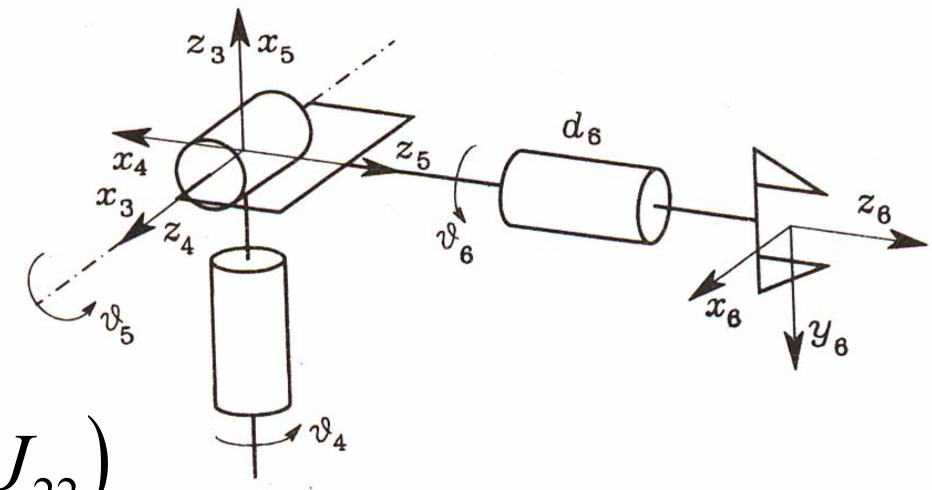
Le singolarità non dipendono dalle scelte fatte per descrivere la cinematica ma dalla meccanica del manipolatore

Disaccoppiamento delle Singolarità

Imponiamo che il sistema di riferimento dell'organo teriminale abbia origine sul punto di intersezione degli assi del polso

In tal caso si ottiene

$$J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



E quindi il calcolo del determinante diventa

$$\det(J) = \det(J_{11})\det(J_{22})$$

Disaccoppiamento delle Singolarità

In definitiva il determinante dello Jacobiano si annulla se uno dei due "sotto-determinanti" è nullo

$$\det(J) = \det(J_{11})\det(J_{22})$$

- La condizione

$$\det(J_{11}) = 0$$

Conduce alle singolarità della struttura portante

- La condizione

$$\det(J_{22}) = 0$$

Conduce alle singolarità di polso

Singolarità di Polso

Le singolarità di polso solo legate quindi all'annullamento del determinante del blocco J_{22}

$$\det(J_{22}) = 0$$

Che per costruzione sappiamo essere

$$J_{22} = \begin{bmatrix} z_3 & z_4 & z_5 \end{bmatrix}$$

I versori *Z* devono quindi essere <u>linearmente dipendenti</u>

Data la struttura questo accade solo quando Z_3 e Z_5 sono allineati

Singolarità di Polso

La singolarità di polso è data quindi per

$$\theta_5 = 0 \quad \theta_5 = \pi$$

In particolare, per un angolo pari a π la perdita di mobilità ha due conseguenze:

- Rotazioni uguali e opposte su θ_4 e θ_6 non hanno effetto

- Nessuna rotazione è possibile sull'asse ortogonale a Z_4 e Z_6

Singolarità della Struttura Portante

Consideriamo ora il determinante del blocco J_{11} per il manipolatore antropomorfo

$$\det(J_{11}) = -a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23})$$

L'annullamento del determinante si ha in due casi

$$s_3 = 0 \quad a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0$$

Singolarità della Struttura Portante

Caso 1: $s_3 = 0$
Il manipolatore è tutto steso o tutto ritratto

$$\theta_3 = 0 \quad \theta_3 = \pi$$

Caso 2: $a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0$
Il polso si trova sull'asse gi rotazione del primo giunto (∞ soluzioni)

$$p_x = p_y = 0$$