

CINEMATICA INVERSA

Paolo Fiorini

Dipartimento di Informatica
Università degli Studi di Verona



Introduzione

Cinematica Diretta

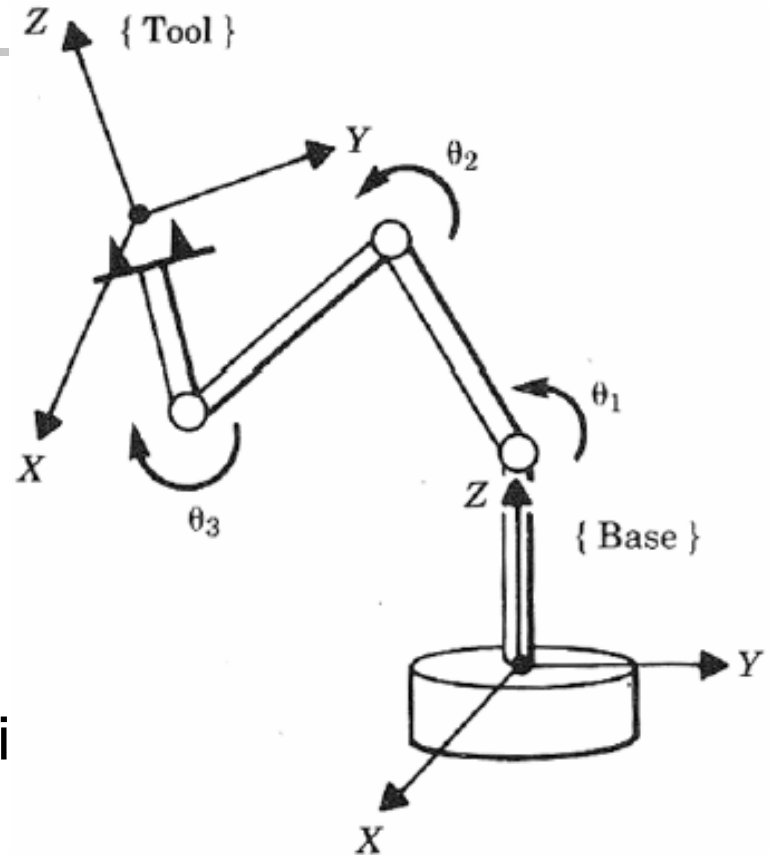
Dati: angoli ai giunti

Calcola: posizione e orientamento organo terminale

Cinematica Inversa

Dati: posizione e orientamento organo terminale

Calcola: tutti i possibili insiemi di angoli ai giunti per la posa data



Risolvibilità dell'Equazione Cinematica Inversa

- Esistenza della soluzione (soluzione ammissibile)
- Gestione delle soluzioni multiple
- Metodo di risoluzione
 - Forma chiusa
 - Soluzione algebrica
 - Soluzione geometrica
 - Soluzione numerica



Esistenza della Soluzione

- Perchè una soluzione esista, la matrice di trasformazione deve essere all'interno dello spazio di lavoro del manipolatore
- Spazio di lavoro
 - Destro (Dexterous Workspace DW): raggiungibile con qualunque orientazione
 - Raggiungibile (Reachable Workspace RW): raggiungibile con almeno una orientazione
- Vale la relazione

$$DW \subset RW$$



Risolvibilità - Soluzioni Multiple

Task: raggiungere uno specifico punto sul piano 2D

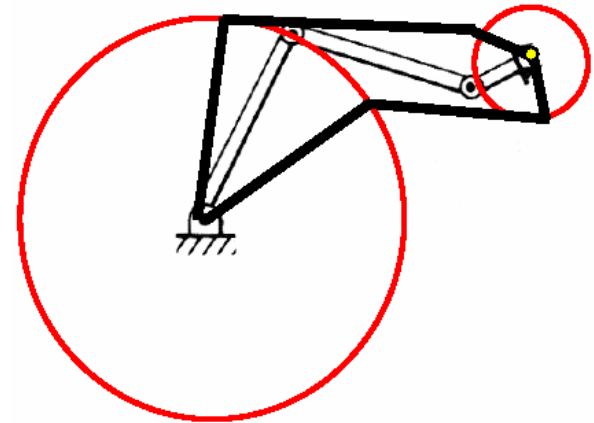
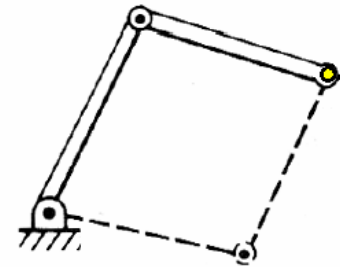
- Nr di DOF = Nr di DOF del task

Due soluzioni: gomito alto e gomito basso

- Nr di DOF > Nr di DOF del task

Infinite soluzioni

Il robot si può muovere mantenendo fisso l'organo terminale



Metodo di Risoluzione

Una soluzione è un insieme di valori per le variabili di giunto associate alla desiderata posa (posizione e orientamento) dell'organo terminale

Non esiste un algoritmo generale per la soluzione della cinematica inversa

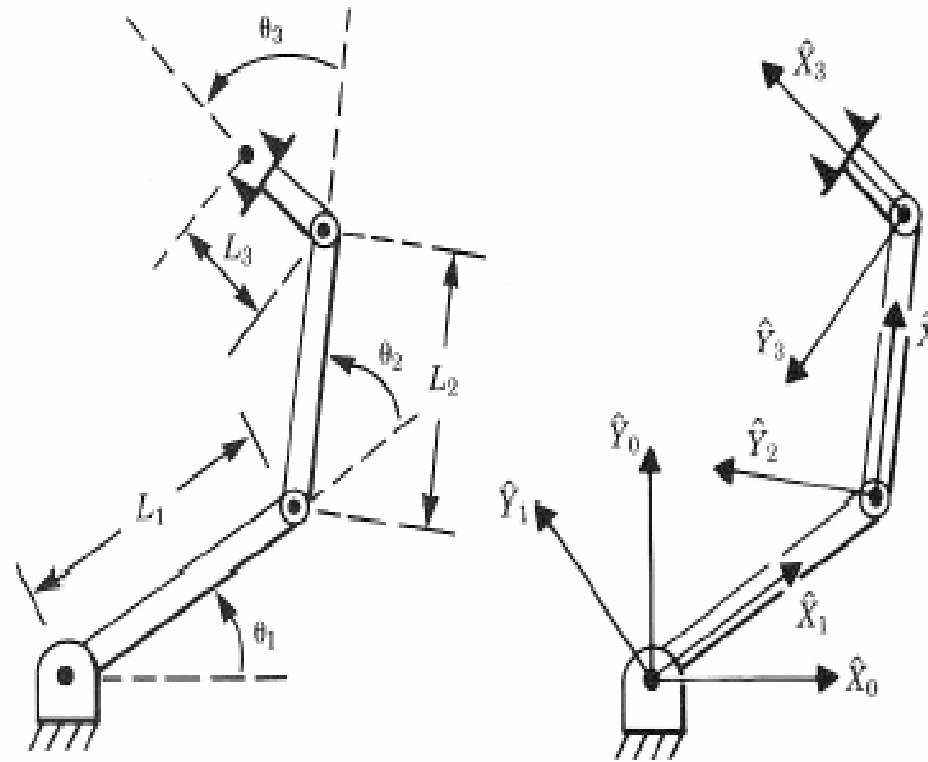
Strategie di soluzione:

- Algebriche: prevedono l'applicazione di equazioni trigonometriche
- Geometriche: riduzione del problema a una serie di problemi geometrici planari
- Numeriche: soluzioni iterative (non considerate)



Esempio (ripreso)

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3



Esempio

$$R_i^{i-1}(q_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\theta_i & c\alpha_{i-1}c\theta_i & -s\alpha_{i-1} & -d_is\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\theta_i & s\alpha_{i-1}c\theta_i & c\alpha_{i-1} & d_ic\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<i>i</i>	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

$$R_1^0(q_1) = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3^2(q_3) = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Esempio

La matrice di trasformazione finale diventa:

$$R_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 - s_1 c_2 s_3 & -c_1 c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3 + s_1 s_2 s_3 - s_1 c_2 c_3 & 0 & c_1(L_2 c_2 + L_1) - s_1 s_2 L_2 \\ s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3 + c_1 s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3 & -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3 & 0 & s_1(L_2 c_2 + L_1) + c_1 s_2 L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando le formule trigonometriche di identità

$$R_3^0 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1 s_1 + L_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

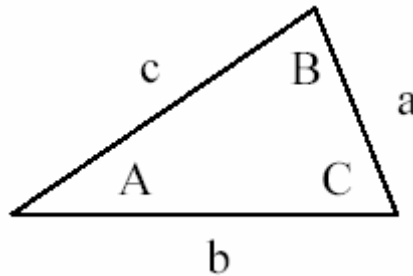
$$c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$



Formule Utili

Triangoli generici



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Somme di angoli

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = s_{12} = c_1 s_2 + s_1 c_2$$

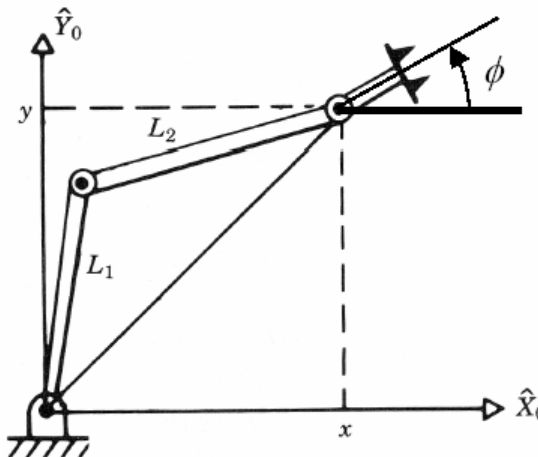
$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2$$



Esempio (Soluzione Algebrica)

Dati:

- Cinematica diretta per la trasformazione che lega la base al polso del manipolatore
- Posa del polso spressa dalle coordinate (x, y) e orientamento dell'ultimo braccio (ϕ)



Esempio (Soluzione Algebrica)

Problema:

Quali sono gli angoli $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ che determinano la posa (x, y, ϕ) ?

Soluzione:

È data dall'uguaglianza delle due matrici:

$$R_{goal} = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3^0 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1 s_1 + L_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Esempio (Soluzione Algebrica)

Questo porta a un sistema di 4 equazioni non lineari da risolvere rispetto a $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$

$$c_\phi = c_{123}$$

$$s_\phi = s_{123}$$

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12}$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$$



Esempio (Soluzione Algebrica)

Soluzione per θ_2

Sommiamo i quadrati di x e y e applichiamo le proprietà:

$$c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2$$

$$s_{12} = c_1 s_2 + s_1 c_2$$

otteniamo:

$$x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 c_2$$

da cui:

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2}$$



Esempio (Soluzione Algebrica)

L'ammissibilità della soluzione impone che c_2 sia compreso tra -1 e 1 e quindi che valga:

$$c_2^2 + s_2^2 = 1$$
$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$$

La scelta del segno determina la posa a gomito alto o basso.

L'angolo è alla fine dato da:

$$\theta_2 = A \tan 2(s_2, c_2)$$



Esempio (Soluzione Algebrica)

Soluzione per θ_1

Sostituiamo θ_2 nelle due equazioni:

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12}$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$$

ottenendo:

$$s_1 = \frac{(L_1 + L_2 c_2)y - L_2 s_2 x}{x^2 + y^2} \quad c_1 = \frac{(L_1 + L_2 c_2)x - L_2 s_2 y}{x^2 + y^2}$$

e come prima $\theta_1 = A \tan 2(s_1, c_1)$



Esempio (Soluzione Algebrica)

Soluzione per θ_3

Il calcolo di θ_2 è ora banale avendo

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = A \tan 2(s_\phi, c_\phi) = \phi$$

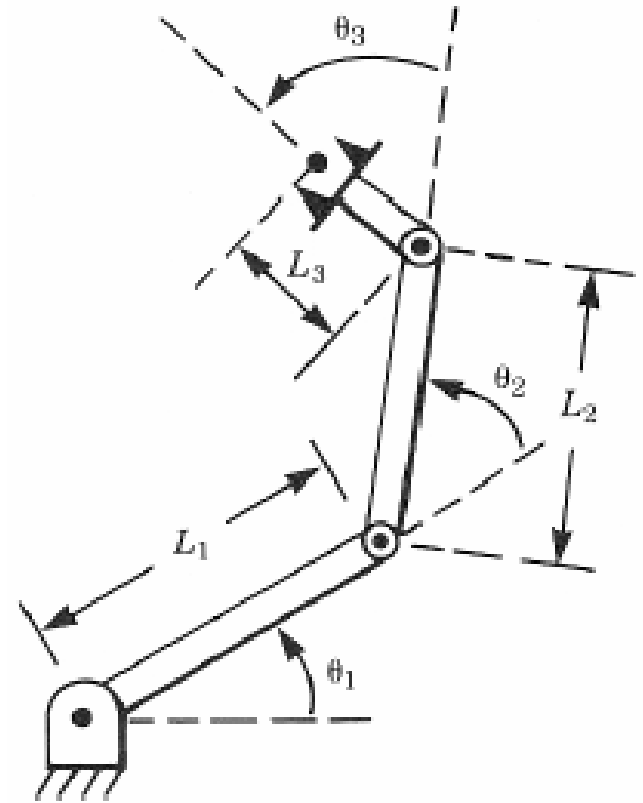
$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$



Esempio (Soluzione Geometrica)

Dati:

- La geometria del manipolatore
- Posa del polso spressa dalle coordinate (x, y) e orientamento dell'ultimo braccio (ϕ)



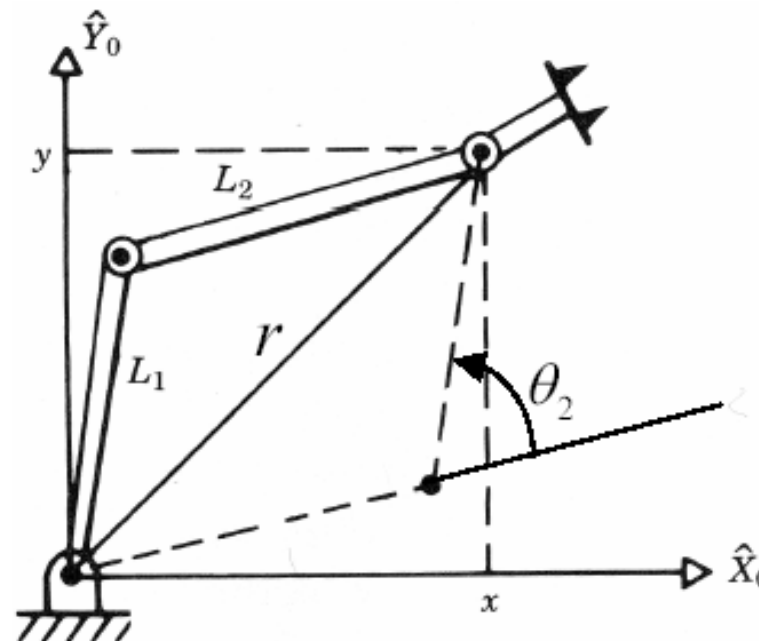
Esempio (Soluzione Geometrica)

Problema:

Quali sono gli angoli (θ_1 , θ_2 , θ_3) che determinano la posa (x, y, ϕ)?

Soluzione:

Applichiamo solamente
considerazioni di tipo
geometrico



Esempio (Soluzione Geometrica)

Soluzione per θ_2

Applichiamo le regole per il coseno

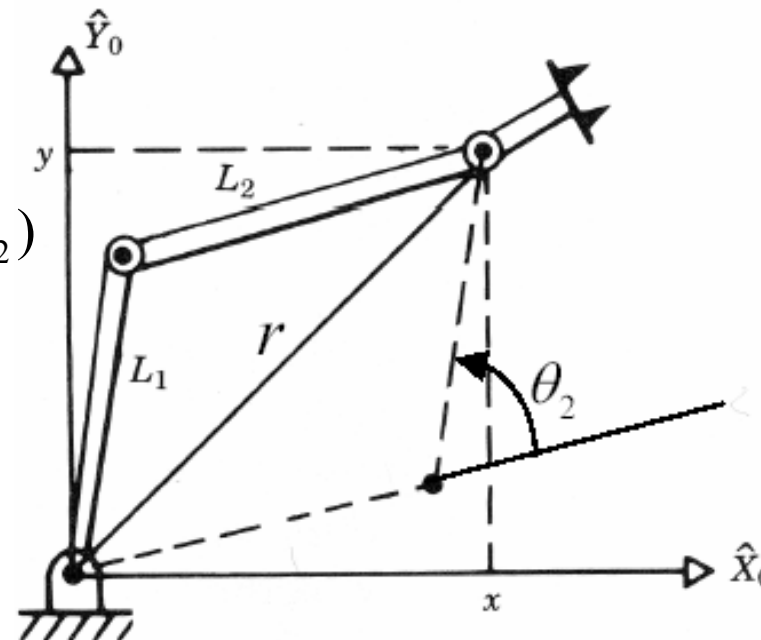
$$r^2 = x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2 \cos(180 + \theta_2)$$

e valendo

$$\cos(180 + \theta_2) = -\cos \theta_2$$

otteniamo

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2}$$



Esempio (Soluzione Geometrica)

Condizioni

- Per la raggiungibilità

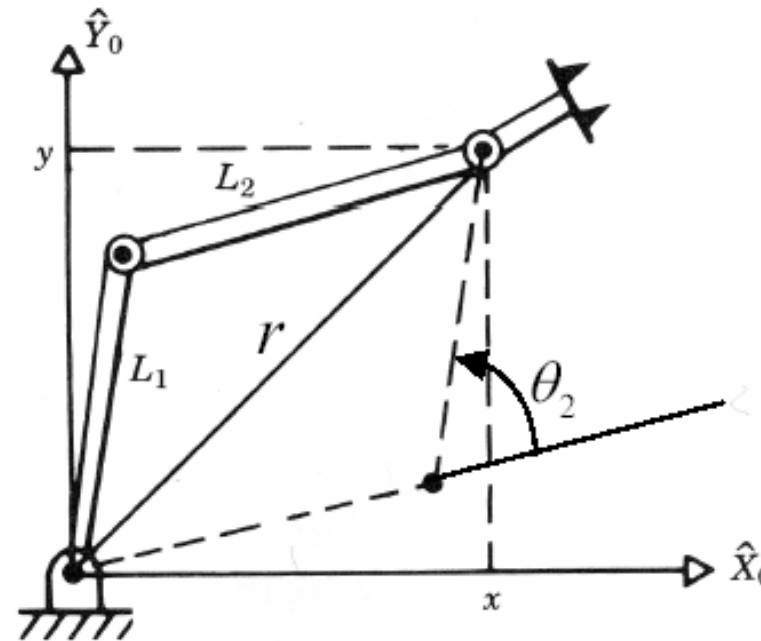
$$L_1 + L_2 \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Per la geometria

$$0^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ$$

- Soluzione simmetrica

$$\theta_2' = -\theta_2$$



Esempio (Soluzione Geometrica)

Soluzione per θ_1

Calcolo angolo β

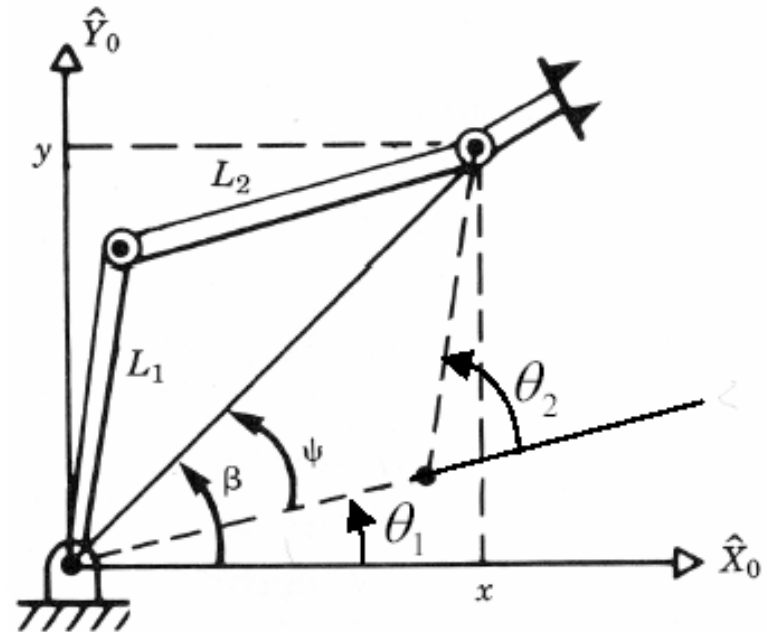
$$\beta = \arctan 2(y, x)$$

Calcolo angolo ψ

$$\cos \psi = \frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Con condizione

$$0^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$$



$$\theta_1 = \beta + \psi \text{ per } \theta_2 < 0$$

$$\theta_1 = \beta - \psi \text{ per } \theta_2 > 0$$

Esempio (Soluzione Geometrica)

Soluzione per θ_3

Ancora una volta vale

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \phi$$

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$

