

# CINEMATICA DIRETTA

Paolo Fiorini

Dipartimento di Informatica  
Università degli Studi di Verona

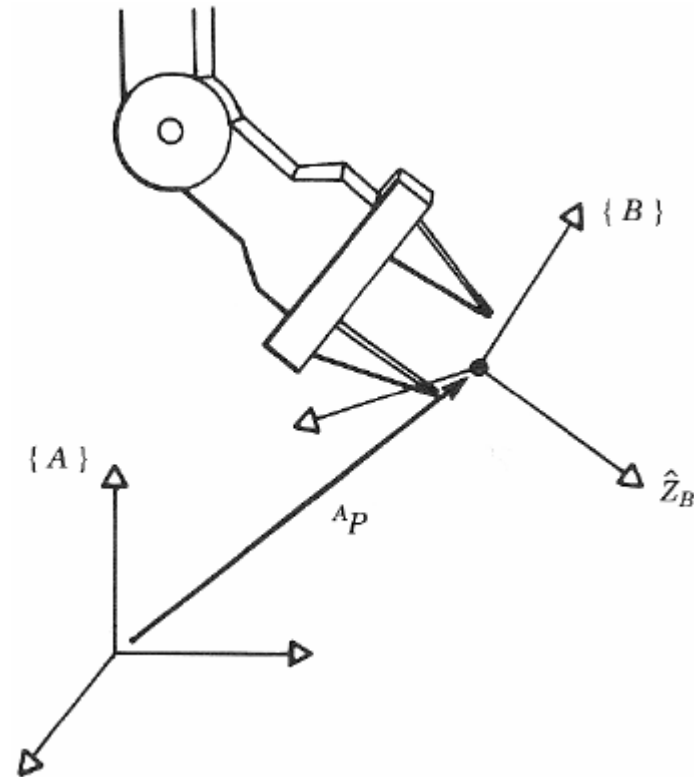


# Introduzione

Manipolatore: catena cinematica (aperta) di corpi rigidi (bracci) e giunti (rotoidali e prismatici)

Per poter manipolare un oggetto nello spazio bisogna conoscere posizione e orientamento dell'organo terminale

La ***cinematica diretta*** calcola la posa dell'organo terminale in funzione dei parametri di giunto



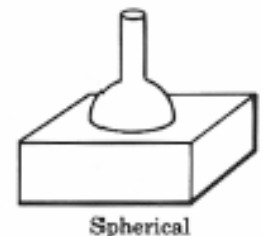
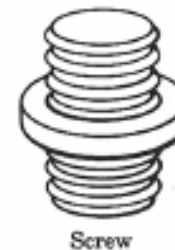
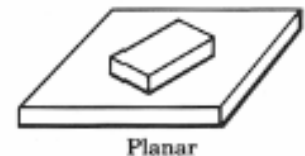
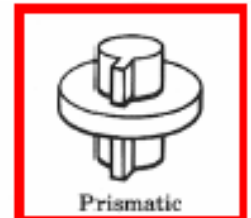
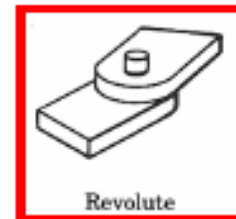
# Giunti e Bracci

**Giunto:** il collegamento tra una coppia di corpi rigidi che permette un moto relativo caratterizzato da due superfici che slittano l'una sull'altra



Giunto rotoidale  
Giunto prismatico

**Braccio:** è un corpo rigido che definisce le relazioni geometriche che intercorrono tra due giunti adiacenti del manipolatore



# Il Problema

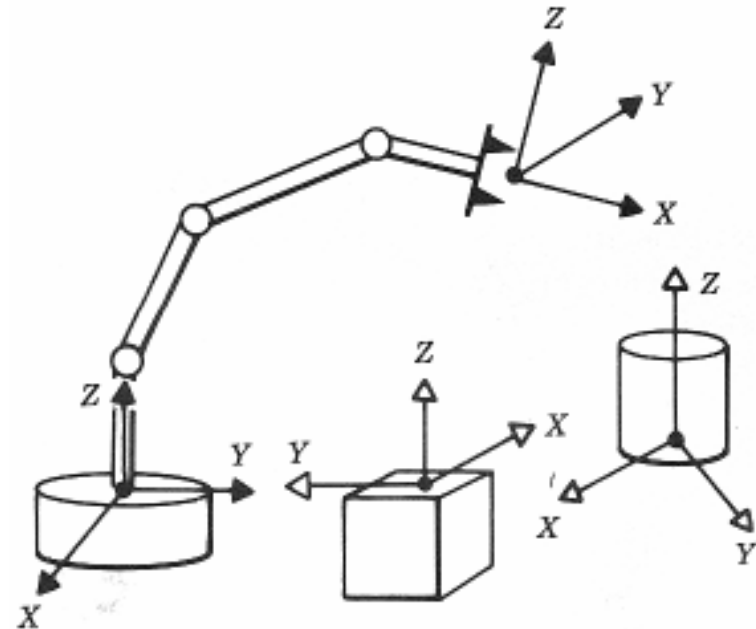
## Problema

Dati i parametri geometrici del manipolatore e le variabili di giunto

Calcolare posa e orientazione del manipolatore

## Soluzione

Applicare un insieme di sistemi di riferimento al manipolatore e agli oggetti dell'ambiente seguendo la convenzione di Denavit-Hartenberg



# Trasformazione Omogenea Organo Terminale

---

Consideriamo un manipolatore da  $n+1$  bracci connessi da  $n$  giunti.

Posizione ed orientazione finale dell'organo terminale sono funzione solo dei valori assunti dalle variabili di giunto

$$T^0(q) = \begin{bmatrix} n^0(q) & s^0(q) & a^0(q) & p^0(q) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Trasformazione Omogenea Organo Terminale

$$T^0(q) = \begin{bmatrix} n^0(q) & s^0(q) & a^0(q) & p^0(q) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dove:

- $q$  è il vettore ( $n \times 1$ ) delle variabili di giunto
- $n$  è il versore normale dell'utensile terminale
- $a$  è il versore di approccio
- $s$  è il versore di scivolamento



# Esempio

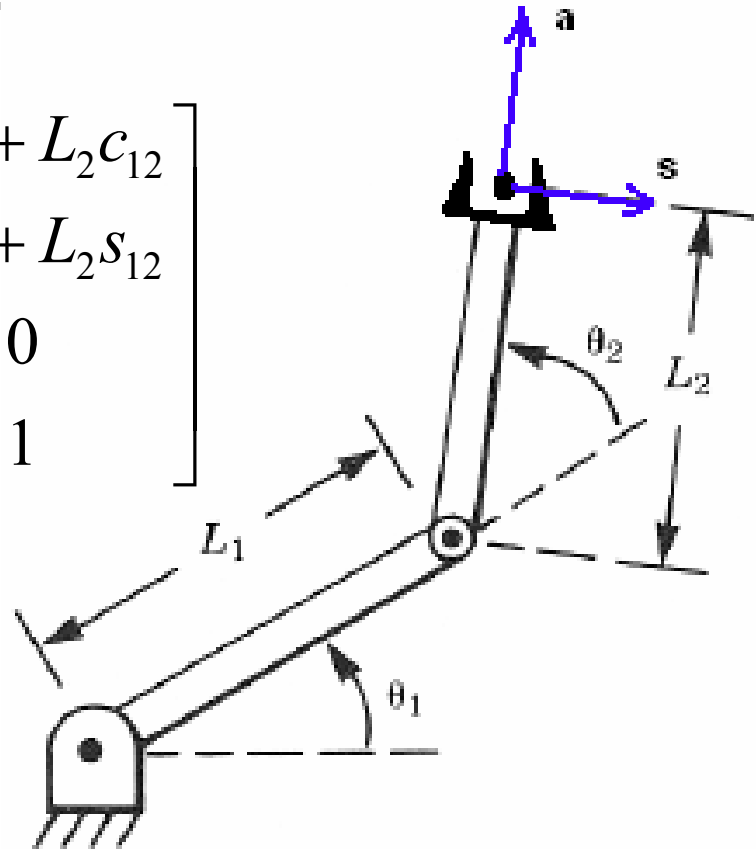
$$T^0(q) = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & c_{12} & L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ 0 & -c_{12} & s_{12} & L_1 s_1 + L_2 s_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore planare a 2 braccia

**N.B.**

$$s_{i\dots j} = \sin(\theta_i + \dots + \theta_j)$$

$$c_{i\dots j} = \cos(\theta_i + \dots + \theta_j)$$



# Convenzione di Denavit-Hartenberg

Definisce una procedura operativa per il calcolo della cinematica diretta sfruttando la natura di catena cinematica aperta del manipolatore

Ogni giunto connette solo due bracci consecutivi



- Consideriamo prima singolarmente il problema della descrizione geometrica dei legami tra due bracci consecutivi
- Successivamente risolviamo ricorsivamente il problema della descrizione dell'intero manipolatore



# Convenzione di Denavit-Hartenberg

---

Definizione della posizione e orientamento relativi di due bracci consecutivi



Individuazione di terne solidali con tali bracci



Calcolo della matrice di trasformazione che lega le due terne

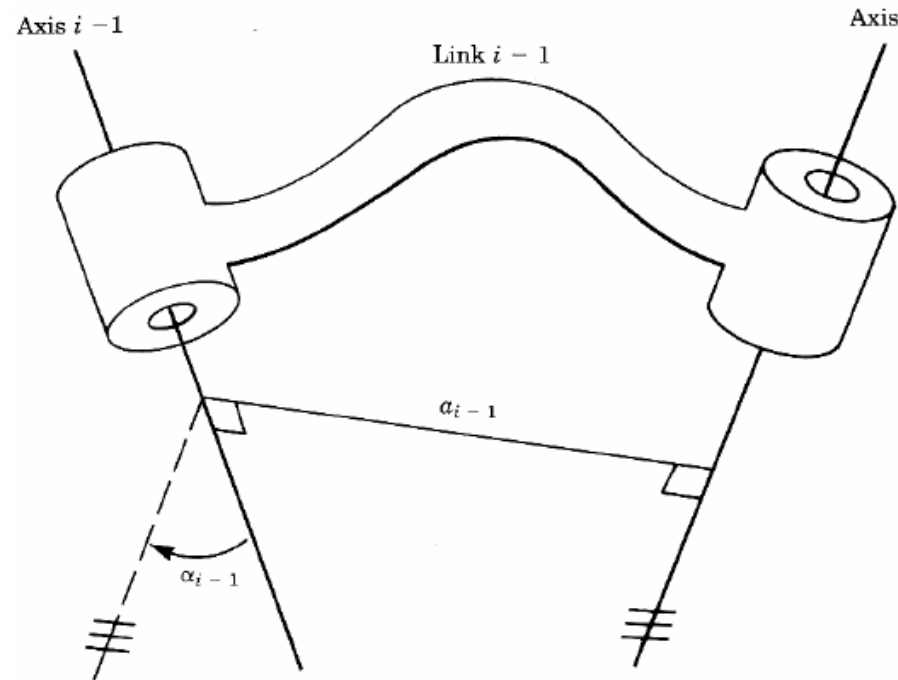


# D-H Definizione Parametri

Si identificano gli assi di rotazione dei giunti  $i-1$  ed  $i$

Calcolo della distanza  $a_{i-1}$  tra i due assi di rotazione (normale comune)

Calcolo dell'angolo  $\alpha_{i-1}$  di rotazione (sull'asse  $a_{i-1}$ ) necessario per portare l'asse del primo giunto sul piano definito dal secondo asse e il segmento  $a_{i-1}$



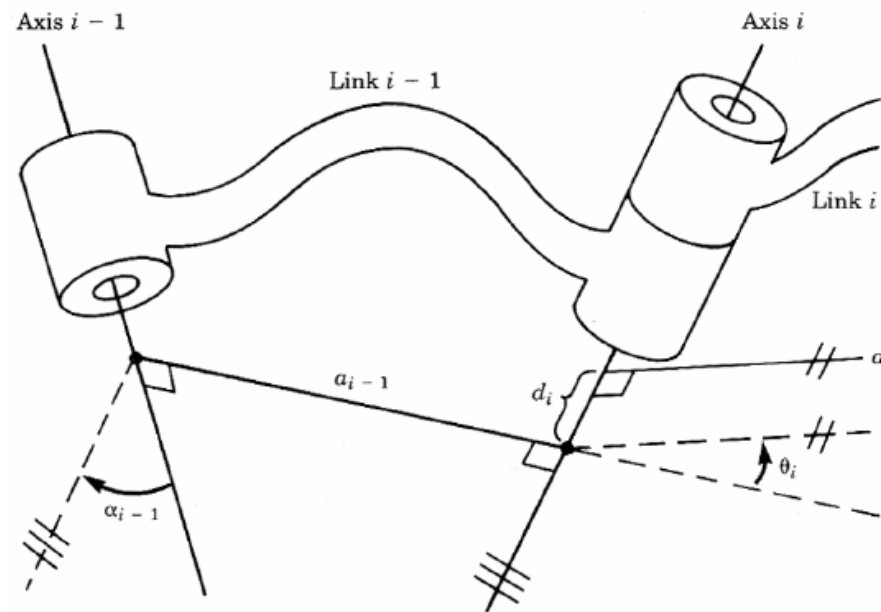
# D-H Definizione Parametri

Calcolo della distanza  $d_i$  lungo l'asse  $i$  tra le due normali comuni  $\alpha_{i-1}$  e  $\alpha_i$

(se il giunto è prismatico  $d_i$  è variabile)

Si calcola l'angolo di rotazione  $\theta_i$  (sull'asse  $i$ ) necessario per allineare  $a_{i-1}$  con  $a_i$

(se il giunto è rotoidale  $\theta_i$  è variabile)



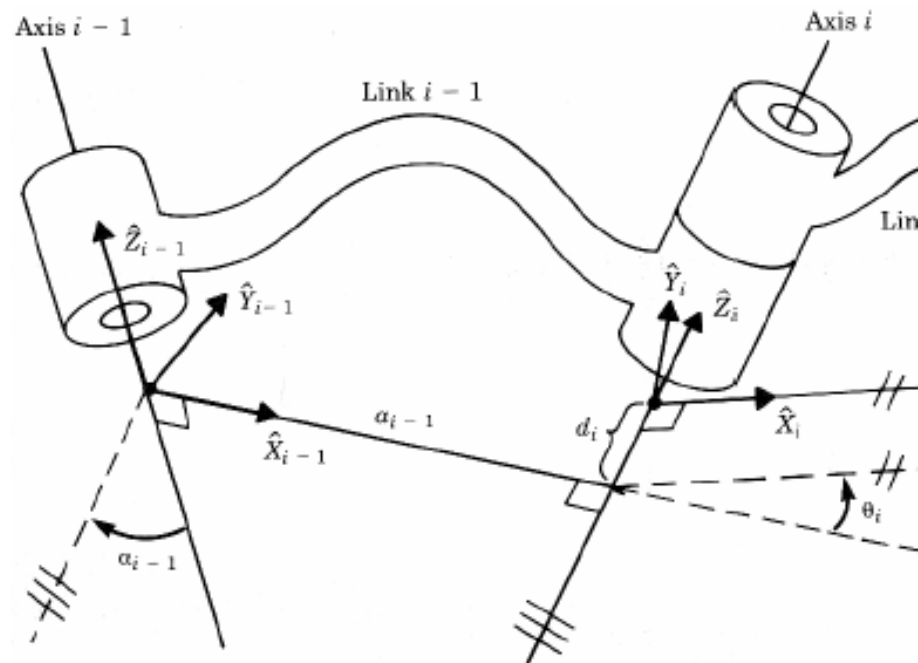
# D-H Posizione delle Terne

L'origine del sistema  $\{i\}$  è posto sull'intersezione tra  $a_i$  e l'asse di giunto  $i$

L'asse  $Z_i$  coincide con l'asse di giunto  $i$

L'asse  $X_i$  coincide con la normale comune  $a_i$

L'asse  $Y_i$  è scelto in modo da completare la terna



# D-H Elenco dei Parametri

Se i sistemi di riferimento sono posti in base alla convenzione, si ha:

$a_{i-1}$  – La distanza tra  $Z_{i-1}$  e  $Z_i$  misurata lungo l'asse  $X_{i-1}$

$\alpha_{i-1}$  – L'angolo tra  $Z_{i-1}$  e  $Z_i$  misurato rispetto l'asse  $X_{i-1}$

$d_i$  – La distanza tra  $X_{i-1}$  e  $X_i$  misurato lungo l'asse  $Z_i$

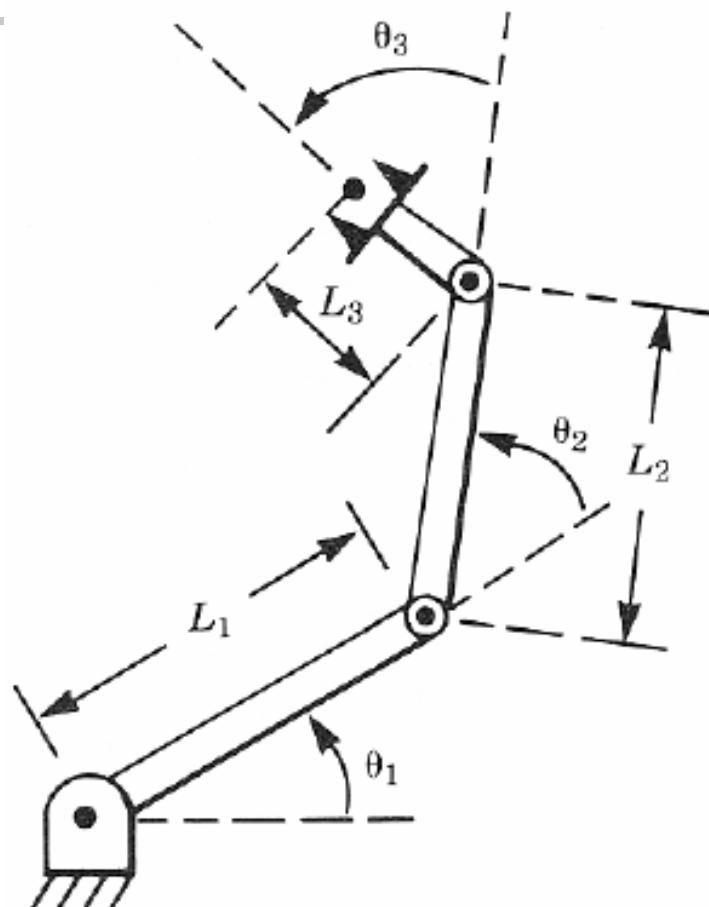
$\theta_i$  – L'angolo tra  $X_{i-1}$  e  $X_i$  misurato rispetto l'asse  $Z_i$

**Nota:**  $a_{i-1} \geq 0$ , mentre  $\alpha_{i-1}$ ,  $d_i$  e  $\theta_i$  sono quantità con segno



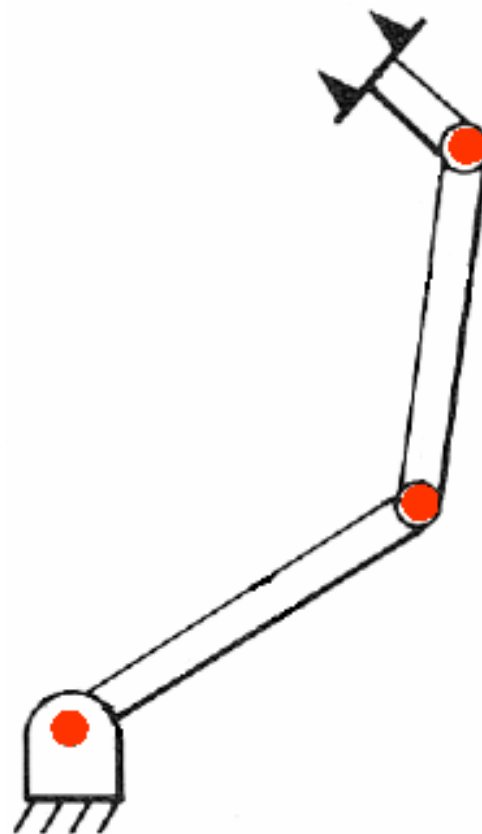
# Esempio

Manipolatore planare  
a tre bracci e tre  
giunti rotoidali



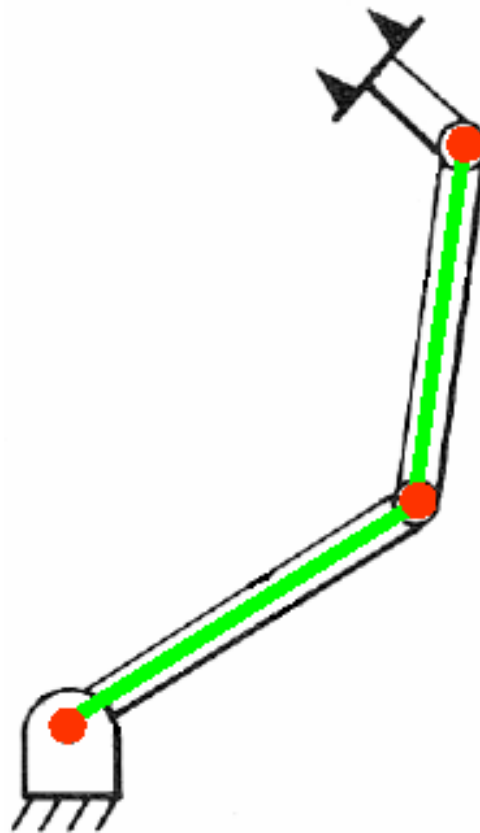
# Esempio

Identificazione degli  
assi di rotazione dei  
giunti rotoidali



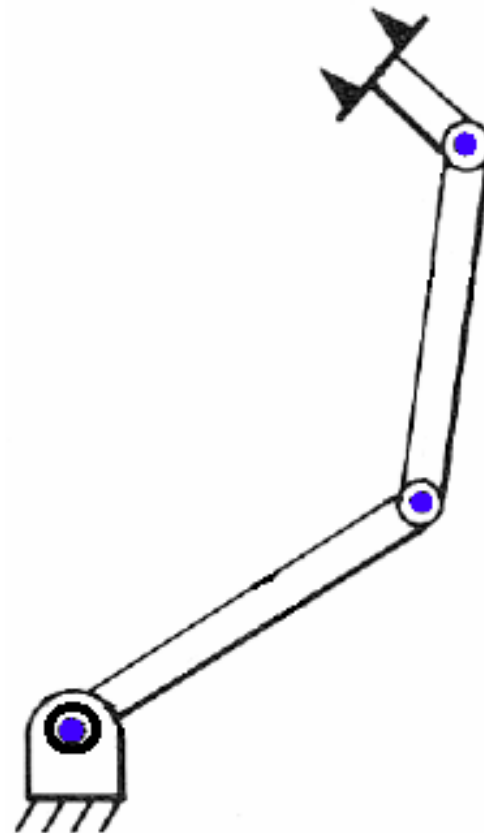
# Esempio

Identificazione delle  
**normali comuni** agli  
assi di rotazione dei  
giunti



# Esempio

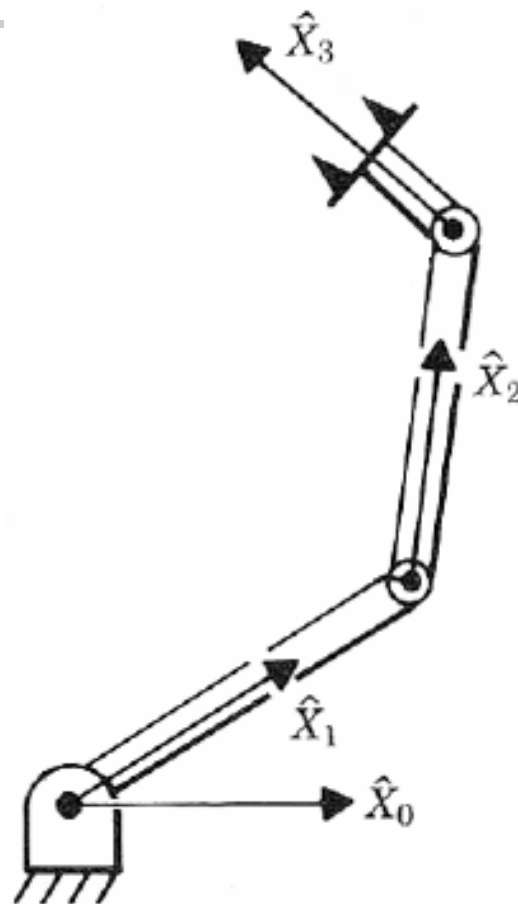
Definizione del verso  
degli assi  $Z_i$  dei  
sistemi di riferimento



# Esempio

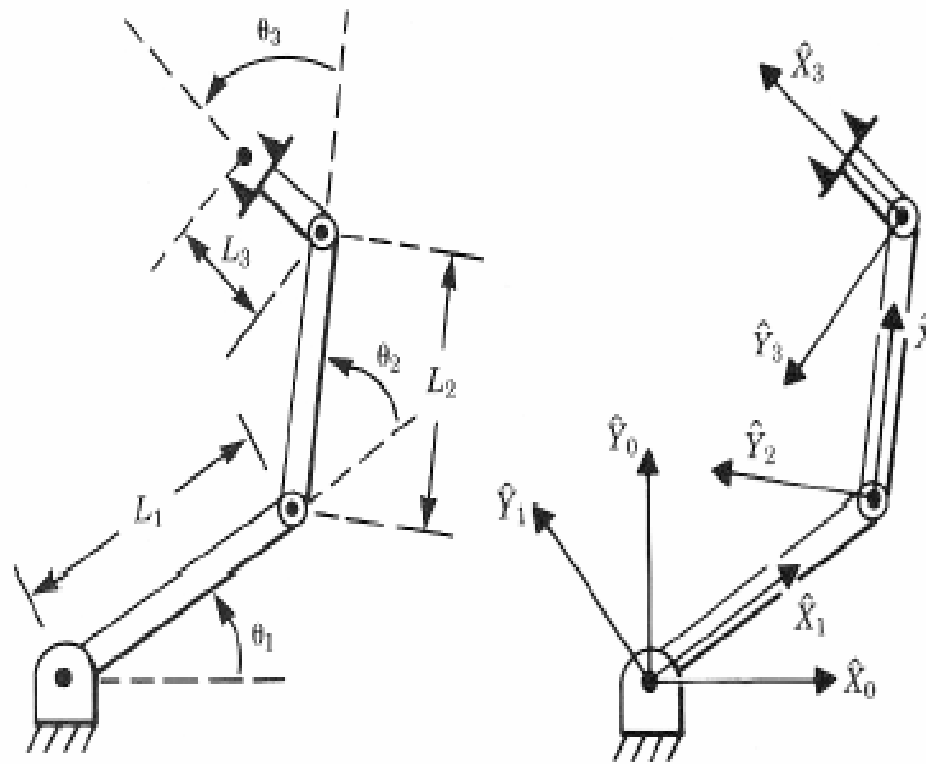
Assegnamo gli assi  $X_i$  allineandoli con le normali comuni e con il verso puntante l'asse del giunto successivo.

$X_3$  è allineato con il centro dell'organo terminale del manipolatore



# Esempio

| $i$      | $\alpha_{i-1}$ | $a_{i-1}$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|----------|----------------|-----------|-------|------------|
| <b>1</b> | 0              | 0         | 0     | $\theta_1$ |
| <b>2</b> | 0              | $L_1$     | 0     | $\theta_2$ |
| <b>3</b> | 0              | $L_2$     | 0     | $\theta_3$ |



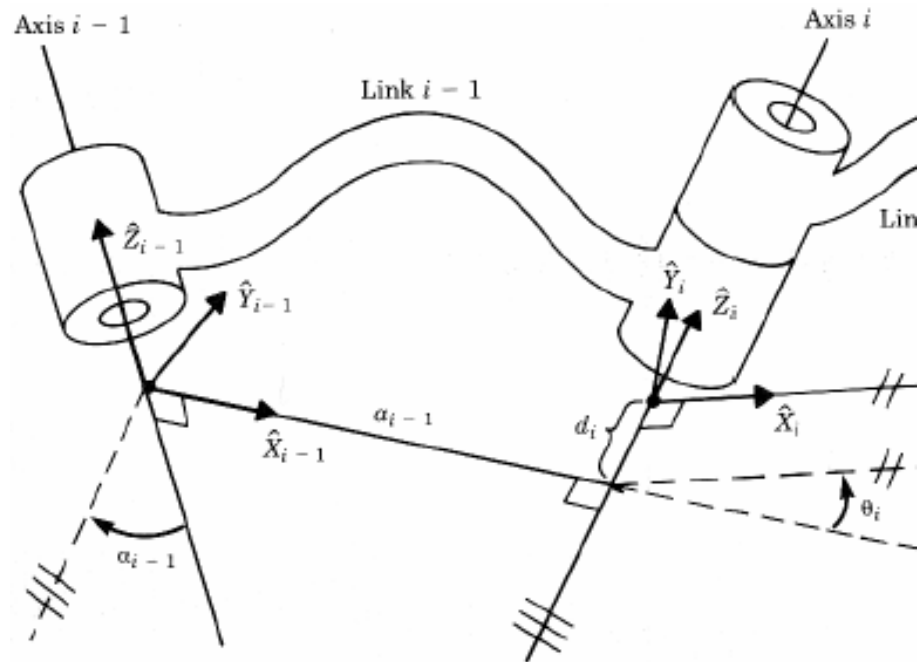
# Il Problema (riassunto)

## Problema

Determinare la trasformazione  $R$  che lega tra loro le terne dei sistemi di riferimento  $\{i\}$  e  $\{i+1\}$

La trasformazione è funzione di quattro parametri:  $a_{i-1}$   $\alpha_{i-1}$   $d_i$   $\theta_i$  di cui solo uno è variabile:

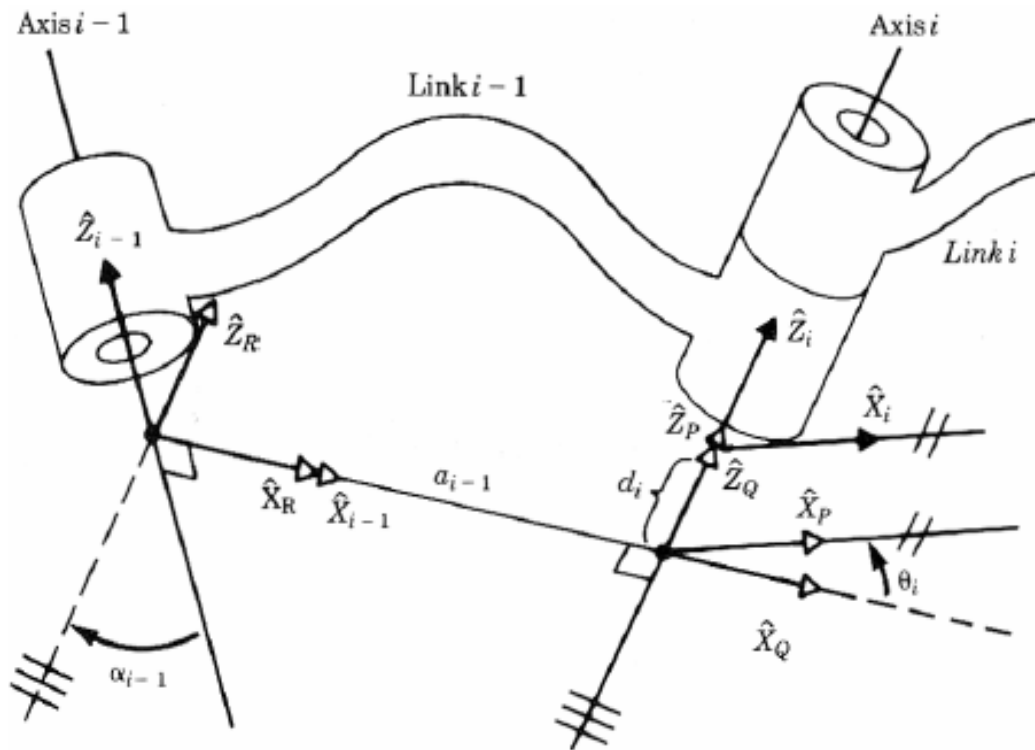
$\theta_i$  variabile per i giunti rotoidali,  $d_i$  per quelli prismatici



# Composizione di Trasformazioni

## Soluzione

Calcoliamo la trasformazione  $T$  come composizione di 4 trasformazioni elementari



# Quattro Trasformazioni)

Si definiscono tre sistemi di riferimento intermedi  $\{P\}$   
 $\{Q\}$   $\{R\}$

*Prima trasformazione omogenea* (ruota e trasla)

$\{R\}$  differisce da  $\{i-1\}$  solo per la rotazione  $\alpha_{i-1}$

- $\{Q\}$  differisce da  $\{R\}$  solo per la traslazione  $a_{i-1}$

*Seconda trasformazione omogenea* (ruota e trasla)

- $\{P\}$  differisce da  $\{Q\}$  solo per la rotazione  $\theta_i$

- $\{i\}$  differisce da  $\{P\}$  solo per la traslazione  $d_i$



# Due Matrici Omogenee

*Prima trasformazione omogenea*

$$R_Q^{i-1} = T_R^{i-1}(\alpha_{i-1})T_Q^R(a_{i-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & c \alpha_{i-1} & -s \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s \alpha_{i-1} & c \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Seconda trasformazione omogenea*

$$R_i^Q = T_P^Q(\theta_i)T_i^P(d_i) = \begin{bmatrix} c \theta_i & -s \theta_i & 0 & 0 \\ s \theta_i & c \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# La Trasformazione R Finale

Avendo sempre lavorato in terna corrente, la trasformazione finale risultante, si ottiene moltiplicando da sx a dx le singole componenti:

$$R_i^{i-1}(q_i) = R_Q^{i-1} R_i^Q$$

Dove  $q_i$  è la variabile di giunto e vale:

$q_i = \theta_i$  se il giunto è rotoidale

$q_i = d_i$  se il giunto è prismatico



# La Trasformazione R Finale

In formule, la matrice di trasformazione finale diventa:

$$R_i^{i-1}(q_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\theta_i & c\alpha_{i-1}c\theta_i & -s\alpha_{i-1} & -d_is\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\theta_i & s\alpha_{i-1}c\theta_i & c\alpha_{i-1} & d_ic\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Esempio (continua)

| <b><i>i</i></b> | <b><i>α<sub>i-1</sub></i></b> | <b><i>a<sub>i-1</sub></i></b> | <b><i>d<sub>i</sub></i></b> | <b><i>θ<sub>i</sub></i></b> |
|-----------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| <b>1</b>        | 0                             | 0                             | 0                           | θ <sub>1</sub>              |
| <b>2</b>        | 0                             | L <sub>1</sub>                | 0                           | θ <sub>2</sub>              |
| <b>3</b>        | 0                             | L <sub>2</sub>                | 0                           | θ <sub>3</sub>              |

$$R_1^0(q_1) = \begin{bmatrix} c \theta_1 & -s \theta_1 & 0 & 0 \\ s \theta_1 & c \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} c \theta_2 & -s \theta_2 & 0 & L_1 \\ s \theta_2 & c \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3^2(q_3) = \begin{bmatrix} c \theta_3 & -s \theta_3 & 0 & L_2 \\ s \theta_3 & c \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

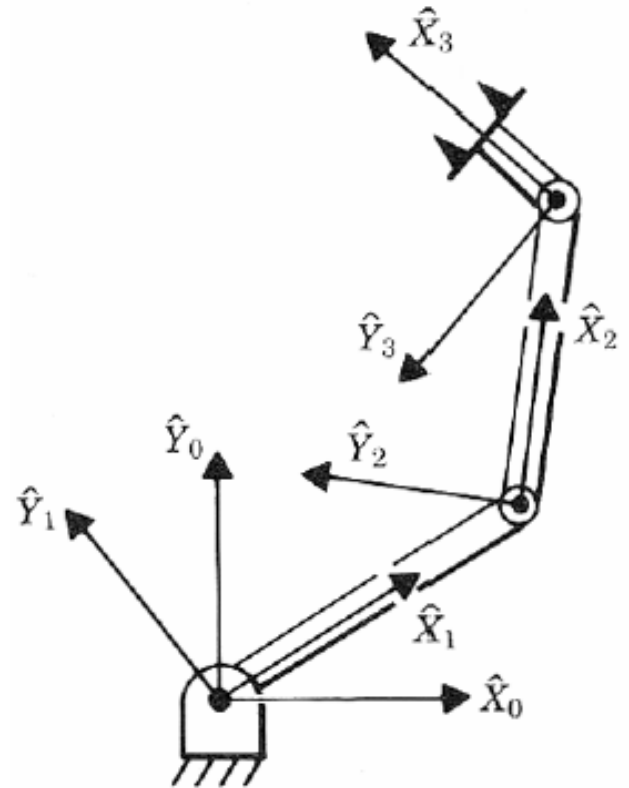


# Esempio (fine)

La matrice finale esprime la trasformazione dalla terna  $x_0y_0z_0$  alla terna  $x_3y_3z_3$

$$R_3^0 = R_1^0(q_1)R_2^1(q_2)R_3^2(q_3)$$

Le prime tre colonne rappresentano i versori della terna  $x_3y_3z_3$ , mentre la quarta è la posizione dell'origine  $o_3$  rispetto alla terna base



# La Famiglia Puma

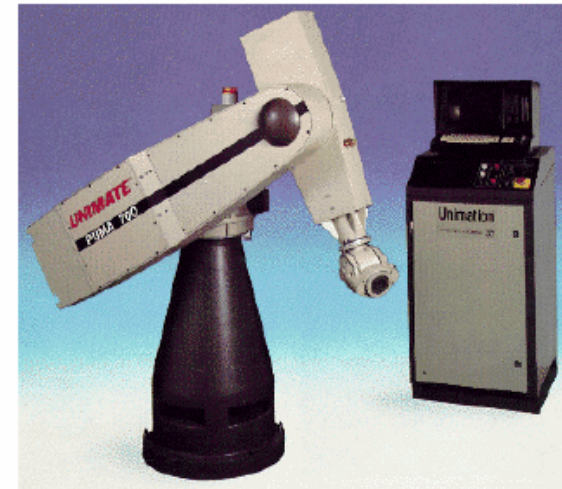
**PUMA 200**



**PUMA 500**



**PUMA 700**



# Puma 560

