MATRICI DI TRASFORMAZIONE

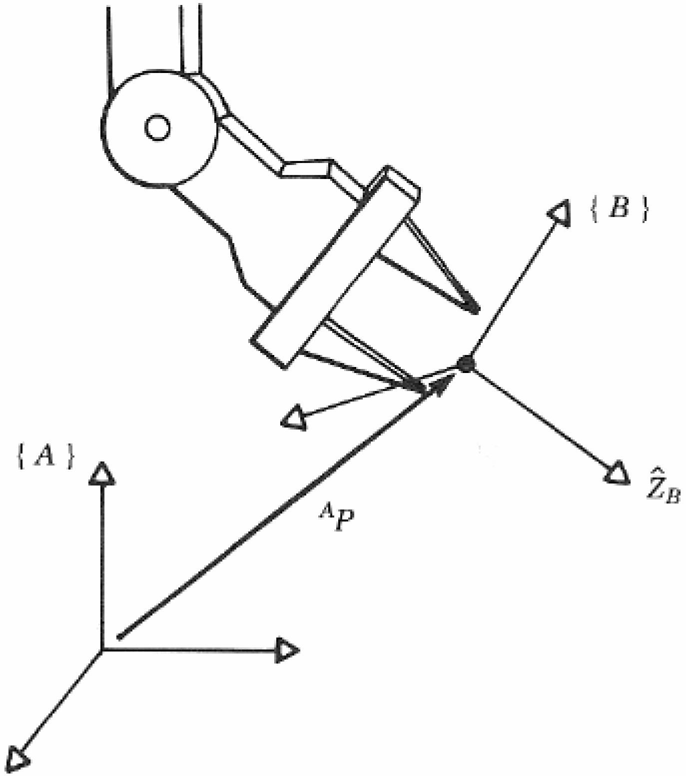
Paolo Fiorini
Dipartimento di Informatica
Università degli Studi di Verona

Introduzione

Manipolatore: catena cinematica di corpi rigidi (bracci) e giunti (rotoidali e prismatici)

Per poter manipolare un oggetto nello spazio bisogna conoscere *posizione* e *orientamento* dell'organo terminale

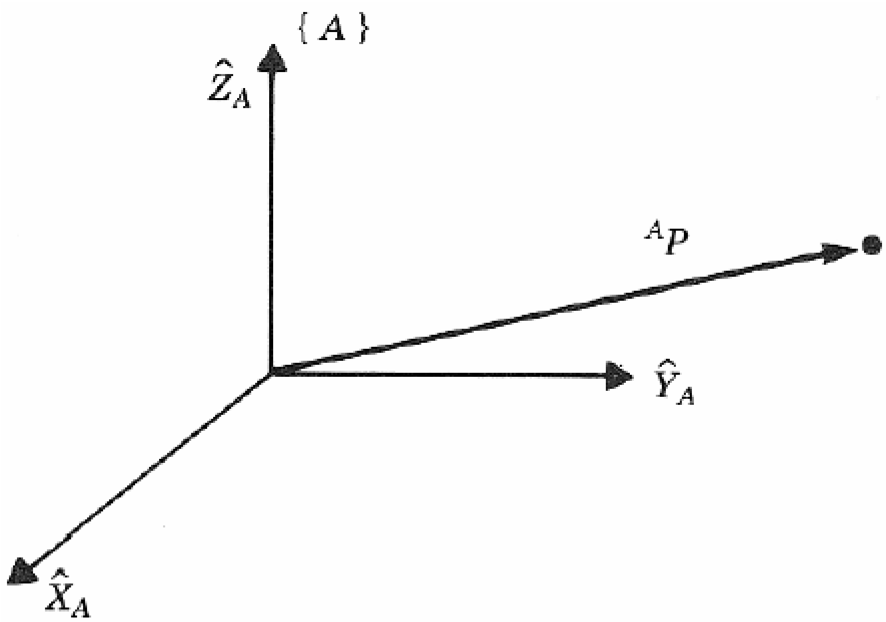
La ***cinematica diretta*** calcola la posa dell'organo terminale in funzione dei parametri di giunto



Posizione

La posizione di un punto nello spazio può essere descritta da un *vettore di posizione* 3x1 rispetto ad una terna *A* di coordinate di riferimento

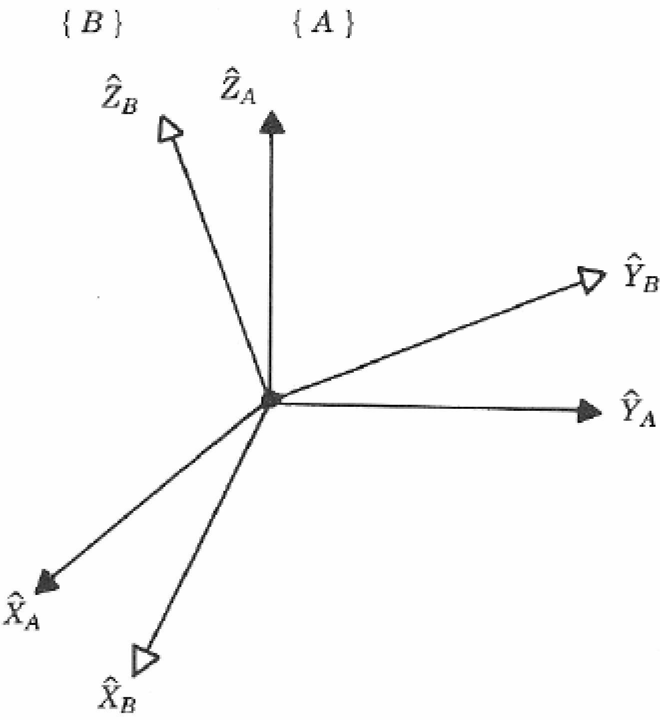
$$
{}^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}
$$



Orientamento

L'orientamento di un corpo rigido è descritto da una terna ortonormale (B) solidale con il corpo

I versori della terna B devono essere espressi rispetto alla terna di riferimento A



Orientamento

I versori [x′ y′ z′] della terna B sono quindi espressi dalle seguenti:

$$x' = x'_x\, x + x'_y\, y + x'_z\, z$$

$$y' = y'_x\, x + y'_y\, y + y'_z\, z$$

$$z' = z'_x\, x + z'_y\, y + z'_z\, z$$

Da cui la notazione compatta:

$$R = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'^T x & y'^T x & z'^T x \\ x'^T y & y'^T y & z'^T y \\ x'^T z & y'^T z & z'^T z \end{bmatrix}$$

Proprietà della matrice R

I vettori colonna della matrice R rappresentano i versori di una terna ortonormale, sono quindi:

- Ortogonali

$$x'^T y' = 0 \quad y'^T z' = 0 \quad z'^T x' = 0$$

- Di modulo unitario

$$x'^T x' = 1 \quad y'^T y' = 1 \quad z'^T z' = 1$$

Conseguentemente R è ortogonale, per cui valgono le relazioni:

$$R^T R = I \qquad R^T = R^{-1}$$

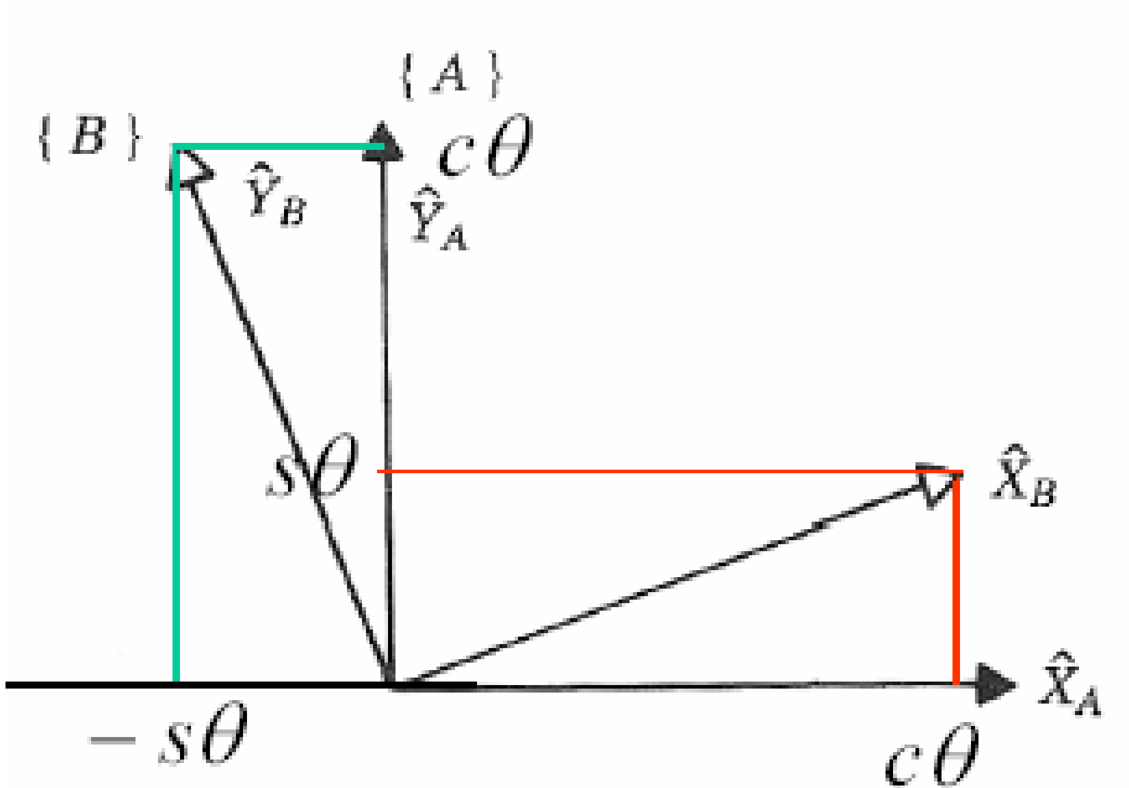
Rotazioni Elementari

Data la terna di riferimento A-*xyz* si consideri la rotazione di un angolo θ attorno all'asse z (una rotazione è positiva se in senso antiorario) e sia B-*x′y′z′* la nuova terna ottenuta.

Per quanto visto prima, i versori di R_z diventano:

$$x' = \begin{bmatrix} c\theta \\ s\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad y' = \begin{bmatrix} -s\theta \\ c\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad z' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotazioni Elementari



Costruzione delle componenti di x′ e y′

Le Tre Rotazioni Elementari

$$R_x(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\lambda & -s\lambda \\ 0 & s\lambda & c\lambda \end{bmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In maniera analoga si costruiscono le rotazioni elementari attorno agli assi x e y

Si noti che vale la seguente:

$$R_k(-\vartheta) = R_k^{\,T}(\vartheta)$$

dove k è uno degli assi

Rappresentazione di un vettore

Si consideri un corpo rigido e la terna B-*x′y′z′* ad esso solidale con origine *o′* coincidente con l'origine della terna di riferimento A-*xyz.*

Un punto P nello spazio è esprimibile in modo del tutto equivalente come:

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \qquad p' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix}$$

Rappresentazione di un vettore

Essendo p e p' lo stesso punto P nello spazio, si ha:

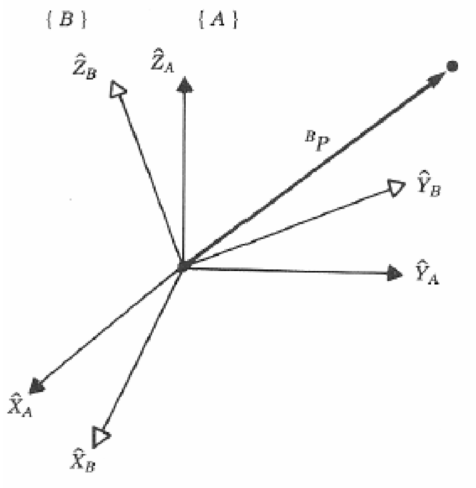
$$p = p'_x\, x' + p'_y\, y' + p'_z\, z' = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} p'$$

e quindi:

$$p = Rp'$$

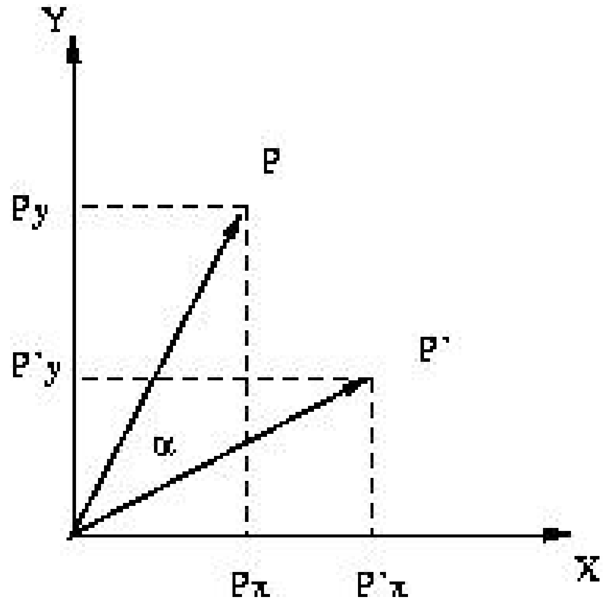
Viste le proprietà precedenti vale pure:

$$p' = R^T p$$



Rotazione di un Vettore

La matrice di rotazione può essere interpretata come l'operatore matriciale che consente di ruotare un vettore attorno ad un dato asse nello spazio.



Tre Significati per R

Una matrice di rotazione assume quindi tre significati geometrici distinti:

- Fornisce *l'orientamento di una terna* di coordinate rispetto ad un'altra
- Rappresenta una *trasformazione di coordiante* che mette in relazione uno stesso punto in due sistemi di riferimento diversi
- È l'operatore che permette di *ruotare un vettore* in una stessa terna di coordinate

Composizione di Matrici

Si considerino tre terne coordinate $x_0y_0z_0$, $x_1y_1z_1$ e $x_2y_2z_2$ aventi origine in comune, e un punto *p* nello spazio.
Per quanto visto valgono le seguenti:

$$\begin{aligned} p^1 &= R_2^1 p^2 \\ p^0 &= R_1^0 p^1 \\ p^0 &= R_2^0 p^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad p^0 = R_1^0 p^1 = R_1^0 (R_2^1 p^2) = R_1^0 R_2^1 p^2$$

Dalla sostituzione si ottiene che:

$$R_2^0 = R_1^0 R_2^1$$

Composizione di Matrici

L'operazione di rotazione espressa dall'esempio si può descrivere come segue:

•Come prima cosa si ruota la terna $x_0y_0z_0$ fino a sovrapporla alla terna $x_1y_1z_1$ in base a quanto dettato dalla prima matrice R

•Successivamente si ruota la terna ora sovrapposta a $x_1y_1z_1$ fino a portarla a coincidere con la terna $x_2y_2z_2$

La rotazione complessiva si ottiene come successione di rotazioni parziali, ognuna delle quali dipende dall'esito della precedente

Si dice che la rotazione avviene in ***terna corrente***

Composizione di Matrici

In alternativa si possono esprimere rotazioni successive sempre nella stessa terna base. In questo caso si parla di rotazioni in ***terna fissa***.
Sia $\overline{R}_2^0$ la matrice che esprime $x_2y_2z_2$ rispetto la terna base e ottenuta da una rotazione della terna 1 secondo la matrice $\overline{R}_2^1$
Si procede come segue:
- Riallineiamo la terna 1 con la terna 0
- Eseguiamo la rotazione in terna corrente
- Si compensa il riallineamento applicando la trasformazione inversa

$$\overline{R}_2^0 = R_1^0 R_0^1 \overline{R}_2^1 R_1^0$$

$$\overline{R}_2^0 = R_2^1 R_1^0$$

Composizione di Matrici

Importante:
Un aspetto interessante della composizione di rotazioni è la *non commutatività* del prodotto di matrici.

Si giunge alla conclusione che in generale due rotazioni non commutano e che il risultato della combinazione di più rotazioni dipende dall'ordine con cui si succedono

Nota:
Quanto sopra non vale per le rotazioni infinitesimali

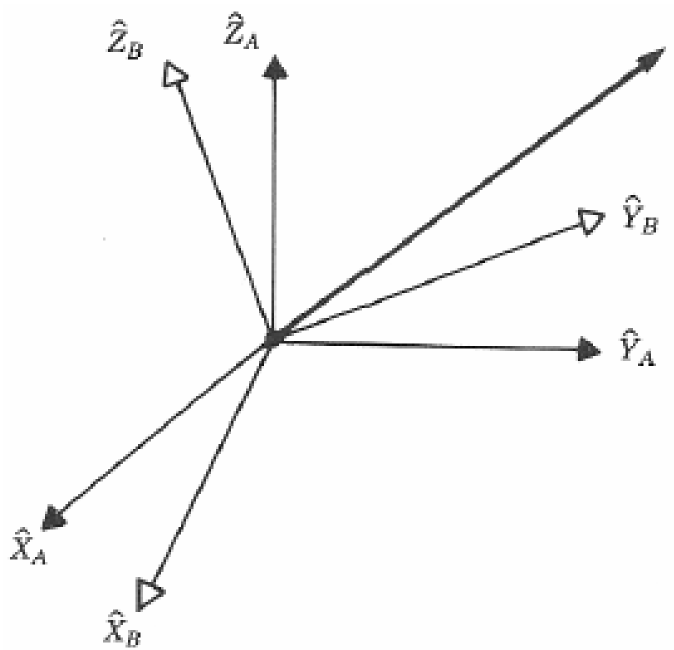
Rotazioni attorno ad un asse arbitrario

Sia *r* il versore che identifica un asse di rotazione arbitrario rispetto alla terna di riferimento *xyz*.

Si procede come segue:

- Si sovrappone *r* a *z* con la successione di una rotazione di $-\alpha$ attorno a *z* e di una rotazione di $-\beta$ attorno a *y*
- Si applica la rotazione di φ attorno a *z*
- Si ripristina l'orientamento iniziale di *r* con una rotazione di β attorno a *y* seguita da una rotazione di α attorno a *z*

Rotazioni attorno ad un asse arbitrario



In sintesi la matrice di rotazione risulta essere:

$$R_r(\varphi) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\varphi)R_y(-\beta)R_z(-\alpha)$$

Rotazioni attorno ad un asse arbitrario

Meno in sintesi, per chi se la vuole calcolare, la matrice risulta essere:

$$R_r(\varphi)=\begin{bmatrix} r_x^2(1-c\varphi)+c\varphi & r_xr_y(1-c\varphi)-r_zs\varphi & r_xr_z(1-c\varphi)+r_ys\varphi \\ r_xr_y(1-c\varphi)+r_zs\varphi & r_y^2(1-c\varphi)+c\varphi & r_yr_z(1-c\varphi)-r_xs\varphi \\ r_xr_z(1-c\varphi)-r_ys\varphi & r_yr_z(1-c\varphi)+r_xs\varphi & r_z^2(1-c\varphi)+c\varphi \end{bmatrix}$$

Rotazioni attorno ad un asse arbitrario

Per la matrice appena illustrata vale la seguente proprietà:

$$R_{-r}(-\varphi) = R_r(\varphi)$$

Che mostra come tale rappresentazione non sia univoca. Una rotazione di $-\varphi$ sull'asse $-r$ è equivalente ad una rotazione φ sull'asse *r.*

Per la risuluzione del problema inverso vale che:

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1}{2}\right) \qquad r = \frac{1}{2\sin\varphi}\begin{bmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{bmatrix}$$

Rappresentazioni Minime

Le matrici di rotazione forniscono una descrizione ridondante dell'orientamento di una terna

- Nove elementi
- Sei vincoli legati all'ortogonalità

I parametri liberi per la descrizione dell'orientamento sono in numero di tre.

Una rappresentazione dell'orientamento in termini di tre parametri indipendenti costituisce una *rappresentazione minima*

Rappresentazioni Minime

- Angoli di Eulero

  Rotazioni espresse in terna corrente

- Angoli di RPY

  Rotazioni espresse in terna fissa

Angoli di Eulero

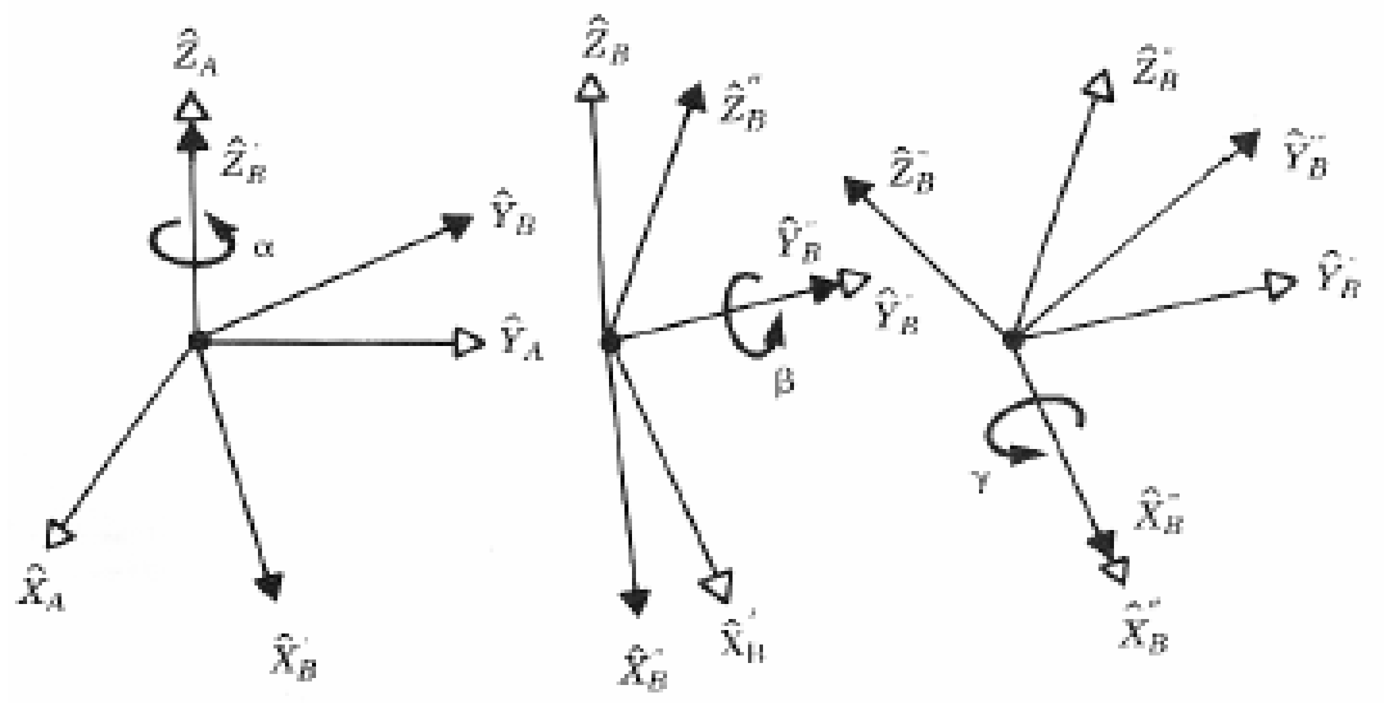
Rappresentazione minima espressa in terna corrente.

Ogni rotazione è espressa dalla combinazione di tre rotazioni elementari.

In base alla scelta di quali angoli usare ci sono 12 possibili combinazioni (3x2x2).

Solitamente si usa la rappresentazione ZYZ.

Angoli di Eulero



Siano α β γ gli angoli di Eulero considerati

Angoli di Eulero

L'orientazione finale della terna si ottiene dalla composizione di rotazioni rispetto alla terna corrente.

$$R_{EUL} = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}$$

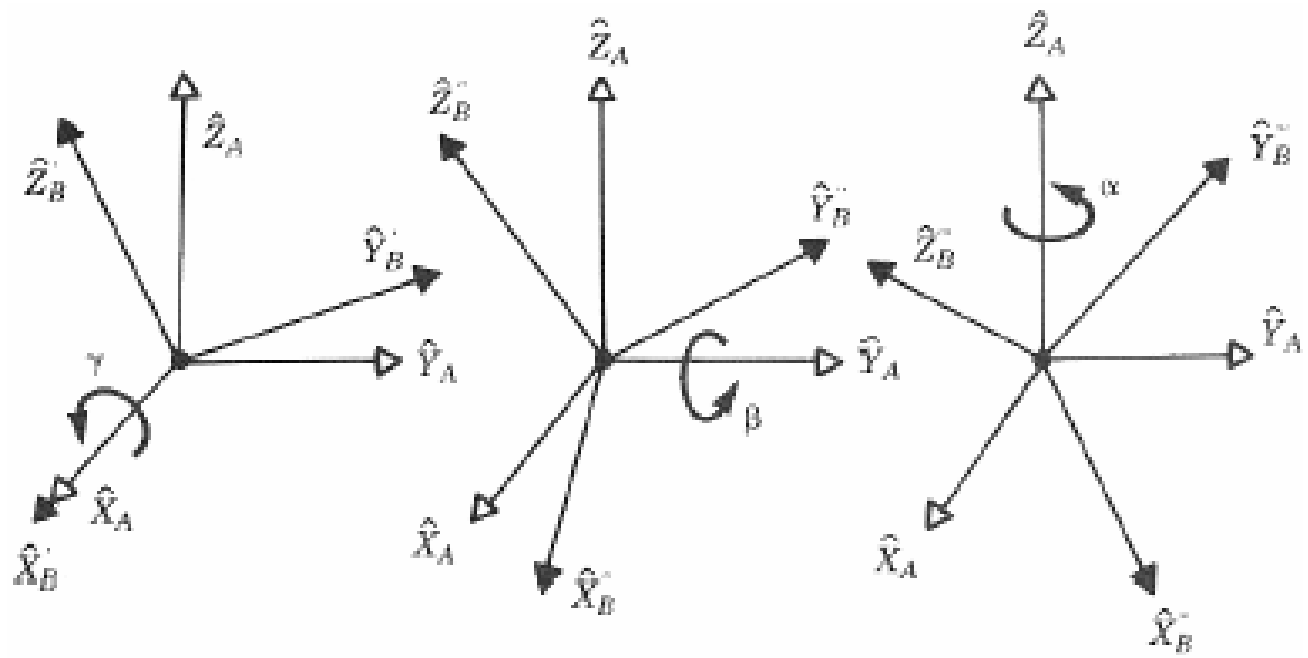
Angoli di RPY

Rappresentazione minima espressa in terna fissa.

RPY sta per Roll-Pitch-Yaw (rollio, beccheggio, imbardata)

Ogni rotazione è espressa dalla combinazione di tre rotazioni elementari espresse rispetto ad una terna solidale con il corpo rigido.

Angoli di RPY



Siano α β γ gli angoli di RPY considerati

Angoli di RPY

L'orientazione finale della terna si ottiene dalla composizione di rotazioni rispetto alla terna fissa, moltiplicando da destra a sinistra le matrici elementari.

$$R_{RPY} = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix}$$

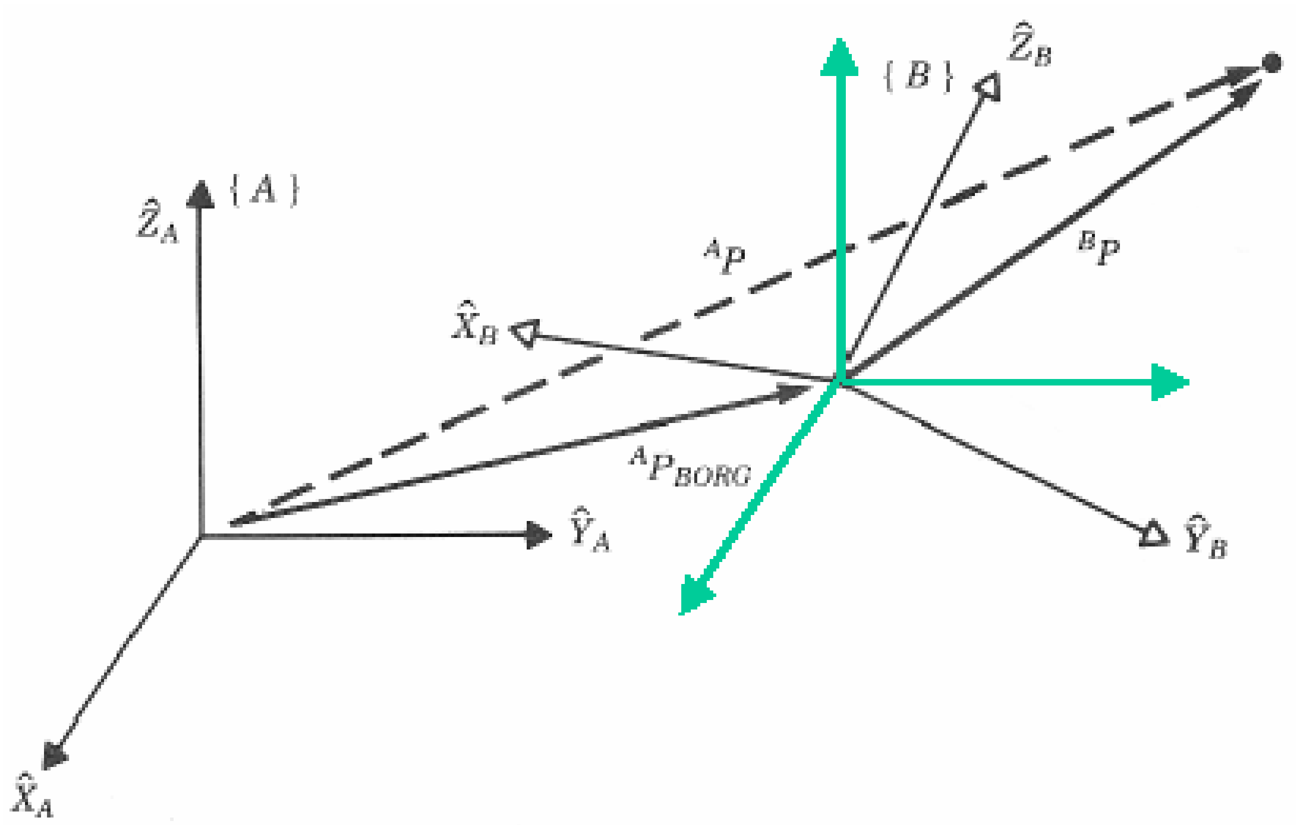
Trasformazioni Omogenee

La posizione di un corpo nello spazio è individuata in termini di:

•Posizione di un apportuno punto solidale con il corpo rigido (*traslazione*)

•Orientamento, espresso in base alle componenti dei versori degli assi di una terna solidale al corpo stesso (*rotazione*)

Trasformazioni Omogenee



Trasformazioni Omogenee

Da semplici considerazioni geometriche si ricava che:

$$p^0 = p^0_{B\_orig} + R^0_1 p^1$$

Trasformazione di traslazione + rotazione

La trasformazione inversa si ottiene moltiplicando da sx a dx per l'inversa (o trasposta) di R

$$p^1 = -R^{0\,T}_1 p^0_{B\_orig} + R^{0\,T}_1 p^0$$

$$p^1 = -R^1_0 p^0_{B\_orig} + R^1_0 p^0$$

Trasformazioni Omogenee

Uniamo traslazione e rotazione per ottenere una rappresentazione compatta (*omogenea*) della trasformazione

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0 & o_1^0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione precedente si riscrive come

$$\bar{p}^0 = A_1^0 \bar{p}^1$$

Trasformazioni Omogenee

La trasformazione inversa risulta ora data da

$$\overline{p}^1 = A_0^1 \overline{p}^0 = (A_1^0)^{-1} \overline{p}^0$$

dove l'inversa è espressa come

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} R_1^{0^T} & -R_1^{0^T} o_1^0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^1 & R_0^1 o_1^0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Si noti che per la matrice di trasformazione omogenea non vale l'ortogonalità e quindi

$$A^{-1} \neq A^T$$