Elaborazione di segnali e immagini: modulo segnali

Luglio 2014

Esercizio 1

Si determini la risposta totale nel dominio complesso e si studi la stabilita' asintotica e BIBO del sistema descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{dv(t)}{dt} - 6v(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - u(t), \qquad (1)$$

dove $u(t) = cost\delta_{-1}(t)$ rappresenta l'ingresso, v rappresenta l'uscita e le condizioni iniziali sono $v(0^-) = 1$, $\frac{dv(0^-)}{dt} = 0$.

Soluzione Considerando le condizioni iniziali sull'uscita abbiamo:

$$\mathcal{L}[d^2v(t)/dt^2] = s^2V(s) - s$$

$$\mathcal{L}[dv(t)/dt] = sV(s) - 1$$

Sostituendo nell'equazione (1) si ottiene:

$$s^2V(s) - s + sV(s) - 1 - 6V(s) = s^2U(s) - U(s)$$

$$\Leftrightarrow V(s)(s^2 + s - 6) - s - 1 = (s^2 - 1)U(s)$$

$$\Rightarrow V(s) = \frac{s+1}{s^2+s-6} + \frac{s^2-1}{s^2+s-6}U(s),$$

dove il primo termine della sommatoria rappresenta la risposta libera nel piano complesso mentre il secondo termine rappresenta la risposta forzata (nel complesso).

Il polinomio caratteristico del sistema $p(s) = s^2 + s - 6$ ha come radici $s_1 = 2, s_2 = -3$, quindi il sistema non e' asintoticamente stabile.

I poli della funzione di trasferimento del sistema $H(s) = \frac{s^2-1}{s^2+s-6}$ coincidono con le radici del polinomio caratteristico, quindi la condizione necessaria per la BIBO stabilita' non e' soddisfata.

La trasformata di Laplace della funzione d'ingresso: $U(s) = \mathcal{L}[cost\delta_{-1}(t)] = \frac{s}{s^2+1}$.

Da qua si ricava la risposta totale:

$$V(s) = \frac{s+1}{(s^2+s-6)} + \frac{s(s^2-1)}{(s^2+s-6)(s^2+1)} = \frac{2s^3+s^2+1}{(s+3)(s-2)(s^2+1)}$$

Esercizio 2

Tracciare il diagramma di Bode relativo alla risposta in frequenza corrispondente alla funzione di trasferimento del sistema (1) descritto nell'esercizio precedente.

Soluzione

La risposta in frequenza si ottiene valutando la funzione di trasferimento $H(s)$ per $s = j\omega$ (vedi figura sottostante):

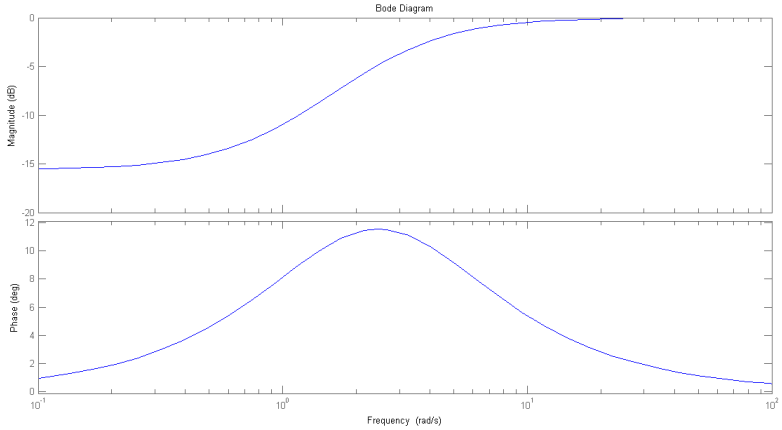
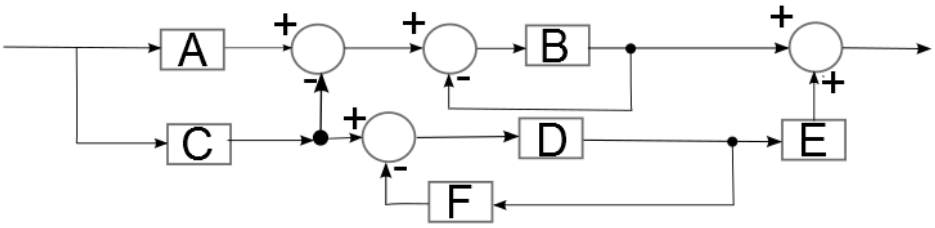


Figure 1: Diagrammi di Bode di $H(j\omega)$ con MATLAB

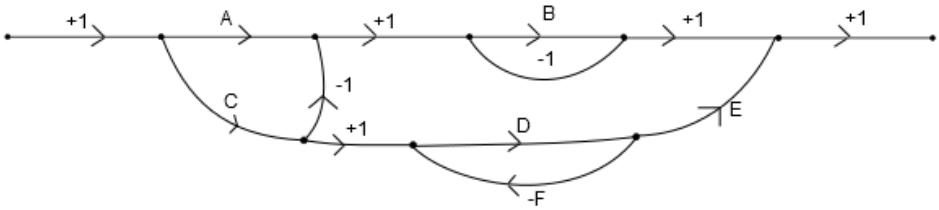
Esercizio 3

Si trovi il rapporto tra l'uscita e l'ingresso per il sistema di controllo schematizzato nella seguente figura:



Soluzione

Esempio di soluzione con lo schema di flusso:



Cammini aperti:
$P_1 = AB, P_2 = -CB, P_3 = CDE$
Anelli di retroazione:
$P_{11} = -DF, P_{21} = -B$
I due anelli non si toccano quindi:
$P_{12} = P_{11}P_{21} = BDF$
$\Delta = 1 - P_{11} - P_{21} + P_{12} = 1 + DF + B + BDF$
Calcoliamo Δ_1 dopo aver eliminato gli anelli che toccano P_1 (P_{21} e P_{12}):
$\Delta_1 = 1 - P_{11} = 1 + DF$
Calcoliamo Δ_2 dopo aver eliminato gli anelli che toccano P_2 (P_{21} e P_{12}):
$\Delta_2 = 1 - P_{11} = 1 + DF$
Calcoliamo Δ_3 dopo aver eliminato gli anelli che toccano P_3 (P_{11} e P_{12}):
$\Delta_3 = 1 - P_{21} = 1 + B$
$T = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta} = \frac{AB + ABDF - CB - CBDF + CDE + BCDE}{1 + B + DF + BDF}$

Esercizio 4 Data l'equazione alle differenze:

$$y(k) - y(k-1) + 0.25y(k-2) = u(k) - 3u(k-1) \quad (2)$$

con condizioni iniziali $y(-1) = 4, y(-2) = 3$ e ingresso $u(k) = (-0.5)^k \delta_{-1}(k)$.

1. Calcolare l'evoluzione libera e studiare la stabilita' asintotica.

2. Calcolare l'evoluzione forzata e studiare la stabilita' BIBO.

Soluzione

1. Il polinomio caratteristico $z^2 - z + 0.25 = 0$ ammette le soluzioni $z_1 = z_2 = \frac{1}{2}$

La risposta libera e':

$y_l(k) = c_1(1/2)^k + c_2 k(1/2)^k$.

Dalle condizioni iniziali si ricava che $c_1 = 13/4$ e $c_2 = 5/4$, quindi

$y_l(k) = \frac{13}{4}(1/2)^k + \frac{5}{4}k(1/2)^k$

Il sistema e' asintoticamente stabile.

2. La trasformata zeta dell'ingresso e': $U(z) = \frac{z}{z+1/2}$

La funzione di trasferimento del sistema e': $H(z) = \frac{z-3}{z^2-z+0.25}$

Si ottiene quindi la risposta forzata $Y_f(z) = H(z)U(Z)$

$\frac{Y_f(z)}{z} = \frac{z-3}{(z-1/2)^2(z+1/2)}$

$\frac{Y_f(z)}{z} = \frac{A}{(z-1/2)^2} + \frac{B}{(z-1/2)} + \frac{C}{(z+1/2)}$

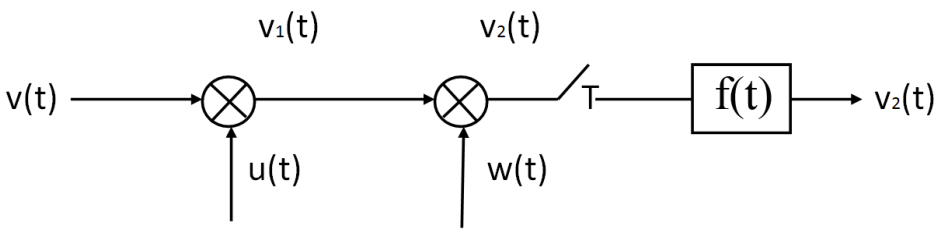
Dopo aver determinato A, B, C si ottiene la risposta forzata nel dominio discreto antitrasformando:

$y_f(k) = Ak(1/2)^k\delta_{-1}(k) + B(1/2)^k\delta_{-1}(k) + C(-1/2)^k\delta_{-1}(k)$

Il sistema e' BIBO stabile.

Esercizio 5

Dato il segnale $V(f) = \dfrac{1}{2}\Pi\left(\dfrac{f-4}{3}\right) + 2\Lambda\left(\dfrac{f-6}{2}\right)$, dove $\Lambda(f)$ e' l'impulso triangolare di ampiezza e area unitarie, e lo schema seguente:



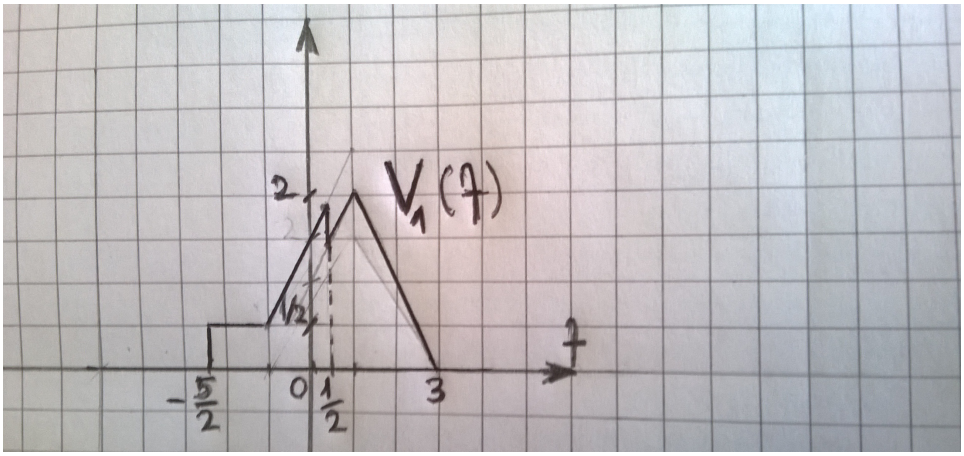
dove u(t) = $e^{-j10\Pi t}$, w(t) = $cos(4\Pi t)$ e f(t) e' il filtro passa basso ideale centrato in origine di ampiezza unitaria e risposta in frequenza F(f) = $\Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right)$.

(i) Disegnare i segnali $V_1(f)$ e $V_2(f)$

(ii) Trovare dei valori opportuni per il periodo di campionamento T in modo che non si verifichi aliasing e per f_L in modo da ottenere in uscita il segnale $v_2(t)$.

Soluzione

La trasformata di Fourier del segnale $u(t)$ e' l'impulso di Dirac applicato in $f_0 = -5$, quindi il segnale $V_1(f) = V(f+5)$ e' dato dalla traslazione di $V(f)$ lungo l'asse delle frequenze:



La larghezza di banda monolatera di $V_1(f)$ e' $B_1 = 3$.

Il segnale $w(t)$ ha come trasformata di Fourier due righe spettrali collocati in -2 e 2 di ampiezza $\frac{1}{2}$, quindi modulando V_1 con $W(f)$ si ottiene:

$V_2(f) = \frac{1}{2}V_1(f+2) + \frac{1}{2}V_1(f-2)$,

che e' una funzione con il supporto compreso tra $-\frac{9}{2}$ e 5 e quindi ha la banda monolatera $B_2 = 5$.

Scegliendo una cadenza di campionamento f_c maggiore della frequenza di Nyquist $f_N = 2B_2 = 10$, per esempio $f_c = 11$ non si verifica aliasing.

Il filtro di ricostruzione $F(f) = T\Pi(\frac{f}{2f_L})$, dove $T = 1/f_c = 1/11$ deve soddisfare:

$B_2 < f_L < f_c - B_2 \Leftrightarrow 5 < f_L < 6$, quindi qualsiasi valore di $f_L \in (5, 6)$ e' un valore opportuno per la soluzione.

Esercizio 6 Tracciare il luogo delle radici della seguente funzione di trasferimento ad anello aperto:

$$G(s)H(s) = \frac{Ks}{s^3 + 6s^2 + 9s + 4}, K > 0. \tag{3}$$

Calcolare le coordinate della pulsazione corrispondente all' intersezione con l'asse immaginario e il valore di K corrispondente.

Quanto vale il margine di guadagno per un valore di progetto $K_p = 25$?

Soluzione

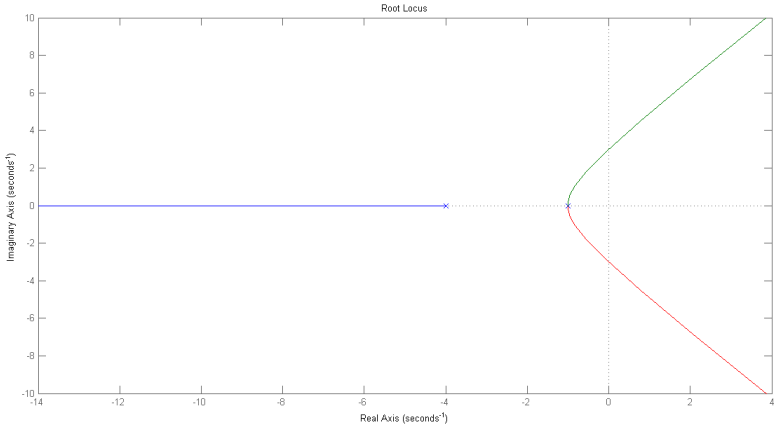
I poli in ciclo aperto sono $s_1 = s_2 = -1$ e $s_3 = -4$ e determinano la parte reale del luogo delle radici (vedi la figura sottostante).

Abbiamo 3 asintoti. Il centro degli asintoti e' $\sigma_c = -2$, mentre gli angoli degli asintoti con l'asse reale sono $\beta_0 = 60°, \beta_1 = 180°, \beta_2 = 300°$.

Non ci sono punti di biforcazione appartenenti al luogo delle radici per $K > 0$.

Abbiamo 2 punti di intersezione con l'asse immaginario corrispondenti alle pulsazioni $\omega = \pm 3$ e al guadagno $K = 50$ che si ottengono sostituendo s con $\pm j\omega$ nell'equazione $s^3 + 6s^2 + 9s + 4 + k = 0$.

Il margine di guadagno e' 2.


Root Locus
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4