Elaborazione di segnali e immagini: modulo segnali

Giugno 2014

Tempo a disposizione: **3 ore** per il totale, **2 ore** il parziale.

Esercizio 1

Si determini la risposta totale nel dominio complesso utilizzando la trasformata di Laplace e si studi la stabilita' asintotica e BIBO del sistema descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3v(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{dv(t)}{dt} + 6v(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - u(t), \qquad (1)$$

dove $u(t) = 5sint\delta_{-1}(t)$ rappresenta l'ingresso, v rappresenta l'uscita e le condizioni iniziali sono $v(0^-) = \frac{dv(0^-)}{dt} = 0$, $\frac{d^2v(0^-)}{dt^2} = 1$.

Soluzione Considerando le condizioni iniziali sull'uscita abbiamo:

$$\mathcal{L}[d^3v(t)/dt^3] = s^3V(s) - 1$$

$$\mathcal{L}[d^2v(t)/dt^2] = s^2V(s)$$

$$\mathcal{L}[dv(t)/dt] = sV(s)$$

Sostituendo nell'equazione (1) si ricava:

$$s^3V(s) - 1 + 6s^2V(s) + sV(s) + 6V(s) = s^2U(s) - U(s)$$

$$\Leftrightarrow V(s)(s^3 + 6s^2 + s + 6) - 1 = (s^2 - 1)U(s)$$

$$\Rightarrow V(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + s + 6} + \frac{s^2 - 1}{s^3 + 6s^2 + s + 6}U(s),$$

dove il primo termine della sommatoria rappresenta la risposta libera nel piano complesso mentre il secondo termine rappresenta la risposta forzata (nel complesso).

Il polinomio caratteristico del sistema $p(s) = s^3+6s^2+s+6$ ha come radici $s_1 = -6, s_2 = j, s_3 = -j$, quindi il sistema non e' asintoticamente stabile ($Re(j) > 0$).

I poli della funzione di trasferimento del sistema $H(s) = \frac{s^2-1}{s^3+6s^2+s+6}$ sono $s_1 = -6, s_2 = j, s_3 = -j$, quindi la condizione necessaria per la BIBO stabilita' non e' soddisfata ($Re(j) > 0$).

La trasformata di Laplace della funzione d'ingresso: $U(s) = \mathcal{L}[5sint\delta_{-1}(t)] = \frac{5}{s^2+1}$.

Da qua si ricava la risposta totale:

$$V(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s + 6)} + \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)(s + 6)}U(s) = \frac{6s^2 - 4}{(s^2 + 1)^2(s + 6)},$$

Esercizio 2

Tracciare il diagramma di Bode relativo alla risposta in frequenza corrispondente alla funzione di trasferimento del sistema (1) descritto nell'esercizio precedente.

Soluzione

La risposta in frequenza si ottiene valutando la funzione di trasferimento $H(s)$ per $s = j\omega$. Si ottiene:

$$H(j\omega) = \frac{-1}{12} \frac{(1 + j\omega(-1))(1 + j\omega)}{(1 + j\omega\frac{1}{6})(1 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{2})},$$

dove $\omega_n = \sqrt{2}$, la pulsazione naturale, e' per definizione il modulo dei due poli complessi coniugati, mentre $\xi = 0$ e' il coefficiente di smorzamento (nullo perche' la parte reale di un polo immaginario puro e' nulla).

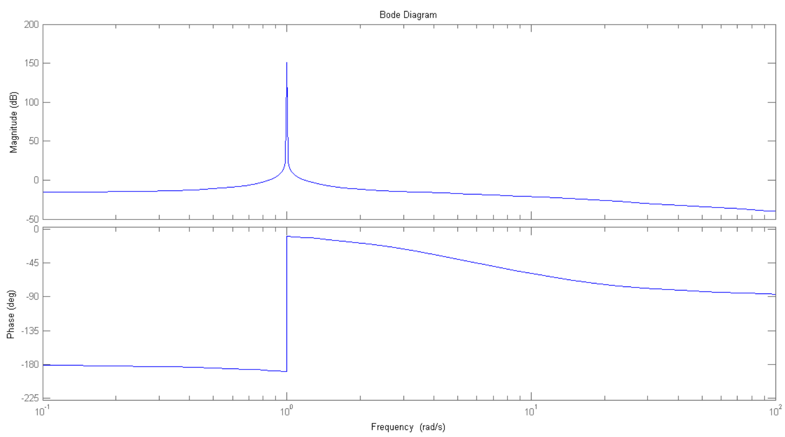
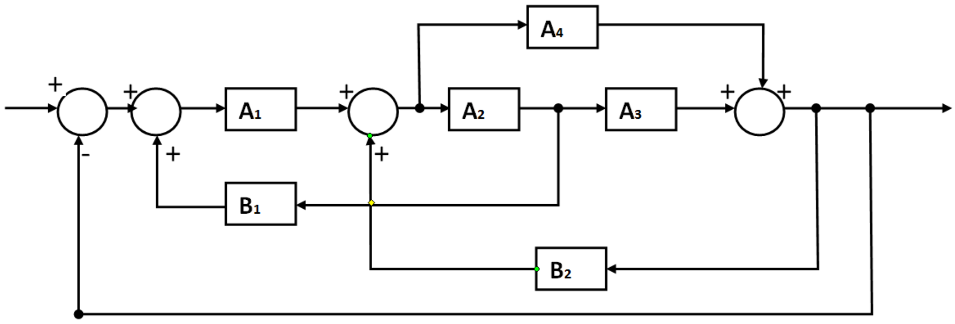


Figure 1: Diagrammi di Bode di $H(j\omega)(con MATLAB)$.

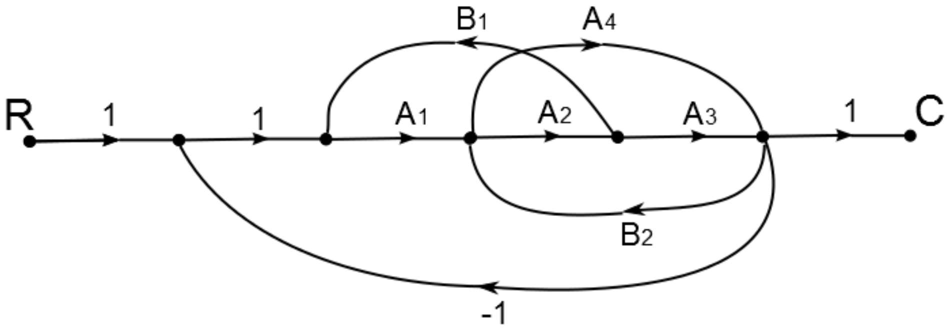
Esercizio 3

Si trovi il rapporto tra l'uscita e l'ingresso per il sistema di controllo schematizzato nella seguente figura:



Soluzione

Esempio di soluzione con lo schema di flusso:



Cammini aperti:

$P_1 = A_1A_2A_3, P_2 = A_1A_4$

Cammini chiusi:

$P_{11} = A_1A_2B_1, P_{21} = A_2A_3B_2, P_{31} = -A_1A_2A_3, P_{41} = A_4B_2, P_{51} = -A_1A_4$

$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31} + P_{41} + P_{51}) = 1 - A_1A_2B_1 - A_2A_3B_2 + A_1A_2A_3 - A_4B_2 + A_1A_4$

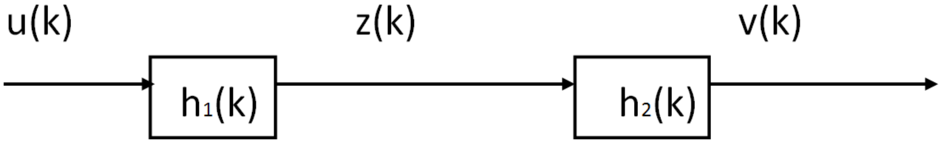
Non vi sono anelli che non si toccano, tutti gli anelli toccanto entrambi i cammini aperti, percio'

$\Delta_1 = \Delta_2 = 1$

$\frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{A_1A_2A_3 + A_1A_4}{1 - A_1A_2B_1 - A_2A_3B_2 + A_1A_2A_3 - A_4B_2 + A_1A_4}$

Esercizio 4

Si consideri il sistema discreto in serie di figura:



Supponendo che la risposta impulsiva del primo sistema sia $h_1(k) = (\frac{1}{2})^k \delta_{-1}(k)$ e la risposta impulsiva del secondo sistema sia $h_2(k) = (\frac{1}{3})^k \delta_{-1}(k)$, si determini:

(i) i due modelli ARMA che rappresentano ciascun sistema posto in serie,

(ii) un modello ARMA che rappresenta il sistema serie,

(iii) la risposta in uscita al primo sistema e al sistema serie in corrispondenza alla successione d'ingresso $u(k) = e^{j\frac{\pi}{2}k}\delta_{-1}(k)$.

Soluzione

(i) $H_1(z) = \frac{\frac{z}{1/2}}{\frac{z}{1/2}-1} = \frac{2z}{2z-1}$

$H_2(z) = \frac{3z}{3z-1}$

$Z(z) = H_1(z)U(z) = \frac{2z}{2z-1}U(z)$ oppure,

$(2z-1)Z(z) = 2zU(z)$. Da qua si ricava l'equazione delle differenze del modello ARMA:

$2z(k) - z(k-1) = 2u(k)$.

Nello stesso modo:

$V(z) = H_2(z)Z(z) = \frac{3z}{3z-1}Z(z)$

$(3z-1)V(z) = 3zZ(z) \Rightarrow 3v(k) - v(k-1) = 3z(k)$.

(ii) $V(z) = H_2(z)Z(z) = H_1(z)H_2(z)U(z) = \frac{2z}{2z-1}\frac{3z}{3z-1}U(z) = \frac{6z^2}{(2z-1)(3z-1)}U(z)$

$\Rightarrow (6z^2 - 5z + 1)V(z) = 6z^2U(z) \Rightarrow 6v(k) - 5v(k-1) + v(k-2) = 6u(k)$

(iii) $u(k) = e^{j\frac{\Pi}{2}k}\delta_{-1}(k) \Rightarrow U(z) = \frac{z}{z-j}$ (abbiamo tenuto conto del fatto che $e^{j\frac{\Pi}{2}} = j$)

$Z(z) = \frac{2z}{2z-1}\frac{z}{z-j} = \frac{2z^2}{(2z-1)(z-j)}$

$V(z) = \frac{6z^2}{(2z-1)(3z-1)}\frac{z}{z-j} = \frac{6z^3}{(2z-1)(3z-1)(z-j)}$

Per trovare $z(k)$ e $v(k)$ scomponiamo in frazioni $Z(z)/z$ e $V(z)/z$, poi antitrasformiamo:

$\frac{Z(z)}{z} = \frac{2z}{(2z-1)(z-j)} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{z-j}$

$\frac{V(z)}{z} = \frac{6z^2}{2z-1)(3z-1)(z-j)} = \frac{C}{2z-1} + \frac{D}{3z-1} + \frac{E}{z-j}.$

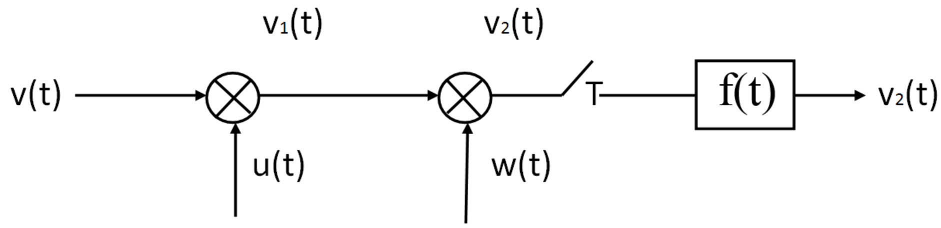
Dopo aver eseguito i calcoli elementari per determinare i parametri A, B, C, D, E e fattorizato i denominatori delle equazioni precedenti, ove opportuno, si ricava:

$z(k) = [\frac{A}{2}(\frac{1}{2})^k + Be^{j\frac{\Pi}{2}k}]\delta_{-1}(k)$

$v(k) = [\frac{C}{2}(\frac{1}{2})^k + \frac{D}{3}(\frac{1}{3})^k + Ee^{j\frac{\Pi}{2}k}]\delta_{-1}(k)$

Esercizio 5

Dato il segnale $V(f) = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f-4}{3}\right) + 2\Lambda\left(\frac{f-6}{2}\right)$, dove $\Lambda(f)$ e' l'impulso triangolare di ampiezza e area unitarie, e lo schema seguente:



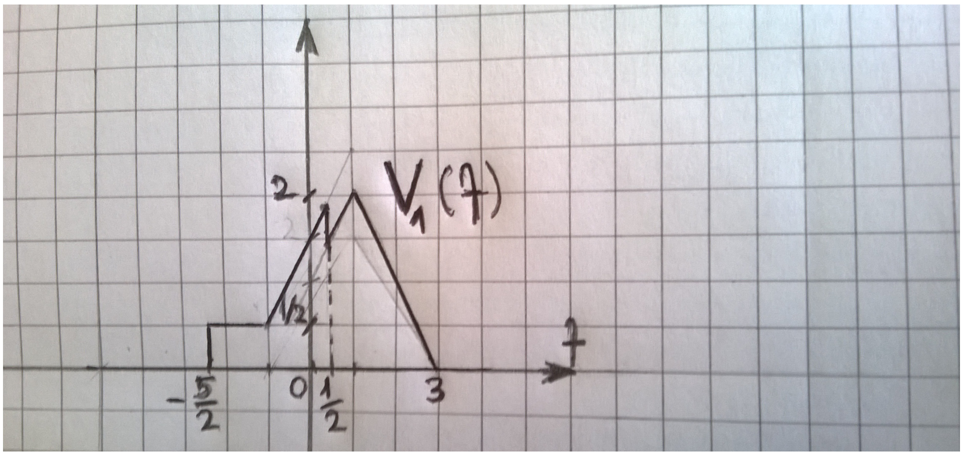
dove u(t) = $e^{-j10\Pi t}$, w(t) = $cos(4\Pi t)$ e f(t) e' il filtro passa basso ideale centrato in origine di ampiezza unitaria e risposta in frequenza F(f) = $\Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right)$.

(i) Disegnare i segnali $V_1(f)$ e $V_2(f)$

(ii) Trovare dei valori opportuni per il periodo di campionamento T in modo che non si verifichi aliasing e per f_L in modo da ottenere in uscita il segnale $v_2(t)$.

Soluzione

La trasformata di Fourier del segnale $u(t)$ e' l'impulso di Dirac applicato in $f_0 = -5$, quindi il segnale $V_1(f) = V(f+5)$ e' dato dalla traslazione di $V(f)$ lungo l'asse delle frequenze:



La larghezza di banda monolatera di $V_1(f)$ e' $B_1 = 3$.

Il segnale $w(t)$ ha come trasformata di Fourier due righe spettrali collocati in -2 e 2 di ampiezza $\frac{1}{2}$, quindi modulando V_1 con $W(f)$ si ottiene:

$V_2(f) = \frac{1}{2}V_1(f+2) + \frac{1}{2}V_1(f-2)$,

che e' una funzione con il supporto compreso tra $-\frac{9}{2}$ e 5 e quindi ha la banda monolatera $B_2 = 5$.

Scegliendo una cadenza di campionamento f_c maggiore della frequenza di Nyquist $f_N = 2B_2 = 10$, per esempio $f_c = 11$ non si verifica aliasing.

Il filtro di ricostruzione $F(f) = T\Pi(\frac{f}{2f_L})$, dove $T = 1/f_c = 1/11$ deve soddisfare:

$B_2 < f_L < f_c - B_2 \Leftrightarrow 5 < f_L < 6$, quindi qualsiasi valore di $f_L \in (5, 6)$ e' un valore opportuno per la soluzione.

Esercizio 6 Tracciare il luogo delle radici della seguente funzione di trasferimento ad anello aperto:

$$G(s)H(s) = \frac{Ks}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20}, K > 0. \quad (2)$$

Calcolare le coordinate della pulsazione corrispondente all' intersezione con l'asse immaginario e il valore di K corrispondente.

Quanto vale il margine di guadagno per un generico valore di progetto K_p?

Soluzione

I poli $s = \pm 2j, s = -5$ e lo zeri $s = 0$ in ciclo aperto determinano la parte reale del luogo delle radici (vedi la figura 2).

Abbiamo 2 asintoti. Il centro degli asintoti e' $\sigma_c = \frac{-5}{2}$, mentre gli angoli degli asintoti con l'asse reale sono $\beta_0 = 90°, \beta_1 = 270°$.

Non ci sono punti di biforcazione appartenenti al luogo delle radici.

Gli unici punti di intersezione con l'asse immaginario sono i poli $s = \pm 2j$ che corrispondono a $K = 0$ e alle pulsazioni ± 2.

Per un qualsiasi valore di progetto K_p diverso da 0 il margine di guadagno e' nullo.

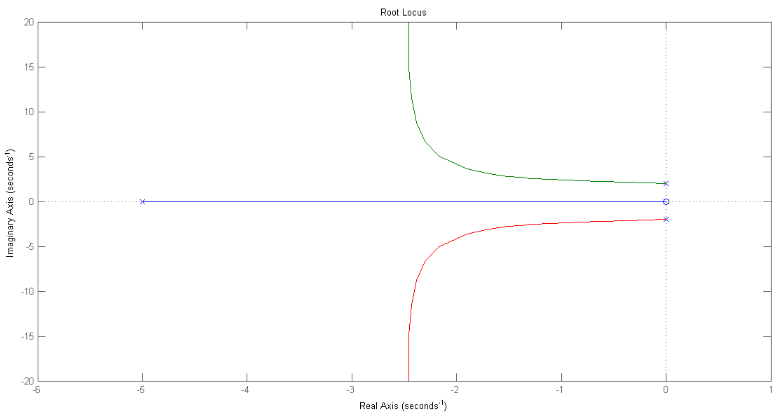


Figure 2: Luogo delle radici (MATLAB)